FISICA

A.A. 2015-2016
Ingegneria Gestionale
4°appello del 28 Ottobre 2016
Esame completo

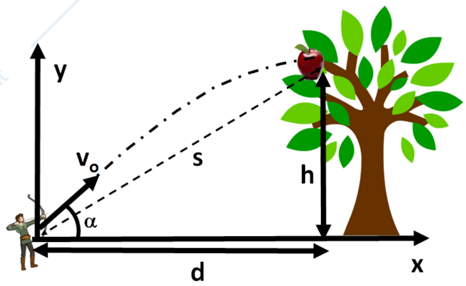
1. Un arciere vuole colpire con una freccia una mela su un albero ad altezza h=14 m rispetto all'arciere. La distanza in linea d'aria tra arciere e bersaglio è di s=40 m. L'angolo di mira dell'arciere è α=30° rispetto all'orizzontale. Si determini:
a) con quale velocità (in modulo) deve essere scoccata la freccia affinché colpisca il bersaglio;
b) in quanto tempo la freccia raggiunge il bersaglio;
c) l'altezza massima raggiunta dalla freccia;
Facoltativo: all'istante t=0 la mela si stacca dal ramo e cade, mentre l'arciere sta mirando in direzione della mela ad un angolo di 20° rispetto all'orizzontale. Dato un tempo di reazione dell'arciere pari a Δt=0.2 s si determini con quale velocità l'arciere deve scagliare la freccia per colpire in volo la mela.

1. Le equazioni della cinematica

Le equazioni per la freccia sono: lungo x $\begin{cases} x(t) = v_o \cdot t\cos\alpha \\ v_x(t) = v_o\cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases}$, lungo y $\begin{cases} y(t) = v_o \cdot t\sin\alpha - g\cdot t^2/2 \\ v_y(t) = v_o\sin\alpha - g\cdot t \\ a_y = -g \end{cases}$

Imponendo x(t) =d= $\sqrt{s^2-h^2}$ =**37.47 m** si ottiene l'espressione del tempo al quale la freccia giunge sul piano verticale x=d dove si trova la mela: $t = \dfrac{d}{v_o\cos\alpha}$.

Introducendo questa espressione nell'equazione dell'ordinata della freccia ed imponendo il passaggio per la quota alla quale si trova la mela y(t)=h si ottiene



$$y(t) = v_o\sin\alpha\cdot\left(\frac{d}{v_o\cos\alpha}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{d}{v_o\cos\alpha}\right)^2 = h$$

che dopo opportune semplificazioni diviene $d\cdot tg\alpha - \dfrac{g\cdot d^2}{2v_o^2\cos^2\alpha} = h$

da cui si ottiene il **modulo della velocità iniziale**: $v_o = \dfrac{d}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{g}{2(d\cdot tg\alpha - h)}}$ =**34.66 m/s**

da cui il **tempo di volo della freccia**: $t = \dfrac{d}{v_o\cos\alpha} = \sqrt{\dfrac{2(d\cdot tg\alpha - h)}{g}}$ =**1.248 s**

La massima quota che potrebbe raggiungere la freccia corrisponde all'apice della sua traiettoria parabolica e si ottiene annullando $\mathbf{v_y=0}$ da cui $t = \dfrac{v_o\sin\alpha}{g}$ =**1.77 s** che è però un tempo successivo al raggiungimento del bersaglio. In sintesi la freccia non riesce a raggiungere l'apice della parabola.

Facoltativo:

Le equazioni per la freccia sono: lungo x $\begin{cases} x(t) = v_o \cdot t\cos\beta \\ v_x(t) = v_o\cos\beta \\ a_x = 0 \end{cases}$, lungo y $\begin{cases} y(t) = v_o \cdot t\sin\beta - g\cdot t^2/2 \\ v_y(t) = v_o\sin\beta - g\cdot t \\ a_y = -g \end{cases}$

il moto di caduta della mela è descritto da $\begin{cases} y_{mela}(t) = h - g\cdot(t+\Delta t)^2/2 \\ v_y(t) = -g\cdot(t+\Delta t) \\ a_y = -g \end{cases}$

(il moto della mela è anticipato di Δt rispetto al moto della freccia).

