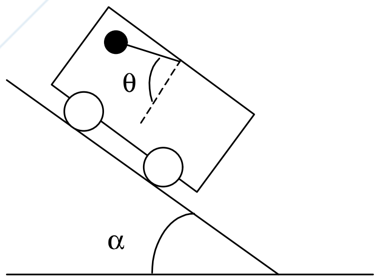
4/5/2011
ore 13:00

FISICA (prima verifica in itinere)

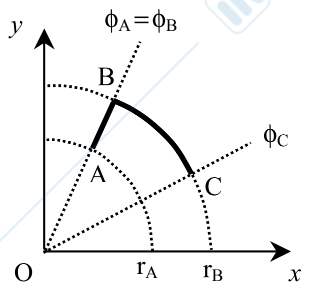
Proff. Della Valle, Nisoli, Torricelli

1) a) Si definisca il vettore velocità angolare **ω** e si scriva la relazione vettoriale fra **ω** e il vettore velocità istantanea **v** nel caso di moto circolare, motivando la risposta.
b) Si determini il modulo della forza agente al tempo $t = 0\ s$ su un punto materiale di massa m, in moto con traiettoria circolare di raggio R e velocità angolare $\omega = \omega_0\, e^{-kt}$, con ω_0 e k costanti positive.

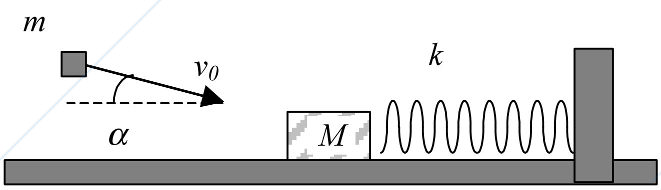
2) a) Si definisca la forza di trascinamento.
b) Un punto materiale di massa m è sospeso mediante una fune ideale al soffitto di un vagone, che scivola lungo un piano inclinato liscio formante un angolo α con l'orizzontale. Si determini l'angolo θ formato dalla fune con la normale al piano inclinato.



3) a) Si definisca cosa si intende per forza centrale a simmetria sferica e si dimostri che tale forza è conservativa.
b) Si calcolino il lavoro della forza $\vec{F} = \dfrac{k}{r^3}\,\vec{u}_r$ nel percorso ABC in figura e l'energia potenziale del campo di forze.



4) a) Si enunci la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali e da essa si ricavi il teorema dell'impulso.
b) Un corpo puntiforme di massa m in moto con velocità v_0, formante un angolo α con l'orizzontale, urta in modo completamente anelastico un corpo di massa M fermo su un piano orizzontale liscio e vincolato ad una molla ideale con costante elastica k. Si determinino:
i) la massima compressione della molla, supponendo che questa prima dell'urto sia a riposo;
ii) l'impulso della reazione vincolare del piano orizzontale durante l'impatto.

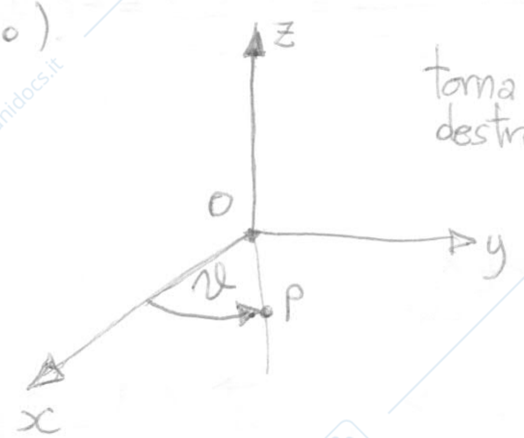


Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Soluzione tema prova in itinere FISICA 4/5/11
(Prof. G. Della Valle)

1.

a) Il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ è un vettore che ha modulo pari alla derivata temporale della anomalia (coordinata angolare del piano xy), direzione parallela all'asse z (ortogonale al piano xy) e verso concorde a z quando l'anomalia cresce, discorde quando l'anomalia decresce (essendo l'anomalia misurata con verso antiorario)



terna xyz destrorsa

$$\vec{\omega} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_z = \omega\hat{u}_z$$

In un moto circolare la distanza del punto materiale dal centro della traiettoria è costante, pari al raggio della traiettoria stessa: $\overline{OP} = R$. Definiamo il vettore posizione $\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y$. Allora $|\vec{r}| = R$, e poiché $\vec{r}$ è diretto radialmente, $\vec{r} = R\hat{u}_r = \vec{R}$ essendo $\vec{R} = \overrightarrow{OP}$.
Poiché il moto è circolare, la velocità $\vec{v}$ giace nel piano, ed essendo tangente alla traiettoria è diretta come il versore angolare $\hat{u}_\vartheta$, dunque $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_\vartheta$, ove s rappresenta l'ascissa curvilinea.
Essendo la traiettoria circolare, l'arco infinitesimo ds è pari al prodotto tra il raggio R e l'angolo sotteso $d\vartheta$, $ds = R\,d\vartheta$. Abbiamo perciò

$$\vec{v} = R\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta = R\omega\hat{u}_\vartheta$$

