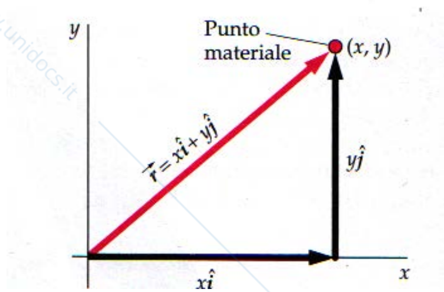
Moto in due e tre dimensioni

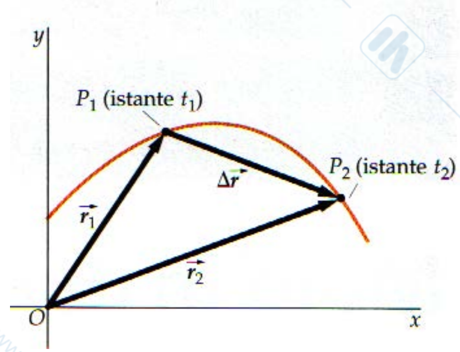
I moti studiati fino ad ora (moto in una dimensione) sono un caso particolare del problema più generale del *moto di un corpo nello spazio* (o nel piano). Partiamo dalle considerazioni nel piano.



Il ***vettore posizione*** di un *punto materiale* nel piano è dato da

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

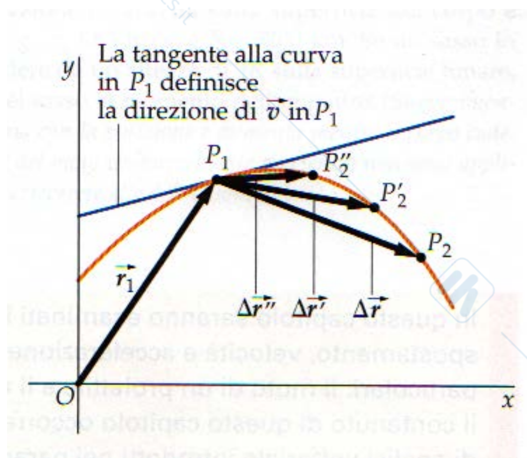
e lo ***spostamento*** del *punto materiale* è dato da



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\,\hat{i} + (y_2 - y_1)\,\hat{j} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j}$$

Il **vettore** ***velocità media*** è dato da

$$\vec{v}_{media} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$



ed il **vettore** ***velocità istantanea*** è dato da

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j}$$

che ha *modulo* e *direzione* dati da

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad \vartheta = arctg\,\frac{v_y}{v_x}$$

Il **vettore** ***accelerazione media*** è dato da

$$\vec{a}_{media} = \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta t}$$

ed il **vettore** ***accelerazione istantanea*** è dato da

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta t} = \frac{d\,\vec{\mathrm{v}}}{dt} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

Il *moto in una direzione* è un *caso particolare*, in cui le componenti y, v_y e a_y sono nulle (o quelle x, v_x e a_x).

Valgono ancora le relazioni:

$$\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_{0x} + a_x t \qquad \mathrm{v}_y = \mathrm{v}_{0y} + a_y t$$

$$x = x_0 + \mathrm{v}_{0,x}\, t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad y = y_0 + \mathrm{v}_{0,y}\, t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$\mathrm{v}_x^2 = \mathrm{v}_{0,x}^2 + 2a_x (x - x_0) \qquad \mathrm{v}_y^2 = \mathrm{v}_{0,y}^2 + 2a_y (y - y_0)$$

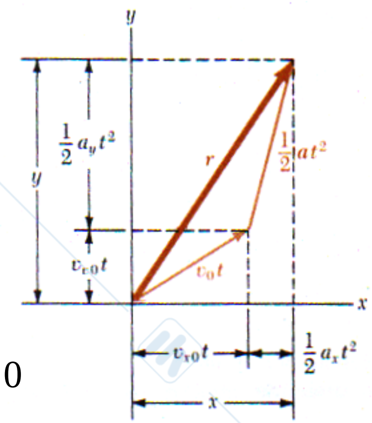
In forma **vettoriale** si ha ad esempio:

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{v}} &= \mathrm{v}_x\, \hat{i} + \mathrm{v}_y\, \hat{j} \\ &= (\mathrm{v}_{0,x} + a_x t)\hat{i} + (\mathrm{v}_{0,y} + a_y t)\,\hat{j} \\ &= (\mathrm{v}_{0,x}\, \hat{i} + \mathrm{v}_{0,y}\, \hat{j}) + (a_x\, \hat{i} + a_y\, \hat{j})t \end{aligned}$$

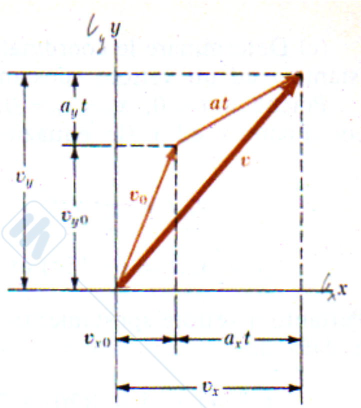
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_0 + \vec{a}\, t}$$

E analogamente per ***l'equazione oraria del moto*** si trova (a = cost):

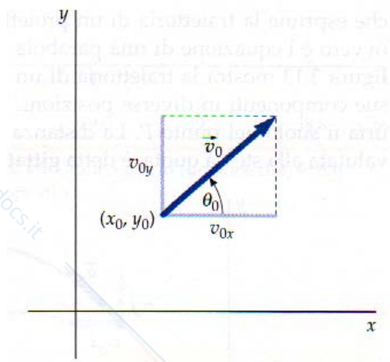
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2$$



$\vec{r}_0 = 0$



Un caso particolare: il ***moto parabolico*** (o moto del proiettile).



Un corpo viene lanciato con *velocità iniziale* $\mathbf{v}_0$ ed angolo θ rispetto alla superficie terrestre. Per semplicità siano $x_0 = 0$ ed $y_0 = 0$ (origine degli assi coincide con il punto del lancio).

Le *componenti iniziali* della velocità sono quindi:

$$v_{0x} = v_0 \cos\vartheta$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\vartheta$$

e quelle dell'accelerazione sono:

$$a_x = 0$$
$$a_y = -g$$

Si può quindi scrivere che

$$v_x = v_0 \cos\vartheta$$
$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

notare che v_x è costante mentre v_y no e cambia anche segno

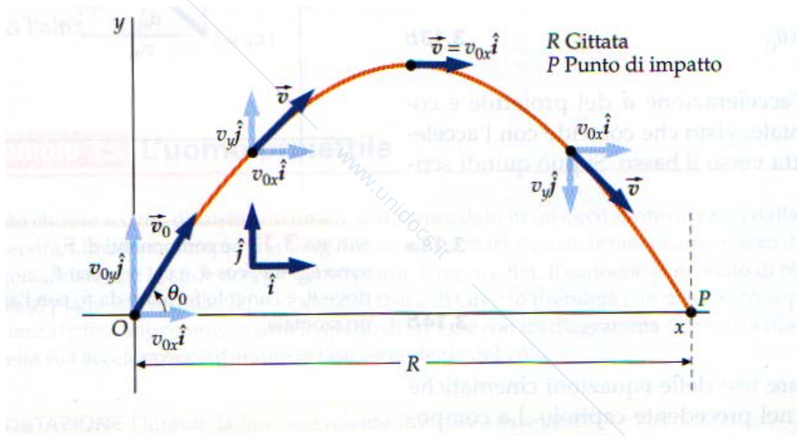
Il corpo segue quindi un moto da

$$x = x_0 + v_{0,x}\, t = v_0 \cos\vartheta\, t$$
$$y = y_0 + v_{0,y}\, t + \frac{1}{2} a_y t^2 = v_0 \sin\vartheta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

Risolvendo il sistema (si ricava t dalla prima e si sostituisce):

$$y = y_0 + v_{0,y}\, t + \frac{1}{2} a_y t^2 = v_0 \sin\vartheta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\vartheta} x^2$$



La soluzione ha la forma di una *parabola*.