Imponendo x(t)=d si ottiene $t = \dfrac{d}{v_o\cos\beta}$

Imponendo y(t)=y_{mela}(t) si ottiene $v_o\cdot t\sin\beta - g\cdot t^2/2 = h - g\cdot t^2/2 - g\cdot t\cdot\Delta t - g\cdot\Delta t^2/2$

da cui $(v_o\cdot\sin\beta + g\cdot\Delta t)\cdot t = h - g\cdot\Delta t^2/2$.

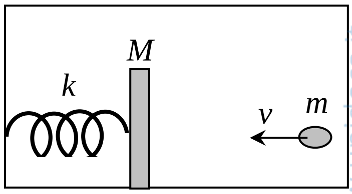
Combinando le due infine $\dfrac{v_o\cdot\sin\beta + g\cdot\Delta t}{v_o\cdot\cos\beta}d = h - g\cdot\Delta t^2/2$

da cui $d\cdot tg\beta + d\dfrac{g\cdot\Delta t}{v_o\cdot\cos\beta} = h - g\cdot\Delta t^2/2$

da cui la velocità iniziale $v_o = d\dfrac{g\cdot\Delta t}{\cos\beta\left(h - d\cdot tg\beta - g\,\Delta t^2/2\right)}$ **=471 m/s**

A tale valore corrisponde un tempo di volo $t = \dfrac{d}{v_o\cos\beta}$ **=0.085 s** ed una quota y_{mela}**=13.69 m**

2. Un proiettile di massa m=50g riceve un impulso in orizzontale pari a I=1Ns. Sulla sua traiettoria è posto un piattello di massa M=1kg in quiete collegato ad una molla di costante elastica k=200N/m. Il proiettile urta il piattello. Assumendo che l'urto sia perfettamente anelastico si determinino l'ampiezza delle oscillazioni del sistema e l'energia persa durante l'urto.



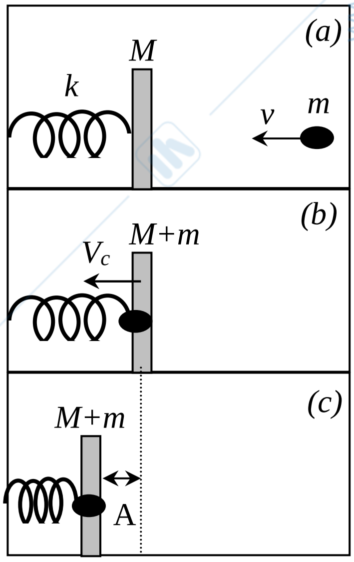
2. L'impulso fornito allo scoppio fornisce la velocità iniziale del proiettile $v = I/m$ =20 m/s cui corrisponde l'energia cinetica iniziale $K_o=mv^2/2$=**10 J**

Durante l'urto perfettamente anelastico si conserva la quantità di moto

$mv = (M+m)\cdot V_c$ da cui $V_c = \left(\dfrac{m}{m+M}\right)v = 0.952\dfrac{m}{s}$.

L'energia dissipata Q durante l'urto si ottiene per differenza fra l'energia cinetica prima dell'urto (figura a) e quella appena dopo l'urto (figura b).

$Q = K_A - K_B = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}(M+m)V_c^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{mM}{m+M}\right)v^2 = \dfrac{I^2 M}{2m(m+M)}$ **=9.52 J**



Dopo l'urto il sistema prende ad oscillare. Avendo trascurato tutti gli attriti l'energia cinetica appena dopo l'urto (figura b) si trasforma in energia potenziale quando la molla raggiunge la massima compressione (figura c).

$$K_B = U_C \Leftrightarrow \frac{1}{2}(M+m)V_c^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

da cui si ricava l'ampiezza massima delle oscillazioni $A = V_c\sqrt{(M+m)/k} = \frac{I}{\sqrt{k(M+m)}} =$ **6.9 cm**

