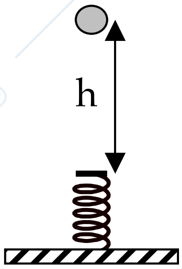
14/2/2011
ore 9:15

FISICA (terzo appello)

Proff. Ciucci, Della Valle, Magni, Nisoli, Torricelli

1) Una biglia di piombo di massa m viene lasciata cadere da un'altezza h su una molla appoggiata sul pavimento in posizione verticale. La biglia rimane fissata all'estremo della molla. Si osserva che la massima deformazione della molla è ΔL. Si calcoli:

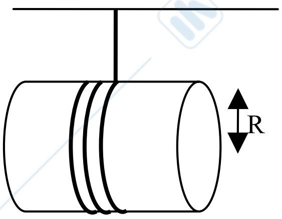
a) la costante elastica della molla,
b) l'accelerazione della biglia in corrispondenza della massima deformazione della molla, precisandone modulo, direzione e verso.



2) Si ricavi l'espressione della velocità limite per un corpo che viene lasciato cadere lungo la verticale in un fluido viscoso, specificando le grandezze necessarie per descrivere questa situazione fisica.

3) Una fune ideale è avvolta su un cilindro omogeneo di massa M e raggio R. Un estremo della fune è fissato al soffitto di una stanza. Si lascia cadere il cilindro lungo la verticale e la fune si srotola. Si calcoli:

a) l'accelerazione del centro di massa,
b) la tensione della fune.



4) Si enunci il primo principio della Termodinamica (definendo in modo chiaro i simboli e le grandezze utilizzate) e lo si utilizzi per ricavare l'equazione di una trasformazione adiabatica reversibile di un gas perfetto.

5) Due corpi di massa m si trovano inizialmente alle temperature T_1 e T_2. Il materiale che li costituisce ha un calore specifico che dipende dalla temperatura secondo la legge: $c = aT$.
Si determinino:

a) le unità di misura nel SI per la grandezza a,
b) la temperatura raggiunta dai corpi quando vengono posti a contatto,
c) la variazione di entropia del sistema.

1.

a) In base al principio di conservazione dell'energia meccanica, si ha che

$E_i = E_f$

ove $E_i = mg(h+\Delta L)$ e $E_f = \frac{1}{2}K(\Delta L)^2$

$\frac{1}{2}K(\Delta L)^2 = mg(h+\Delta L) \Rightarrow K = \frac{2mg(h+\Delta L)}{(\Delta L)^2}$

b) In corrispondenza della massima deformazione della molla la biglia inverte la direzione del proprio moto, perciò l'accelerazione in questo punto sarà rivolta verso l'alto e di modulo pari a

$a = F_t/m$ con $F_t = Ky - mg\Big|_{y=\Delta L} = K\Delta L - mg$

Quindi $a = \frac{(2h+\Delta L)}{\Delta L}g$

2.

La velocità limite è raggiunta in corrispondenza della condizione cinematica $a = 0$ (accelerazione istantanea nulla).

Considerando che per un corpo in caduta libera la forza agente è $\vec{F}_p = -mg\hat{u}_y$ mentre in presenza di viscosità del fluido agirà anche una forza di attrito viscoso $\vec{F}_a = -\beta\vec{v}$ con β coeff. di attrito viscoso

avremo $F_t = F_p + F_a = -mg\,\hat{u}_y - \beta v_y\,\hat{u}_y$
Secondo la legge di Newton della dinamica del punto materiale (II legge)

$$F_t = ma = 0 \quad \text{per } a = 0$$

Quindi $-mg - \beta v_y = 0 \Rightarrow v_y = -\dfrac{mg}{\beta}$
(Abbiamo trascurato l'effetto della spinta idrostatica di Archimede).

3.

$$I_c = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_p = I_c + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

(per il thr di Steiner)

a) La caduta del cilindro si compie attraverso una rotazione istantanea attorno ad un punto della fune P che, istante per istante, è centro (fisso, in quiete) di istantanea rotazione. Possiamo allora applicare la 2ª legge cardinale della dinamica del corpo rigido nella forma

$$\tau_p = I_p\,\alpha$$

Si noti che $\tau_P = MgR$ e che $\alpha = a/R$ (vincolo cinematico) con a accelerazione di caduta del CM del cilindro.

$$Mg\cancel{R} = \frac{3}{2}MR^{\cancel{2}}\frac{a}{\cancel{R}} \Rightarrow a = \frac{2}{3}g$$

b) La tensione della fune si può a questo punto determinare dal teorema del CM per il corpo rigido:

$$\sum_i \vec{F}_i = M\vec{a}_{CM}$$

cioè $Mg - T = M\frac{2}{3}g \Rightarrow T = \frac{1}{3}Mg$

4. Vedi Lezione di teoria

In breve:

I PTD: $Q = \mathcal{L} + \Delta U$ $\quad \delta Q = \delta\mathcal{L} + dU$

δQ calore scambiato (segno positivo se assorbito)

$\delta\mathcal{L}$ lavoro (positivo se fatto)

dU variazione di energia interna.

Per un gas ideale $dU = nc_v dT$.

Per trasf. adiabatica $\delta Q = 0 \Rightarrow \delta\mathcal{L} = -dU$

$p\,dV = -nc_v dT$ con eq. stato $pV = nRT$

$\Rightarrow \cancel{n}R\frac{dV}{V} = -\cancel{n}c_v\frac{dT}{T}$ e integrando

$\ln(TV^{R/c_v}) = \text{cost}$ e $R/c_v = \frac{c_p - c_v}{c_v} = \gamma - 1$

5.

a) $[a] = [J \cdot Kg^{-1} \cdot K^{-2}]$

a ha le dimensioni di una energia per massa per temperatura assoluta al quadrato!

b) I due corpi posti a contatto si scambiano calore attraverso un processo globalmente adiabatico, quindi

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

$$Q_i = \int_{T_i}^{T_F} m a T \, dT = \frac{1}{2} m a (T_F^2 - T_i^2)$$

con $i = 1$ o 2

$$\cancel{\frac{1}{2} m a} (T_F^2 - T_1^2) + \cancel{\frac{1}{2} m a} (T_F^2 - T_2^2) = 0$$

$$2 T_F^2 = T_1^2 + T_2^2$$

$$T_F = \sqrt{\frac{T_1^2 + T_2^2}{2}} > \frac{T_1 + T_2}{2}$$

c) La variazione di entropia è quella di una trasf. adiabatica irreversibile e possiamo calcolarla come somma delle variazioni di entropia dei due sottosistemi rappresentati dalle due masse:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

La variazione di entropia di ciascun sottosistema si determina semplicemente come la variazione di entropia della massa di sostanza m in una qualsiasi trasformazione dallo stato iniziale (identificato dalla temperatura T_i) allo stato finale (identificato dalla temperatura T_F), quindi

$$\Delta S_i = \int_{T_i}^{T_F} \frac{ma\,T\,dT}{T} = ma(T_F - T_i)$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 2maT_F - ma(T_1 + T_2)$$

$$= ma(2T_F - T_1 - T_2)$$

Si noti che, essendo $2T_F > (T_1 + T_2)$, ΔS risulta > 0, come è giusto attendersi in base al principio di accrescimento dell'entropia (essendo il sistema dei due corpi un universo termodinamico).