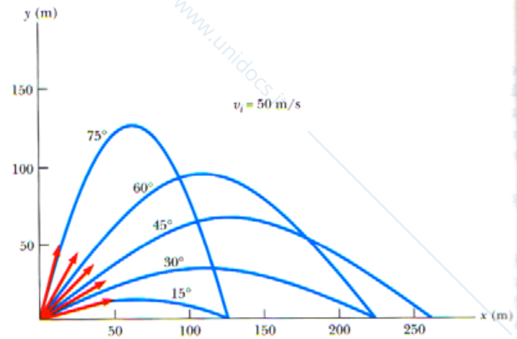
Posto y = 0 si trovano le due soluzioni: x = 0 (ovvia, origine!) e x = R (**gittata** o Range):

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x \equiv R = \frac{2 v_0^2}{g} \sin\vartheta \cos\vartheta = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\vartheta$$

Si vede anche che il *range* ***massimo*** si ha quando la funzione sin 2θ è massima:

$$\sin 2\vartheta = 1$$

$$2\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vartheta = \frac{\pi}{4}}$$



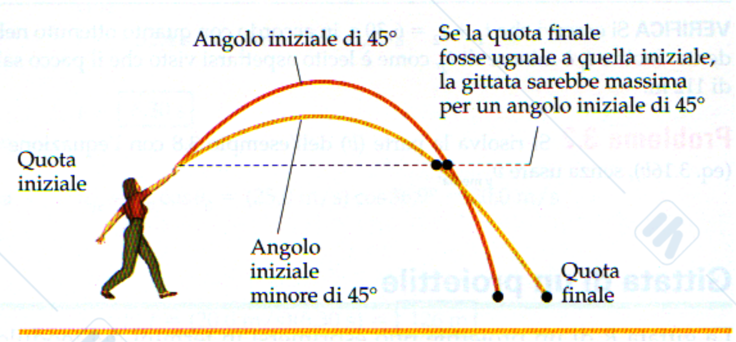
L'altezza massima y_M può essere ricavata dalla *gittata*, infatti per simmetria l'ascissa del punto medio della traiettoria y_M è pari alla metà della gittata:

$$x_M = \frac{R}{2} = \frac{v_0^2}{g} \sin\vartheta \cos\vartheta$$

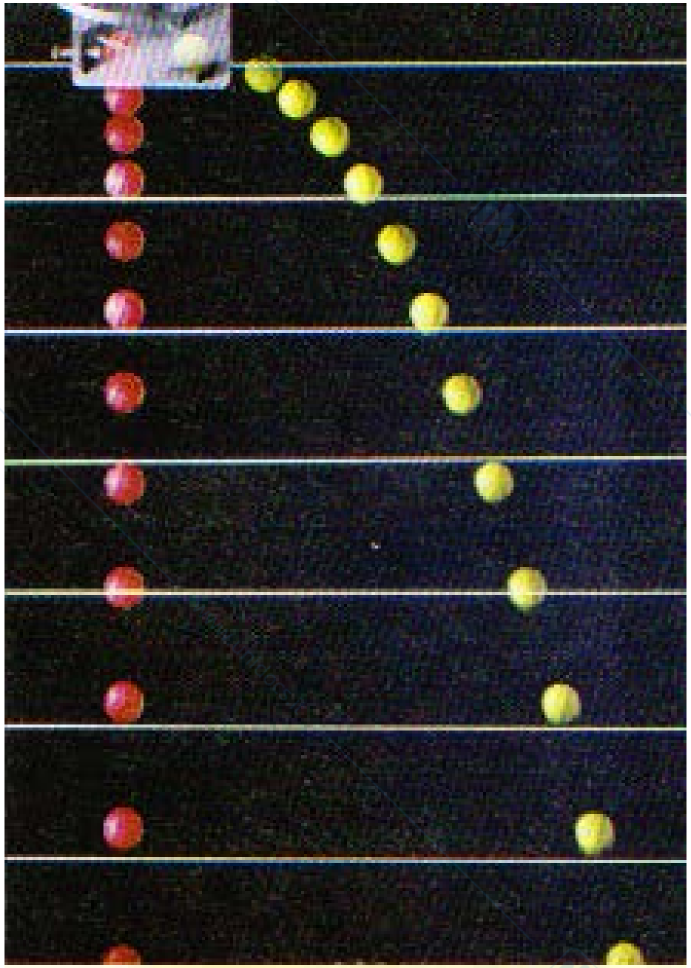
che sostituita nell'equazione che descrive il moto del proiettile dà:

$$y_M = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\vartheta$$

Se la quota iniziale non è uguale a quella finale, ad esempio lancio del peso, del giavellotto etc, l'angolo per avere il range massimo non è più di π/4 ma inferiore.

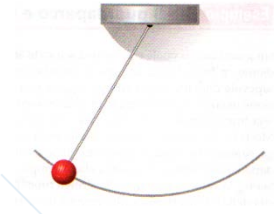


È interessante notare che se due corpi vengono lasciati cadere uno verticalmente lungo y ed il secondo con una velocità iniziale lungo x pari a v_{0x}, l'andamento del moto lungo l'asse verticale sarà lo stesso per i due corpi.

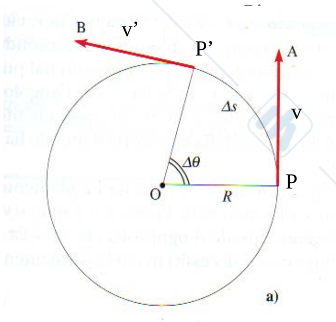


Moto circolare

Nella figura si vede un corpo appeso ad un filo che oscilla in un piano verticale. La traiettoria del corpo appeso al filo è costituita da un arco di circonferenza. Il moto lungo una traiettoria circolare è detto ***moto circolare***

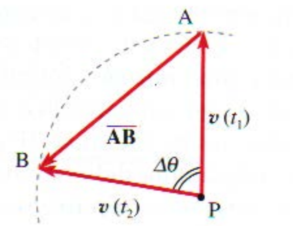


Un caso particolare di moto circolare è il ***moto circolare uniforme***.



Un *punto materiale* si muove lungo una circonferenza di raggio r con *velocità costante* in modulo. Si vede però che il **vettore velocità** cambia continuamente direzione e verso.
Sia **v** la velocità del punto nel punto P al tempo t e **v'** quella nel punto P' al tempo t + Δt. L'arco percorso è quindi PP' = v Δt. I due vettori velocità sono uguali in *modulo*

$$|\vec{v}| = |\vec{v}'|$$



ma cambiano direzione e verso. Se il **vettore v** cambia, ci deve essere una accelerazione!
Si ridisegnano poi i vettori come in figura, traslando **v'** in P. si vede quindi che si trova un vettore Δ**v** pari a

$$\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}'$$

I triangoli OPP' e PAB sono simili e si può quindi scrivere (approssimando l'arco PP' alla corda PP')

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta s}{r} \approx \frac{v\,\Delta t}{r} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{r}$$

Si vede che per Δt sempre più piccoli, l'arco PP' tende sempre più alla corda PP' e che Δv ha una direzione ed un verso sempre più rivolti verso il centro della circonferenza.

Per Δt → 0

$$a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{v}^2}{r}$$

Otteniamo quindi il *modulo* dell'**accelerazione centripeta** a_c, che ha direzione e verso sempre rivolti verso il centro della circonferenza.

Ovviamente quanto detto è vero anche se un corpo descrive solo un arco di una circonferenza (ad esempio auto in curva di raggio costante r).