3. Una bottiglia d'acqua da 1.5 litri si trova alla temperatura T_o=50°C perché da lungo tempo sotto al sole. Per raffreddarla e servirla al tavolo alla temperatura di T=10°C viene utilizzato il cassetto di un congelatore in grado di raffreddare con una potenza di 100 W. Quanti minuti devono trascorrere prima di poter fare uscire la bottiglia dal congelatore? Nel caso rimanga nel congelatore dopo quanti minuti la troviamo completamente congelata? [calore specifico dell'acqua C=1kcal/kg °C, calore latente di fusione del ghiaccio λ=80 kcal/kg]

3. L'acqua nella bottiglia deve essere raffreddata cedendo parte del suo calore secondo l'equazione $Q = mC(T - T_o) \le 0$ (calore ceduto)

$$Q = 1.5kg \cdot \left(4.186\frac{kJ}{kg°C}\right)(10°C - 50°C) = -251kJ \le 0$$

Tale calore Q<0 viene sottratto alla bottiglia dal congelatore durante l'intervallo di tempo [0, t] secondo l'equazione $Q = -P \cdot t \le 0$

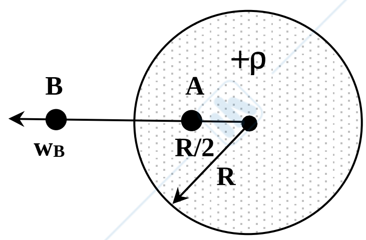
dove P è la potenza fornita del congelatore

Combinando le equazioni si ottiene $t = \frac{|Q|}{P} = \frac{mC\Delta T}{P} =$ **2512 s = 41^m 52^s**

Nel secondo caso per congelare completamente la bottiglia è necessario sottrarre il calore per portare la sua temperatura a 0°C e poi sottrarre infine il calore latente corrispondente al passaggio di stato secondo l'equazione $Q_2 = mC(0 - T_o) - m\lambda = -816kJ \le 0$ (calore ceduto)

Combinando le equazioni si ottiene $t = \frac{|Q_2|}{P} = \frac{m(CT_o + \lambda)}{P} =$ **8163 s = 2^h 16^m 3^s**

4. Una carica q=1μC, di massa m=10g viene posizionata all'interno di una sfera di raggio R=50cm uniformemente carica nel punto A alla distanza R/2 dal centro della sfera. Assumendo che la carica q sia inizialmente ferma, determinarne, durante il suo moto di allontanamento, la massima velocità raggiunta. [densità volumetrica della sfera ρ=100μC/m^3].



4. Supponendo che la carica raggiunga la massima velocità in un determinato punto B (da determinare) è sempre possibile applicare la conservazione dell'energia meccanica nei punti A, B da cui $qV_A + 0 = qV_B + K_B$ (ove si è imposta l'energia cinetica iniziale nulla K_A=0)

Da questa condizione si ottiene l'espressione della velocità nel punto B

$w_B = \sqrt{2q(V_A - V_B)/m}$ che raggiunge il valore massimo quando $V_A - V_B$ è massimo, quando cioè il punto B ha il minimo potenziale cosa che avviene nel punto di riferimento all'infinito V_B=0

In queste condizioni la velocità massima è quindi raggiunta asintoticamente all'infinito : $w_B = \sqrt{2qV_A/m}$

Calcolo del potenziale V_A nel punto di partenza A

Applicando la legge di Gauss si ottiene il campo elettrico $\begin{cases} r < R & E_{\text{int}} = \rho r / 3\varepsilon_o \\ r > R & E_{ext} = \rho R^3 / 3\varepsilon_o r^2 \end{cases}$

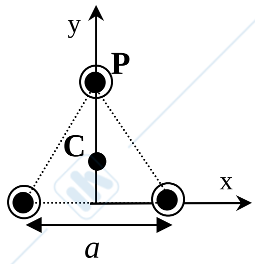
Scegliendo il riferimento all'infinito, il potenziale nel punto A si calcola come segue:

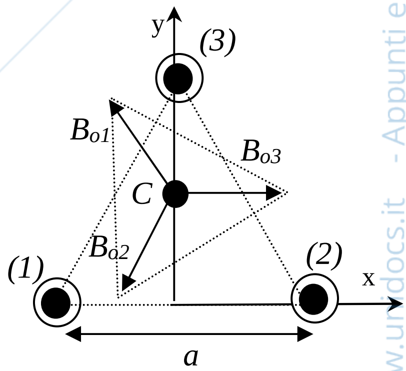
$$V_A\left(\frac{R}{2}\right) = \int_{R/2}^{R} E_{\text{int}} dr + \int_{R}^{\infty} E_{ext} dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R/2}^{R} + \frac{\rho}{3\varepsilon_o} R^3 \left[-\frac{1}{r}\right]_{R}^{\infty} = \frac{11}{24}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_o}$$

da cui la massima velocità raggiunta asintoticamente B all'infinito vale

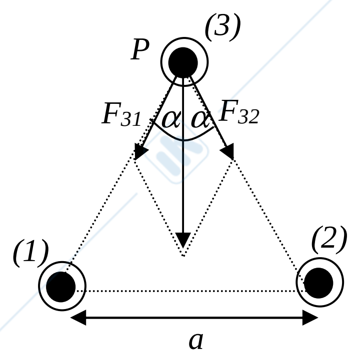
$w_\infty = \sqrt{11 q \rho R^2 / 12 m \varepsilon_o}$ **= 16.1 m/s**

5. Tre fili conduttori di lunghezza infinita sono tra loro paralleli e disposti ai vertici di un triangolo equilatero di lato a. Essi sono percorsi dalla medesima corrente I, concorde all'asse z (uscente dal piano del foglio). Calcolare il vettore induzione magnetica $\vec{B}_C$ nel punto centrale *C* del triangolo, e la forza per unità di lunghezza sul filo passante per il punto *P*.
[Dati: a = 20 cm, I = 3A]



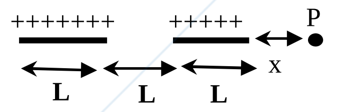


5. I vettori induzione magnetica prodotti dai tre fili conduttori nel centro *C* sono uguali in modulo $B_{o1}=B_{o2}=B_{o3}$ e disposti simmetricamente a formare un triangolo equilatero come in figura. **La loro somma vettoriale è quindi nulla** La forza per unità di lunghezza agente sul punto P del conduttore n°3, si ottiene sommando la forza $\vec{F}_{31}$ con cui viene attratto dal conduttore n°1 e quella $\vec{F}_{32}$ con cui viene attratto dal conduttore n°2. Tali forze valgono in modulo: $F_{31} = I_3 B_{o1} L = \frac{\mu_o I_1 I_3}{2\pi a} L$, e $F_{32} = I_3 B_{o2} L = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a} L$, (ove L è la lunghezza del conduttore n°3). Dal momento che $I_1 = I_2 = I_3 = I$ le due forze sono uguali in modulo e pari a $F = \frac{\mu_o I^2}{2\pi a} L$. La somma vettoriale di tali forze dà luogo ad un vettore risultante $\vec{R}$ diretto in verso opposto all'asse y. Il modulo di *R* sommando le due proiezioni lungo l'asse *y* da cui $R = F_{31}\cos\alpha + F_{32}\cos\alpha = 2F\cos(\pi/3) = \sqrt{3}F$. Infine la forza per unità di lunghezza si ottiene $\frac{R}{L} = \frac{\sqrt{3}\mu_o I^2}{2\pi a} =$ **1.56*10⁻⁵ N/m**



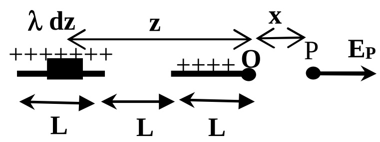
ESERCIZI SOSTITUTIVI di elettromagnetismo per l'esonero

1. Due sbarrette sottili di materiale isolante, entrambe di densità di carica uniforme λ=20μC/m e di lunghezza L=20cm sono poste sullo stesso asse ad una distanza L=20cm. Calcolare il campo elettrico generato dalle due distribuzioni nel punto P posizionato sempre lungo lo stesso asse ad una distanza x=5cm dalla seconda barra (come descritto in figura).



