

## 1.2 Moto del punto materiale

### 1.2.1 Vettore Posizione, Velocità ed Accelerazione Vettoriale

Fissato un opportuno sistema di riferimento cartesiano dello spazio, la posizione occupata dal punto materiale  $P$  può essere descritta attraverso le tre **coordinate cartesiane**  $(x,y,z)$  oppure più sinteticamente attraverso il **vettore posizione**:

$$\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$$

#### **Oss.1 Componenti scalari del vettore posizione.**

Il vettore posizione ha per componenti scalari cartesiane le coordinate cartesiane del punto materiale da esso individuato.

#### **Oss.2 Modulo, direzione e verso del vettore posizione.**

Il modulo del vettore posizione vale  $r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

La sua direzione ed il suo verso sono individuati dagli angoli  $(\alpha, \beta, \gamma)$  formati con i versori degli assi cartesiani, che sono legati alle coordinate del punto attraverso i coseni direttori:

$$x = r \cos \alpha \quad ; \quad y = r \cos \beta \quad ; \quad z = r \cos \gamma \quad ; \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

### Velocità vettoriale

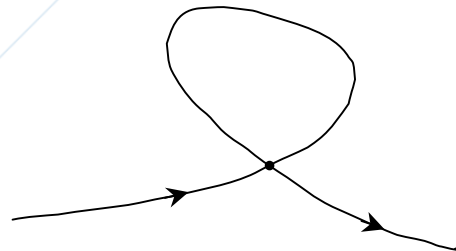
$$\vec{v}_m(t_1, t_2) \equiv \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} \quad (\text{velocità vettoriale media})$$

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{velocità vettoriale istantanea})$$

**NB:** Le grandezze cinematiche scalari e vettoriali sono assai diverse tra loro, infatti quando si passa al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  la misura della corda ( $|\Delta \vec{r}|$ ) e quella dell'arco corrispondente ( $|\Delta s|$ ) possono differire anche radicalmente. Addirittura, nel caso di traiettoria non “semplice”, cioè che presenta un “nodo”, possiamo avere una velocità vettoriale media nulla, senza che si annulli la velocità scalare media!

$$\Delta \vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_m = 0$$

$$\Delta s \neq 0 \quad \Rightarrow \quad v_m \neq 0$$



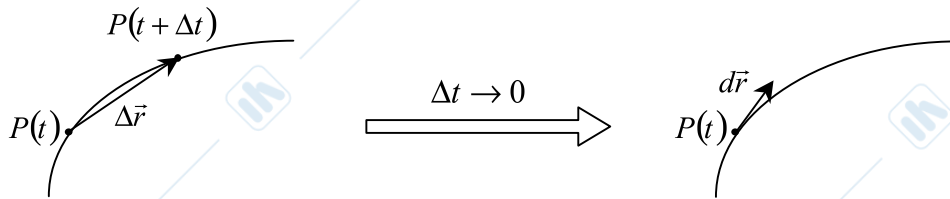
#### **Oss.1 Scomposizione della velocità vettoriale istantanea in componenti cartesiane.**

Dall'espressione del vettore posizione in componenti cartesiane si ricava immediatamente:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{u}_x + \frac{dy}{dt} \hat{u}_y + \frac{dz}{dt} \hat{u}_z = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y + v_z \hat{u}_z$$

**Oss.2 Proprietà di tangenza della velocità vettoriale istantanea alla traiettoria del moto.**

Nella definizione di velocità vettoriale, si noti che passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  si ha che lo spostamento  $\Delta \vec{r}$  diventa tangente alla traiettoria, allora anche **la velocità vettoriale istantanea risulta essere sempre tangente alla traiettoria.**

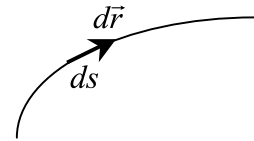
**Oss.3 Legame tra velocità vettoriale e velocità scalare istantanea.**

Definiamo **versore tangente** il versore  $\hat{u}_T$  tangente, punto per punto, alla traiettoria, con verso concorde a quello scelto per la misura dell'ascissa curvilinea  $s$ .

