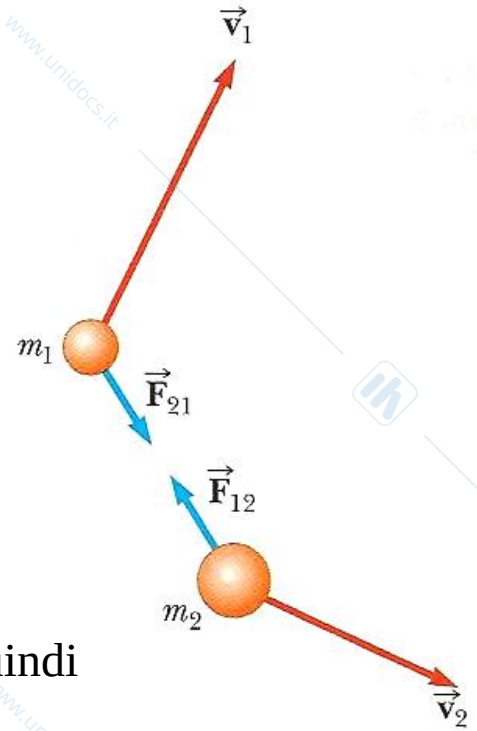
Quantità di moto e urti

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Consideriamo un ***sistema isolato*** costituito da due particelle (corpi puntiformi)



Se il sistema è isolato, le uniche forze sono quelle *tra* le particelle.

Si ha quindi che

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,1} = 0$$

In un certo intervallo di tempo, le due particelle accelerano e si ha quindi

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1 \frac{d\,\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\,\vec{v}_2}{dt} = 0$$

Ed essendo le masse costanti è anche possibile scrivere

$$\frac{d\left(m_1\vec{v}_1\right)}{dt} + \frac{d\left(m_2\vec{v}_2\right)}{dt} = 0$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right) = 0$$

Abbiamo quindi trovato una quantità (quella in parentesi) che rimane costante nel tempo.

Il termini m**v** prende il nome di quantità di moto (di una particella o di un corpo):

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Nel SI si misura in kg m/s e *dimensionalmente* è

$$[mv] = [MLT^{-1}]$$

È una grandezza vettoriale e se un corpo si muove in una direzione qualsiasi nello spazio, la quantità di moto **p** = m**v** si può scomporre nelle componenti

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

La seconda legge della dinamica può quindi essere scritta come

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La variazione nell'unità di tempo della quantità di moto di un corpo è pari alla forza risultante agente sul corpo

Se la massa è costante, si torna quindi alla formulazione usuale:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\,\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Dall'espressione trovata precedentemente per il sistema di due corpi:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

Si vede, come detto che la quantità tra parentesi non varia con il tempo, cioè

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$\vec{p}_{tot} = cost$$

cioè

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}$$

Se la forza esterna risultante agente su un sistema è nulla (sistema isolato), la quantità di moto totale del sistema si conserva

È un *principio fondamentale* e molto importante, infatti si applica anche se alcune delle forze interne al sistema sono **non conservative**.

Inoltre si applica a tutte le sue componenti indipendentemente, quindi è:

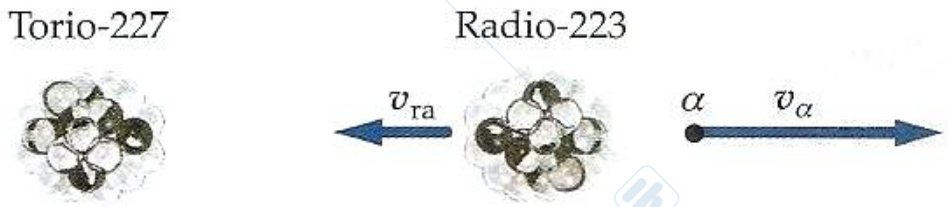
$$\sum \vec{p}_{i,x} = \sum \vec{p}_{f,x} \qquad \sum \vec{p}_{i,y} = \sum \vec{p}_{f,y} \qquad \sum \vec{p}_{i,z} = \sum \vec{p}_{f,z}$$

L'abbiamo dedotto nel caso di un sistema con 2 particelle ma è valido per un sistema contenente un numero arbitrario di particelle.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Un nucleo di torio-227 in quiete (massa 227 u) decade in un nucleo di radio-223 (massa 223 u) emettendo una particella α (massa 4 u). L'energia cinetica della particella α è di 6 MeV.
Qual è l'energia del nucleo di radio che subisce il rinculo?



Soluzione.

Per le due particelle dopo il decadimento le energie cinetiche saranno rispettivamente:

$$T_{ra} = \frac{1}{2} m_{ra} v_{ra}^2 \qquad T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

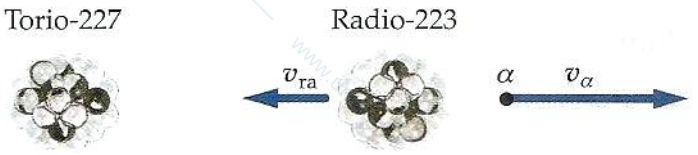
La quantità di moto del sistema prima del decadimento è zero e tale deve essere dopo il decadimento, quindi deve essere:

$$m_{ra} v_{ra} = m_\alpha v_\alpha$$

Ricavando le due velocità dalle espressioni delle energie cinetiche:

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$v_{ra} = \sqrt{\frac{2T_{ra}}{m_{ra}}} \qquad v_{\alpha} = \sqrt{\frac{2T_{\alpha}}{m_{\alpha}}}$$



$$\rightarrow \qquad m_{ra}\sqrt{\frac{2T_{ra}}{m_{ra}}} = m_{\alpha}\sqrt{\frac{2T_{\alpha}}{m_{\alpha}}}$$

$$T_{ra} = \frac{m_{\alpha}}{m_{ra}} T_{\alpha} = \frac{4\,u}{223\,u} \times 6{,}00\,MeV = 0{,}107\,MeV$$

Si vede che l'energia cinetica del nucleo di radio è molto minore di quella del nucleo α e di conseguenza anche la sua velocità, come era logico aspettarsi, avendo massa molto maggiore.