Si può verificare anche in questo caso che *l'equazione dimensionale* è soddisfatta:

$$[a_c] = [LT^{-2}] = [L^2T^{-2} \times L^{-1}] = [LT^{-2}]$$

In un moto circolare uniforme, il tempo impiegato dal punto materiale a percorrere una circonferenza completa 2πr è detto ***periodo*** T ed è quindi, per definizione di velocità:

$$\mathrm{v} = \frac{2\pi r}{T}$$

L'inverso del *periodo* viene chiamata ***frequenza*** *(numero di giri percorsi al secondo):*

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad [\nu] = [T^{-1}]$$

Nel *sistema internazionale* la frequenza si misura in *Hertz (Hz).*

La velocità con cui ruota il raggio r = OP della figura precedente è poi detta velocità angolare *media*, ed è data da

$$\omega_m = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$$

o più correttamente la velocità angolare *istantanea*

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$$

Dimensionalmente è

$$[\omega] = [T^{-1}]$$

e nel *sistema internazionale* la velocità angolare si misura in (θ è adimensionale!)

$$\omega = \frac{rad}{s}$$

Si può poi vedere che

$$\omega = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\vartheta = \omega\,\Delta t \Rightarrow \vartheta - \vartheta_0 = \omega\,(t - t_0)$$

e quindi, posto $t_0 = 0$, scrivere la legge oraria del moto circolare uniforme:

$$\boxed{\vartheta = \vartheta_0 + \omega\, t}$$

In un periodo T, l'angolo percorso è 2π e quindi si può anche scrivere che è

$$\omega = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

Si possono poi anche scrivere le relazioni

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\,\nu \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Dalle

$$\mathrm{v} = \frac{2\pi r}{T} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

sostituendo si trova anche che è

$$\boxed{\mathrm{v} = \omega\, r}$$

relazione fondamentale che lega la velocità tangenziale v alla velocità angolare ω.

Ricordando poi che è

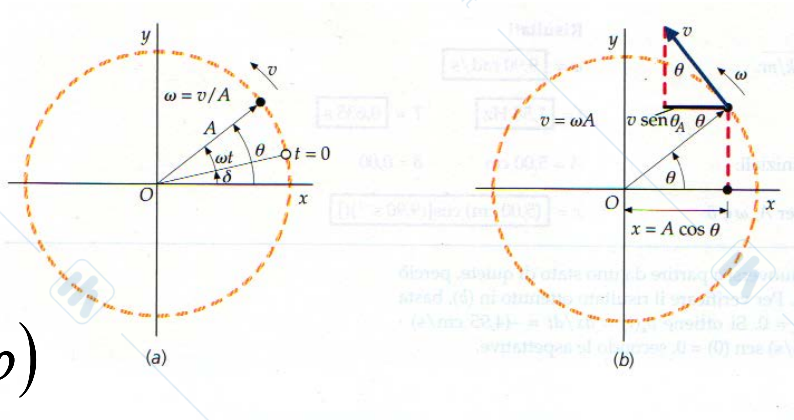
$$a_c = \frac{\mathrm{v}^2}{r} \quad \Rightarrow \quad a_c = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$$

$$\boxed{a_c = \omega^2 r}$$

che è la legge che lega accelerazione centripeta e velocità angolare.

Si considera ora un *punto materiale* che si muove lungo una circonferenza, di moto circolare uniforme.
La velocità angolare ω è costante, e si prende la proiezione di tale punto sull'asse delle ascisse, si vede che il moto del punto P' è dato da

$$x(t) = OP' = A\cos\vartheta = A\cos\omega\, t$$



o, più in generale se al tempo t = 0 è θ = φ:

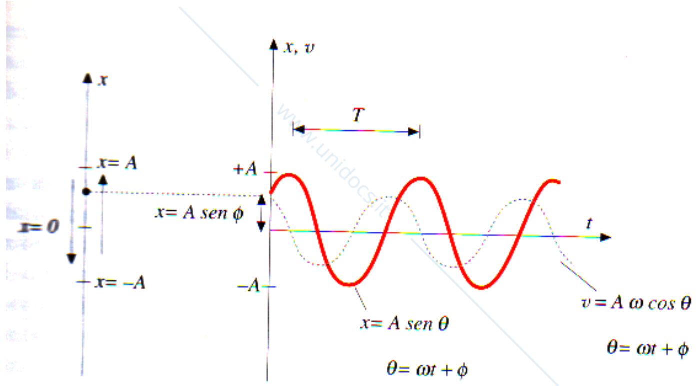
$$x(t) = OP' = A\cos\vartheta = A\cos(\omega\, t + \varphi)$$

La coordinata del punto P' varia tra –A e + A e si muove di un moto che si chiama ***moto armonico***.
A è l'ampiezza del moto armonico e ω la sua pulsazione. L'angolo φ prende il nome di fase iniziale.
Valgono ancora le relazioni viste precedentemente tra periodo, pulsazione e frequenza:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega = 2\pi\,\nu \qquad \nu = \frac{1}{T}$$

Il moto è un ***moto*** di tipo ***periodico***, infatti dopo che il punto P ha percorso una circonferenza completa, quindi dopo un periodo T, il moto si riproduce uguale a prima.

l'angolo φ è chiamato *fase iniziale*.

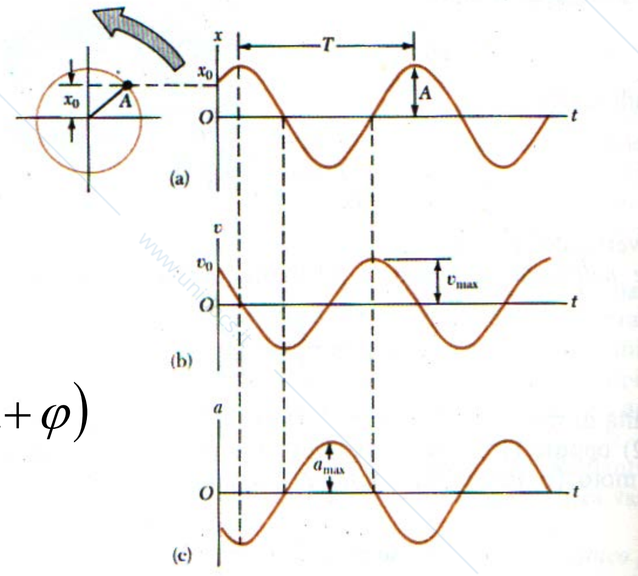


Un diagramma dello spostamento in funzione del tempo ha l'andamento della funzione coseno (o seno).
Si trova anche che per la *velocità* e *l'accelerazione* valgono le:

$$x(t) = OP' = A\cos(\omega\, t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d[A\cos(\omega\, t + \varphi)]}{dt} = -\omega A\sin(\omega\, t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d^2\,x(t)}{dt^2} = \frac{d[-\omega A\sin(\omega\, t + \varphi)]}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega\, t + \varphi)$$



$$\Rightarrow \quad \boxed{a\,(t) = -\,\omega^2\, x(t)}$$

Tratteremo più avanti moti di questo tipo, che prendono il nome di ***moti armonici***.

ESEMPIO 3.2 **Un bel lancio**

Una pietra viene scagliata verso l'alto dalla sommità di un edificio, con un angolo di 30.0° rispetto all'orizzontale e con una velocità di 20.0 m/s come in Figura 3.9.