Osserviamo che:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s \hat{u}_T \Rightarrow \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s \hat{u}_T}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_T = v(t) \hat{u}_T(t)$$

cioè la velocità vettoriale ha per modulo il modulo della velocità scalare.

**Oss.4 Determinazione della legge oraria dalla legge della velocità vettoriale istantanea.**

Se conosciamo la posizione iniziale  $\vec{r}_0$  e l'andamento nel tempo della velocità vettoriale istantanea  $\vec{v}(t)$  possiamo ricavare la legge oraria  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  esattamente come nel caso scalare.

$$\Delta \vec{r}_{\text{tot}} = \sum_i \Delta \vec{r}_i = \sum_i \vec{v}_{m,i} \Delta t_i \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt'$$

ovvero, in termini di coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t v_x(t') dt' \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t v_y(t') dt' \\ z(t) &= z_0 + \int_{t_0}^t v_z(t') dt' \end{aligned}$$

**Accelerazione vettoriale**

$$\vec{a}_m(t_1, t_2) \equiv \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{u}_x + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{u}_y + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \hat{u}_z$$

(accelerazione vettoriale media)

$$\vec{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \hat{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \hat{u}_y + \frac{dv_z}{dt} \hat{u}_z$$

(accelerazione vettoriale istantanea)

**OSS. Calcolo della legge oraria a partire dall'accelerazione**

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt' \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt'$$

**Esempio:** Calcolo del moto parabolico di un grave, nota la velocità iniziale.

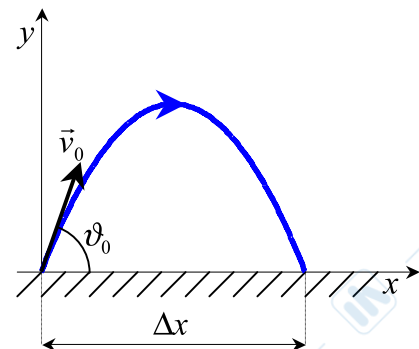
Un proiettile viene lanciato da terra con velocità iniziale  $\vec{v}_0$  inclinata di un angolo  $\vartheta_0$  rispetto alla direzione orizzontale, ed è soggetto all'accelerazione  $\vec{g}$  diretta verso il basso, per effetto del campo gravitazionale. Calcoliamo le leggi del moto del proiettile, in funzione del modulo della velocità  $v_0$  e dell'angolo di inclinazione  $\vartheta_0$ .

Assumiamo un sistema cartesiano con l'origine nella posizione iniziale del proiettile e con l'asse  $y$  diretto verso l'alto, l'asse  $x$  orizzontale e diretto come la componente orizzontale di  $\vec{v}_0$ . In questo sistema di riferimento sarà:

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \vartheta_0 \hat{u}_x + v_0 \sin \vartheta_0 \hat{u}_y \quad ; \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} = -g \hat{u}_y$$

Le leggi del moto del proiettile, perciò, sono:

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t = v_0 \cos \vartheta_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \vartheta_0 t \end{cases}$$



La gittata  $\Delta x$  (distanza del punto di impatto del proiettile al suolo rispetto al punto di lancio, o sparo) si calcola determinando l'ascissa della posizione del proiettile alla quota di impatto (il suolo). Formalmente ciò equivale ad imporre  $y = 0$  nelle equazioni della legge oraria:

$$\begin{cases} y(t_f) = -\frac{1}{2} g t_f^2 + v_0 \sin \vartheta_0 t_f = \left( -\frac{1}{2} g t_f + v_0 \sin \vartheta_0 \right) t_f = 0 \\ \Delta x = x(t_f) - x(t_i) = v_0 \cos \vartheta_0 t_f \\ t_f = \frac{2 v_0 \sin \vartheta_0}{g} = \frac{2 v_{0y}}{g} \\ \Delta x = 2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \frac{v_0^2}{g} = \sin(2 \vartheta_0) \frac{v_0^2}{g} \end{cases}$$

Si noti che, assegnato il modulo della velocità iniziale  $v_0$ , la gittata risulta massima quando  $\vartheta_0$  vale  $45^\circ$ .