Infine, ricordando che $\hat{u}_\vartheta = \hat{u}_z \times \hat{u}_r$, abbiamo

$$\vec{v} = R\omega\hat{u}_\vartheta = \omega R(\hat{u}_z \times \hat{u}_r) = \omega\hat{u}_z \times R\hat{u}_r = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

b)
$$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N$$
$$\vec{F}_T = m\vec{a}_T, \quad \vec{F}_N = m\vec{a}_N$$
$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T, \quad \vec{a}_N = \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$$

Moto circolare: $\rho = R$ raggio circonferenza

$$v = \omega R \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = -RK\omega_0 e^{-Kt}$$

$$\vec{a}_T = -RK\omega_0 e^{-Kt}\hat{u}_T$$
$$\vec{a}_N = \frac{\omega^2 R^2}{\cancel{R}}\hat{u}_N = R\omega_0^2 e^{-2Kt}\hat{u}_N$$

All'istante $t = 0s$, $a_T(0) = -RK\omega_0$, $a_N(0) = R\omega_0^2$

$$|\vec{F}(t=0s)| = \sqrt{F_T^2 + F_N^2}\Big|_{t=0s} = m\sqrt{a_T^2(0) + a_N^2(0)} =$$
$$= m\,\omega_0 R\sqrt{K^2 + \omega_0^2}$$

2.

a) La forza di trascinamento è una forza apparente dovuta alla presenza di un moto di trascinamento del sistema di riferimento scelto per la descrizione fisica del sistema.

Più precisamente: $\vec{F}_t = -m\vec{a}_t$, essendo $\vec{a}_t$ l'accelerazione di trascinamento. Si dimostra che $\vec{a}_t$ è legata alle grandezze cinematiche che descrivono il moto di trascinamento e al vettore posizione del punto materiale nel sistema di riferimento in moto dalla relazione seguente:

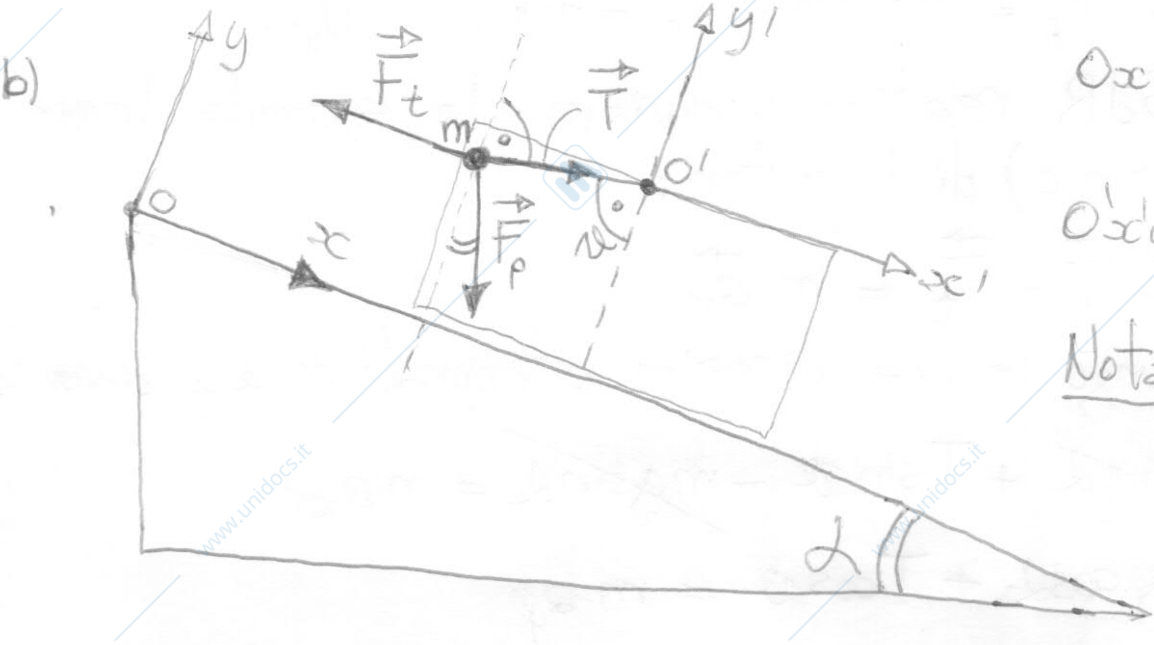
$$\vec{a}_t = \vec{a}_{o'} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_r) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_r$$