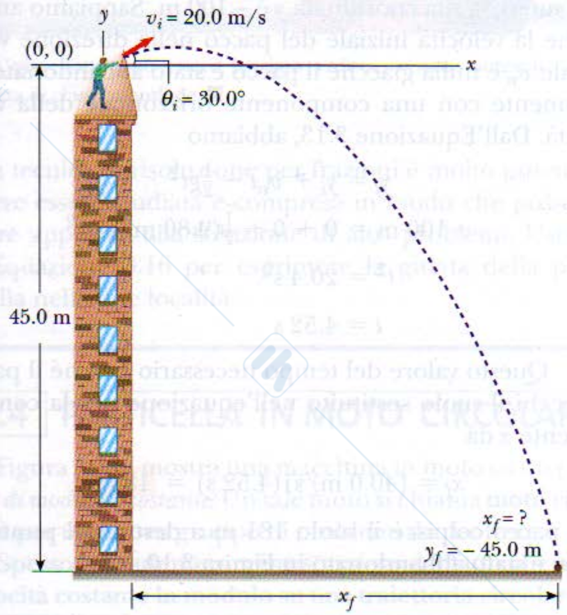


FIGURA 3.9 (Esempio 3.2) Una pietra è lanciata dalla cima di un edificio.

A Se l'altezza dell'edificio è 45.0 m, per quanto tempo la pietra rimane "in volo"?

Soluzione Osservando la rappresentazione pittorica in Figura 3.9, appare chiaro che non si tratta di una traiettoria simmetrica. Quindi, non possiamo usare le Equazioni 3.15 e 3.16. Useremo l'approccio più generale descritto nella "Strategia per la risoluzione dei problemi" e rappresentato dalle Equazioni dalla 3.10 alla 3.13.

Le componenti x e y della velocità iniziale sono

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i = (20.0 \text{ m/s})(\cos 30.0°) = 17.3 \text{ m/s}$$

$$v_{yi} = v_i \,\text{sen}\,\theta_i = (20.0 \text{ m/s})(\text{sen } 30.0°) = 10.0 \text{ m/s}$$

Per trovare t, usiamo il moto verticale, in cui il modello della particella è quello con accelerazione costante. Usiamo l'Equazione 3.13 con $y_f = -45.0$ m e $v_{yi} = 10.0$ m/s ((abbiamo scelto la sommità dell'edificio come origine, come in Figura 3.9):

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$-45.0 \text{ m} = 0 + (10.0 \text{ m/s})t - \tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado in t, otteniamo per la radice positiva $t = 4.22$ s. La radice negativa ha un qualche significato fisico? (Puoi pensare un altro modo di trovare t dalle informazioni note?)

B Qual è la velocità della pietra appena prima di colpire il suolo?

Soluzione La componente y della velocità appena prima di urtare il suolo si può ottenere usando l'Equazione 3.11, con $t = 4.22$ s:

$$v_{yf} = v_{yi} - gt$$
$$= 10.0 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(4.22 \text{ s}) = -31.4 \text{ m/s}$$

Nella direzione orizzontale, il modello appropriato è quello della particella con velocità costante. Poiché $v_{xf} = v_{xi} = 17.3$ m/s, la velocità della pietra quando urta il suolo è

$$v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2}$$
$$= \sqrt{(17.3)^2 + (-31.4)^2} \text{ m/s} = 35.9 \text{ m/s}$$

ESEMPIO 3.5 L'accelerazione centripeta della Terra

Qual è l'accelerazione centripeta della Terra dovuta al suo moto orbitale attorno al Sole?

Soluzione Useremo per la Terra il modello di una particella e approssimeremo l'orbita della Terra a un'orbita circolare (essa è in realtà leggermente ellittica, come sarà discusso nel Capitolo 11). Sebbene non conosciamo la velocità orbitale della Terra, con l'aiuto dell'Equazione 3.18, possiamo riscrivere l'Equazione 3.17 in termini del periodo orbitale della Terra, che sappiamo essere un anno:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$= \frac{4\pi^2(1.5 \times 10^{11}\ \text{m})}{(1\ \text{anno})^2}\left(\frac{1\ \text{anno}}{3.16 \times 10^7\ \text{s}}\right)^2$$

$$= 5.9 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

Notare che questo piccolo valore dell'accelerazione può essere anche espresso come $6.0 \times 10^{-4}\ g$.