1. Campo elettrico generato nel punto P

Per identificare la carica disposta sulle due sbarrette, viene introdotta una ascissa mobile z a partire dal punto O corrispondente all'estremità della seconda sbarra, distante x dal punto di osservazione P (nel quale va calcolato il campo elettrico).



Il campo elettrico elementare generato da una carica elementare dq=λdz posta alla distanza z da O e alla distanza (z+x) dal punto P

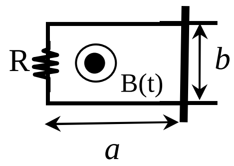
vale $dE = \dfrac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_o (z+x)^2}$ (in direzione orizzontale)

Integrando tutti i contributi su entrambe le sbarrette

$$E_P = \int dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left\{ \int_0^L \frac{dz}{(z+x)^2} + \int_{2L}^{3L} \frac{dz}{(z+x)^2} + \right\} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left\{ \left[-\frac{1}{z+x} \right]_0^L + \left[-\frac{1}{z+x} \right]_{2L}^{3L} \right\} =$$

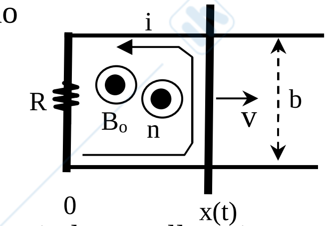
$$E_P = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_o}\left\{ \frac{1}{y(L+x)} + \frac{1}{(2L+x)(3L+x)} \right\} = \mathbf{3 \cdot 10^6\ V/m}$$

5. Una barretta metallica di massa m è libera di spostarsi lungo una guida metallica piana in modo da formare un circuito elettrico di forma rettangolare di lati *a,b* con a variabile. Il circuito giace in una regione piana dove è applicato un vettore induzione magnetica ortogonale (con verso uscente dal foglio) con legge temporale $B_o = B_{max} \exp[-kt]$. Assumendo nota la resistenza elettrica R della spira, determinare al tempo t=0 l'espressione della corrente indotta nella spira e della accelerazione cui è soggetta la barretta supposta inizialmente ferma. **Facoltativo:** ripetere l'esercizio nel caso la barretta sia inizialmente animata da una velocità v diretta verso l'esterno
[Dati: B_{max}=0.2 T, a=10cm, b=10cm, k=10^3/s, R=20Ω, m=10g, v=50m/s]



5. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira rettangolare in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_O$, si calcola il flusso concatenato con la spira Φ_c:

$$\Phi_c = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = B_o(t) \cdot x(t) \cdot b$$



Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -b\frac{d}{dt}\left[B_o(t) \cdot x(t)\right] = -b\left[x\frac{dB_o}{dt} + B_o \frac{dx}{dt} \right] = bB_{max}\left[k \cdot x(t) - v(t)\right]\exp(-kt)$$

ed infine l'intensità di corrente indotta nel circuito $i(t) = \dfrac{f_i}{R} = \dfrac{bB_{max}(kx - v)}{R}\exp(-kt)$

al tempo t=0 l'espressione diviene $i_o = \frac{bB_{max}(ka - v_o)}{R}$ (circolante nel senso in figura)

a) quando $v_o=0$ **i_{oA}=0.1 A**

b) quando v_o=50m/s **i_{oB}=0.05 A**

A causa della circolazione della corrente, tutti i lati della spira sono soggetti a forze magnetiche. In particolare sul lato mobile si genera una forza $F = ibB_o = \frac{b^2 B_{max}^2 (kx(t) - v(t))}{R} \exp(-2kt)$

a) quando $v_o=0$ **$F_A = 2 \cdot 10^{-3}$ N** ed accelerazione **a_A=0.2 m/s^2**

b) quando v_o=50m/s **$F_B = 1 \cdot 10^{-3}$ N** ed accelerazione **a_B=0.1 m/s^2**