$\vec{a}_{o'}$ è l'accelerazione dell'origine del sistema di riferimento in moto rispetto ad un sistema di riferimento inerziale (detto assoluto);

$\vec{\omega}$ è la velocità angolare istantanea di rotazione del sistema di riferimento in moto;

$\vec{r}_r$ è la posizione del punto materiale nel sistema di riferimento in moto.

b)



Oxy: SdR assoluto

O'x'y': SdR relativo

<u>Nota</u>: $\hat{U}_{x'} = \hat{U}_x$
$\hat{U}_{y'} = \hat{U}_y$

$\vec{F}_t = -m\vec{a}_t$

$\vec{a}_t$ accelerazione di trascinamento del SdR relativo (vagone in moto lungo il piano inclinato)

Il SdR relativo è in moto traslatorio puro, quindi risulta $\vec{a}_t = \vec{a}_{o'}$.

$\vec{a}_{o'}$ è l'accelerazione di caduta di un grave lungo un piano inclinato, che sappiamo essere indipendente dalla sua massa (se il piano è liscio), e pari a $g\sin\alpha$, quindi $\vec{a}_t = g\sin\alpha\,\hat{u}_x$ e infine

$\vec{F}_t = -mg\sin\alpha\,\hat{u}_x = -mg\sin\alpha\,\hat{u}_{x'}$

La tensione della fune ha componenti

$T_{x'} = T\sin\vartheta$, $T_{y'} = T\cos\vartheta$

quindi $\vec{T} = T\sin\vartheta\,\hat{u}_{x'} + T\cos\vartheta\,\hat{u}_{y'}$.

La forza peso ha componenti

$F_{px'} = mg\sin\alpha$, $F_{py'} = -mg\cos\alpha$

quindi $\vec{F}_p = mg\sin\alpha\,\hat{u}_{x'} - mg\cos\alpha\,\hat{u}_{y'}$.

Nel SdR relativo scriviamo la seconda legge (o principio) di Newton:

$$\vec{F}_p + \vec{T} + \vec{F}_t = m\vec{a}_r$$

che lungo le due direzioni ortogonali x' e y' diventa:

$$\begin{cases} \cancel{mg\sin\alpha} + T\sin\vartheta - \cancel{mg\sin\alpha} = ma_{x'} \\ -mg\cos\alpha + T\cos\vartheta = ma_{y'} \end{cases}$$

Nel SdR relativo il punto materiale è in quiete, dunque $a_{x'} = a_{y'} = 0$ e avrò:

$$\begin{cases} T \sin\vartheta = 0 \\ T \cos\vartheta = mg\cos\alpha \end{cases}$$

A meno di assumere che sia $\alpha = \pi/2$ (caduta libera) $mg\cos\alpha$ è diverso da zero, quindi la seconda equazione implica che T sia anch'essa diversa da zero. Allora la prima equazione è soddisfatta se e solo se $\vartheta = 0$.

3.

a) Una forza $\vec{F}(\vec{r})$ si dice centrale (a simmetria sferica) quando soddisfa le seguenti condizioni:
1) è diretta verso un punto dello spazio detto centro di forza
2) il suo modulo dipende solo dalla distanza dal centro di forza

Analiticamente, rappresentiamo tali forze mediante la scrittura funzionale seguente:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\hat{u}_r$$

ove $\vec{r}$ è il vettore posizione del punto rispetto ad un SdR con origine nel centro di forza.

Tale forza è conservativa perché presi due punti A e B, individuati dai vettori posizione $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$, il lavoro compiuto dalla forza lungo un

qualunque percorso γ che congiunga A con B è il medesimo, indipendentemente dal percorso γ.
Infatti

$$\mathcal{L}_{A\to B,\gamma} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{A,\gamma}^{B} F(r)\,\hat{u}_r \cdot \overbrace{\left(dr\,\hat{u}_r + \underbrace{r\,d\alpha\,\hat{u}_\alpha}_{r\,d\hat{u}_r \text{ in } 3D}\right)}^{d\vec{r} \text{ in } 2D} =$$

$$= \int_{A,\gamma}^{B} F(r)\,dr = \int_{r_A}^{r_B} F(r)\,dr$$

Quindi è possibile definire una energia potenziale per le forze centrali, cioè un campo scalare $E_p(r)$ tale che

$$\mathcal{L}_{A\to B} = E_p(r_A) - E_p(r_B).$$

Sarà quindi $E_p(r) = \int_{r}^{r_0} F(r)\,dr$

con $E_p(r_0) = 0$ per convenzione, essendo r_0 una opportuna distanza dal centro di forza scelta come riferimento per la misura della energia potenziale (ad esempio, $r_0 = \infty$ per forza gravitazionale).

b)

$$\mathcal{L}_{A\to C,\gamma} = \mathcal{L}_{A\to B,\gamma_1} + \mathcal{L}_{B\to C,\gamma_2}$$

Osservo che la forza in esame è conservativa perchè centrale (a simmetria sferica), infatti $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\hat{u}_r$ con $F(r) = \frac{K}{r^3}$.

