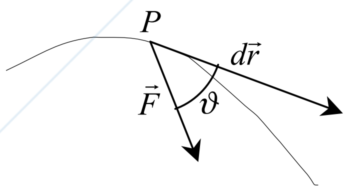
3. Lavoro ed energia

3.1 Definizioni principali

<u>Def.</u> *Lavoro elementare di una forza*

Si dice che una forza *compie un lavoro* quando il punto materiale al quale è applicata si sposta. Si definisce *lavoro elementare* $d\mathcal{L}$ di una forza $\vec{F}$ durante lo spostamento $d\vec{r}$ il prodotto scalare:



$$d\mathcal{L} = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\vartheta\,,$$

dove ϑ è l'angolo formato da $\vec{F}$ con $d\vec{r}$.

Dimensioni

In base alla definizione risulta che il lavoro è una grandezza *scalare*, con dimensioni:

$$[d\mathcal{L}] = [F][dr] = [L]^2[M][T]^{-2}$$

U.d.M.

L'unità di misura nel S.I. è il Joule (*J*), pari ad 1 Newton x 1 metro.

<u>Oss.1</u>: Non è detto che sia la forza $\vec{F}$ a determinare lo spostamento $d\vec{r}$; se, ad esempio, $\vartheta > \pi/2$, avremo $d\mathcal{L} < 0$, cioè la forza $\vec{F}$ si oppone allo spostamento, provocato da altre interazioni.

In generale, se $d\mathcal{L} < 0$, il lavoro elementare compiuto da $\vec{F}$ si dice *lavoro resistente*; viceversa, se $d\mathcal{L} > 0$, si dice *lavoro motore*. Ad esempio, le *forze di attrito* compiono sempre un lavoro resistente (negativo).

<u>Oss.2</u>: Per calcolare il prodotto scalare, possiamo scomporre la forza e lo spostamento in diversi modi, ad esempio:

a) Nelle componenti parallela e normale alla traiettoria:

$$\vec{F} = F_T\hat{u}_T + F_N\hat{u}_N \quad ; \quad d\vec{r} = ds\,\hat{u}_T \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{L} = F_T\,ds$$ Quindi il lavoro non dipende da F_N!

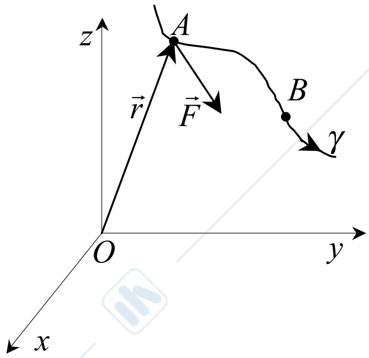
b) Nelle componenti cartesiane:

$$\vec{F} = F_x\hat{u}_x + F_y\hat{u}_y + F_z\hat{u}_z \quad ; \quad d\vec{r} = dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y + dz\,\hat{u}_z \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{L} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

<u>Oss.3</u>: Il lavoro elementare risulta *nullo* se la forza e lo spostamento sono *ortogonali*, come ad esempio nel caso del moto ***circolare uniforme***, in cui l'unica forza è *centripeta*, ortogonale in ogni punto alla traiettoria. Altrimenti, il lavoro elementare è positivo per angoli minori dell'angolo retto, negativo per angoli superiori all'angolo retto.

<u>Oss.4</u>: Se un certo numero *n* di forze agiscono sul punto materiale *P*, il lavoro elementare della forza risultante è la somma dei singoli lavori:

$$d\mathcal{L} = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\right)\cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i\cdot d\vec{r}\right) = \sum_{i=1}^{n} d\mathcal{L}_i$$



Def. ***Lavoro di una forza lungo un cammino finito***

Il lavoro $\mathcal{L}$ compiuto da una forza $\vec{F}$ nello spostamento dal punto A al punto B lungo la traiettoria γ si definisce come ***l'integrale di linea*** del lavoro elementare lungo γ:

$$\mathcal{L} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Oss.1: In generale $\mathcal{L}$ non dipende solo da A e B ma anche dalla traiettoria γ seguita. Si dice anche che il lavoro elementare $d\mathcal{L}$ non è un differenziale esatto e per distinguere questa sua natura inesatta andrebbe indicato più propriamente con la seguente notazione: $\delta\mathcal{L}$.