Applico quindi i risultati riportati sopra (punto a del quesito).

$$\mathcal{L}_{A\to C,\gamma} = \mathcal{L}_{A\to C} = \mathcal{L}_{A\to B}$$

$\mathcal{L}_{B\to C} = 0$ perchè B e C hanno $r_B = r_C$, giacciono quindi sulla medesima superficie equipotenziale.

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{K}{r^3}\,dr = \left[-\frac{K}{2r^2}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{K}{2}\left(\frac{1}{r_A^2} - \frac{1}{r_B^2}\right)$$

4.

a) $$\vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

essendo $\vec{F}^{(E)}$ la risultante di tutte le forze esterne agenti sul sistema di punti materiali (forze reali in un SdR inerziale, somma del le forze reali e di quelle apparenti in un SdR non inerziale) e $\vec{P}$ la quantità di moto totale del sistema, cioè $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$.

Integrando ad ambo i membri rispetto al tempo abbiamo

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{(E)}(t')dt' = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) \stackrel{\Delta}{=} \Delta\vec{P}(t_1,t_2)$$

A primo membro l'integrale prende il nome di impulso delle forze esterne $\vec{I}_{\vec{F}^{(E)}}(t_1,t_2)$ nell'intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$.
Abbiamo quindi il teorema dell'impulso per un sistema di punti materiali:

$$\Delta\vec{P}(t_1,t_2) = \vec{I}_{\vec{F}^{(E)}}(t_1,t_2)$$

La variazione della quantità di moto totale di un sistema di punti materiali nell'intervallo di tempo Δt è pari all'impulso della risultante di tutte le forze esterne nel medesimo intervallo di tempo.

b.i)

Nell'urto il sistema non è isolato, cioè $\vec{F}^{(E)} \neq 0$.
Tuttavia lungo la direzione tangente al piano (detta x), non possono agire forze impulsive, perchè l'unica forza esterna a componente orizzontale non nulla è la forza elastica della molla, che è costitutivamente non impulsiva. Secondo il modello di Hooke essa è infatti proporzionale alla deformazione, e quindi

per piccole deformazioni è piccola. Poiché il fenomeno di urto è supposto essere istantaneo, durante l'urto la molla non può deformarsi, quindi la forza elastica della molla, anche qualora fosse non nulla, non può variare durante l'urto. Essa rimane finita e perciò ha impulso nullo (se l'urto è istantaneo)

Abbiamo allora (t_1 istante precedente all'urto
t_2 istante successivo all'urto)

$$P_x(t_1) = m v_0 \cos\alpha$$

$$P_x(t_2) = (M+m)v \quad (v \text{ velocità sistema dopo l'urto})$$

e, in base al thr dell'impulso,

$$P_x(t_2) - P_x(t_1) = I_{x,\vec{F}^{(E)}}(t_1,t_2) = 0$$

$$m v_0 \cos\alpha = (M+m)v \Rightarrow v = \frac{m\cos\alpha}{M+m} v_0$$

Dopo l'urto il sistema conserva l'energia meccanica perché il piano è liscio, e non sono quindi presenti forze di attrito.

$$E_{in} = E_{c,in} = \frac{1}{2}(M+m)v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m\cos^2\alpha}{M+m}\right) m v_0^2$$

$$\parallel$$

$$E_{fin} = E_{p,fin} = \frac{1}{2}K\Delta L^2$$

$$\Delta L = \sqrt{\frac{m}{M+m}}\sqrt{\frac{m}{K}}\, v_0 \cos\alpha$$

b.ii)

Durante l'impatto è presente lungo la direzione normale al piano sia la forza peso che la reazione vincolare del piano stesso.
Quest'ultima può avere carattere impulsivo (per costituzione del vincolo, che è assunto indeformabile, quindi impenetrabile).
Infatti se, come assunto implicitamente, dopo l'urto non sono presenti moti in direzione normale, ma solo in direzione tangenziale al piano, è chiaro che durante l'urto non è conservata la componente normale (diciamola y) della quantità di moto.

Allora $P_y(t_1) = -mv_0 \sin\alpha$

$P_y(t_2) = 0$

$$\Delta P_y(t_1,t_2) = mv_0 \sin\alpha \neq 0$$

In base al teorema dell'impulso tale variazione è pari all'impulso della risultante di tutte le forze esterne lungo l'asse y, e poiché la forza peso non è impulsiva (forza costante), tale impulso è quello della reazione normale del piano:

$$\vec{I}_{\vec{N}}(t_1,t_2) = \Delta P_y(t_1,t_2)\,\hat{u}_y = mv_0 \sin\alpha\,\hat{u}_y$$