Se sono note la dipendenza dalla posizione delle componenti cartesiane di $\vec{F}$ e la legge oraria in coordinate cartesiane, scriveremo:

$$\mathcal{L} = \int_{\gamma} F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz \quad ; \quad \gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

In alternativa, avremo:

$$\mathcal{L} = \int_{\gamma} F_T(s)ds$$

Def. ***Potenza di una forza***

La *potenza istantanea W* di una forza $\vec{F}$ è la derivata temporale del lavoro compiuto dalla forza stessa:

$$W = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Dimensioni

Le dimensioni della potenza sono: $[W] = [F][v] = [L]^2[M][T]^{-3}$.

U.d.M.

La sua unità di misura nel S.I. è il *watt* (*W*), pari ad 1 joule / 1 secondo.

Una unità di misura di uso frequente per il ***lavoro*** è il *chilowatt-ora* (*kWh*): $1kWh = 3.6 \cdot 10^6 J$, cioè il lavoro compiuto in un'ora da una forza della potenza di 1 kW.

Oss.1: La *potenza* è la grandezza fisica con cui si misura la capacità di una macchina di compiere lavoro in un determinato tempo.

Oss.2: Come diretta conseguenza della definizione di potenza istantanea si ha che se una macchina sviluppa una potenza istantanea *W(t)*, il lavoro che essa compie nell'intervallo di tempo (t_1, t_2) si calcola come: $\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} W(t)dt$

Oss.3: Se complessivamente in un intervallo di tempo Δt viene compiuto un lavoro $\mathcal{L}$, la *potenza media* vale per definizione:

$$W_m = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t}$$

3.2 Energia cinetica e teorema delle forze vive

Def. ***Energia cinetica***
Si definisce *energia cinetica* $E_c(P)$ di un punto materiale di massa *m* nella posizione *P* l'*indice di stato fisico*:

$$E_c(P) = \frac{1}{2} m v_P^2 + k$$

dove $v_P^2 = \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P = |\vec{v}_P|^2$, essendo $\vec{v}_P$ la velocità istantanea del punto materiale nella posizione *P*, e *k* è una costante arbitraria, con le dimensioni di un lavoro.

OSS. L'energia cinetica in *P* è funzione della sola velocità in *P*, non del vettore posizione in *P*!

Vediamo ora l'utilità di tale definizione.
Hp: Poniamoci in un sistema di riferimento inerziale, ed assumiamo che $\vec{F}$ sia la **risultante di tutte le forze applicate al punto materiale di massa *m*.**
Sotto questa ipotesi vale l'equazione $\vec{F} = m\vec{a}$ che esprime il secondo principio della dinamica.
Moltiplichiamo ora scalarmente tale equazione per uno spostamento infinitesimo $d\vec{r}$:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = md\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m\,d\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m\, d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

Consideriamo ora due punti arbitrari *A* e *B* della traiettoria del punto materiale, allora, in base alla definizione di lavoro lungo un cammino finito, possiamo scrivere:

$$\mathcal{L}_{A\to B,\gamma} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A,\gamma}^{B} d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Ovvero, considerando anche la definizione di energia cinetica, avremo che il lavoro compiuto da $\vec{F}$ nello spostamento del punto materiale da *A* a *B* è pari alla variazione di energia cinetica del punto materiale tra queste due posizioni:

$$\boxed{\mathcal{L}_{A\to B,\gamma} = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c(A,B)}$$

Questa equazione esprime il seguente:

Thr. ***Teorema delle forze vive*** **o** ***teorema dell'energia cinetica***
In un sistema di riferimento inerziale, il lavoro compiuto dalla risultante di tutte le forze agenti su di un punto materiale quando esso si sposta dalla posizione A alla posizione B è pari alla variazione di energia cinetica del punto materiale tra le posizioni A e B.

Oss.1: Poichè, come osservato in precedenza, il lavoro dipende in generale dalla *traiettoria*, e *non solo dagli estremi A* e *B*, anche la variazione di energia cinetica subita dal punto materiale dipende in generale dalla traiettoria da esso seguita per giungere da *A* a *B*.

Oss.3: L'arbitrarietà della costante additiva *k* introdotta nella definizione dell'energia cinetica non ha alcun effetto di rilevanza fisica, perchè il teorema dell'energia cinetica dice che il *lavoro* è una *differenza* fra due valori dell'energia cinetica, e dunque non dipende da *k*.
Poichè tale costante può essere scelta in modo arbitrario, fissiamola ad esempio al valor nullo, cioè $E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Anche se questa scelta è la più comune, non bisogna dimenticare che si tratta di una scelta *arbitraria*.

3.3 Il caso di una forza costante

Consideriamo ora una forza $\vec{F}$ costante (in modulo, direzione e verso) che agisce su un punto materiale di massa *m*; il lavoro compiuto da $\vec{F}$ quando il punto si sposta da *A* a *B* vale:

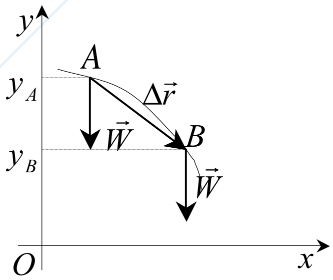
$$\mathcal{L}_{A\to B,\gamma} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\int_{A,\gamma}^{B} d\vec{r} = \vec{F}\cdot\left(\vec{r}_B-\vec{r}_A\right) = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}(A,B), \quad \forall\gamma$$

Oss. Dunque, il lavoro compiuto da una forza costante è ***indipendente dalla traiettoria***, ma dipende solo dagli estremi *A* e *B*, precisamente dal vettore spostamento (libero, cioè non applicato) $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{AB}$.

Esempio: La forza peso.

$$\vec{W} = m\vec{g} = -mg\hat{u}_y = \overrightarrow{\text{cost}}.$$

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F_x\Delta x + F_y\Delta y = F_y\Delta y =$$
$$= -mg\left(y_B-y_A\right) = +mg\left(y_A-y_B\right)$$



OSS.1 Il lavoro compiuto dipende solo dalle *quote* dei punti *A* e *B*, e risulta indipendente dalla traiettoria seguita (caduta libera, moto lungo un piano inclinato, ecc.).

OSS.2 In base al teorema dell'energia cinetica, si dimostra ora, in modo del tutto generale, che un corpo che cade da una data altezza **subendo solo ed esclusivamente il lavoro della forza peso** giunge a terra con la stessa velocità indipendentemente dalla traiettoria da esso seguita!
Infatti, se supponiamo che il punto materiale abbia in *A* velocità v_A, e quando giunge in *B* velocità v_B, in base al teorema dell'energia cinetica avremo:

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2 \;\Rightarrow\; mg\left(y_A-y_B\right)=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2 \;\Rightarrow\; v_B=\sqrt{v_A^2+2g\left(y_A-y_B\right)}, \quad \forall\gamma .$$

OSS.3 ***Energia potenziale della forza peso***
Possiamo definire per la forza peso un indice di stato fisico detto *energia potenziale*, funzione della posizione *Q* del punto materiale cui la forza risulta applicata:

$$E_p(Q) = mgy_Q + k,$$

y_Q è la quota (coordinata verticale) della posizione *Q* rispetto ad uno quota di riferimento arbitrariamente scelta (zero dell'asse verticale) e *k* è una costante additiva arbitraria, che convenzionalmente poniamo a zero, attribuendo così valore nullo di energia potenziale della forza peso allo stato di riferimento corrispondente alla quota nulla nel SdR inerziale considerato.

OSS.4 Il lavoro compiuto dalla forza peso nello spostamento fra due posizioni *A* e *B* risulta uguale e contrario alla variazione di energia potenziale tra questi due punti:

$$\mathcal{L}_{A\to B} = mg\left(y_A-y_B\right) = E_p(A)-E_p(B) = -\Delta E_p(A,B).$$

Tale risultato è una conseguenza evidente del fatto che il lavoro della forza peso *non dipende dal cammino seguito dal punto materiale*, ma solo dalle quote iniziale e finale, come è stato osservato negli esempi precedenti (vedi ultima lezione sulla Dinamica del punto materiale).

Quindi possiamo anche definire l'energia potenziale della forza peso in un generico punto Q come il lavoro fatto dalla forza peso per portare il punto materiale in questione da Q ad un punto di riferimento O nel quale si è assunta essere nulla l'energia potenziale (tipicamente un punto qualsiasi a quota nulla nel nostro SdR inerziale).

OSS.5 Dunque l'energia potenziale della forza peso è una *quantità scalare* che permette di esprimere in modo molto semplice il lavoro fatto della forza peso.

Ci chiediamo ora: esistono altri tipi di forze che godono di questa possibilità, e cioè di poter definire per esse una quantità scalare che permetta di esprimere in maniera altrettanto semplice il lavoro da esse compiuto?
E' evidente che se ***una forza è tale che il lavoro da essa compiuto per portare un punto materiale da A a B non dipende dal cammino percorso o da altre circostanze, ma solo dalle coordinate di A e di B, allora, per ogni punto Q dello spazio, possiamo sempre definire una quantità scalare pari al lavoro fatto dalla forza per portare il punto materiale in questione da Q ad un punto di riferimento O nel quale tale quantità scalare abbia un valore costante arbitrario (eventualmente nullo) assunto come riferimento.***

Si verifica che in natura esistono numerose forze di questo tipo. Esse sono dette **forze conservative** per una ragione che risulterà chiara in seguito.