In effetti si potrebbe vedere che la massa del nucleo di torio è maggiore delle masse delle particelle α e del nucleo di radio della quantità 6,11 MeV/c^2.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Se su un corpo (che per ora è sempre un corpo *puntiforme*) agisce una forza risultante $\Sigma\mathbf{F}$, allora si ha che la sua quantità di moto varia secondo la

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \Rightarrow \quad d\vec{p} = \sum \vec{F}\, dt$$

Se la forza agisce per un tempo Δt si ha che

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F}\, dt$$

Questo integrale prende il nome di ***impulso*** **I** della forza.

È un vettore che ha le stesse dimensioni della quantità di moto

$$[\,\mathrm{I}\,] = [\mathrm{MLT}^{-1}]$$

ed è quindi *per definizione*:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F}\, dt$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Se la forza è costante diventa semplicemente

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t$$

Possiamo anche scrivere che è

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

Prende il nome di **teorema dell'impulso**, ed è *equivalente* alla seconda legge della Dinamica.

Si applica anche ad un *sistema di particelle*, per cui la forza risultante esterna agente sul sistema produce una variazione della quantità di moto totale del sistema:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F}_{est}\, dt = \Delta\vec{p}_{tot}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

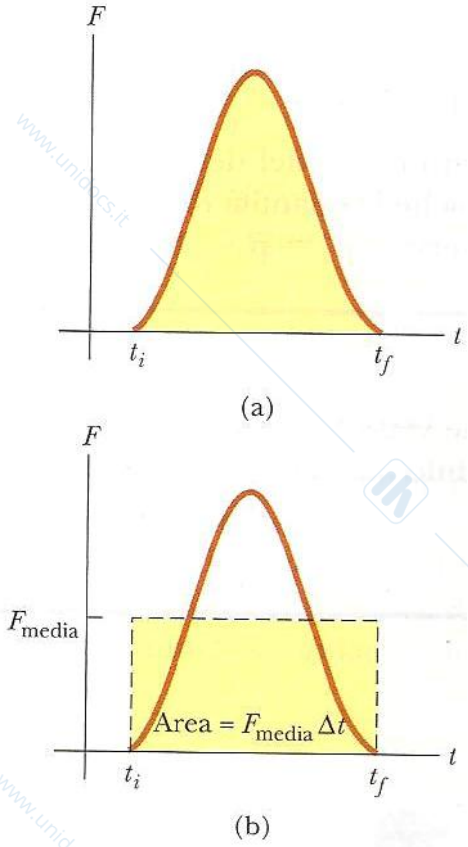
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Il modulo dell'impulso è pari all'area sottesa dalla curva della forza in funzione del tempo.

In molti casi la forza varia nel tempo, ad esempio come in figura, ed è utile definire una forza media

$$\sum \vec{F}_{media} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F}\, dt$$

$$\vec{I} = \sum \vec{F}_{media}\Delta t$$

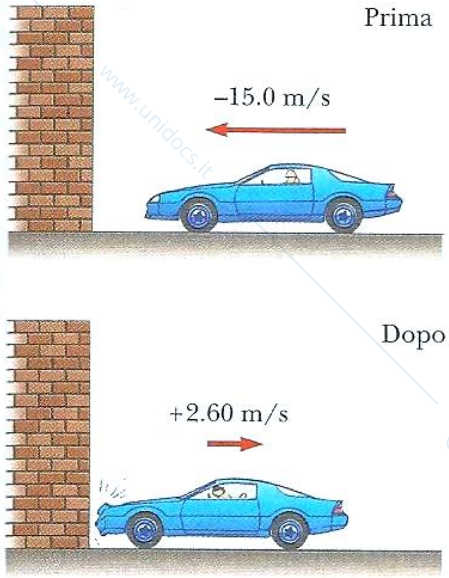


www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

ESEMPIO 8.4 Quanto buoni sono i paraurti?

In un test d'urto un'automobile di massa 1 500 kg urta un muro come nella Figura 8.6. La velocità iniziale e finale sono $\vec{\mathbf{v}}_i = -15.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s e $\vec{\mathbf{v}}_f = 2.60\hat{\mathbf{i}}$ m/s. Se la collisione dura 0.150 s trovate l'impulso dovuto alla collisione e la forza media esercitata sull'automobile.



(a)

(b)

FIGURA 8.6 (Esempio 8.4) (a) La variazione della quantità di moto dell'auto come risultato della collisione con un muro. (b) In un test d'urto, la grande forza esercitata dal muro sull'auto può provocare estesi danni alla parte anteriore dell'auto.

Soluzione Sia l'automobile il sistema. Le quantità di moto iniziale e finale dell'automobile sono

$$\vec{\mathbf{p}}_i = m\vec{\mathbf{v}}_i = (1\,500\text{ kg})(-15.0\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s})$$
$$= -2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$
$$\vec{\mathbf{p}}_f = m\vec{\mathbf{v}}_f = (1\,500\text{ kg})(2.60\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s})$$
$$= 0.390 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Quindi l'impulso è

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i$$
$$= 0.390 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s} - (-2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s})$$
$$\vec{\mathbf{I}} = 2.64 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

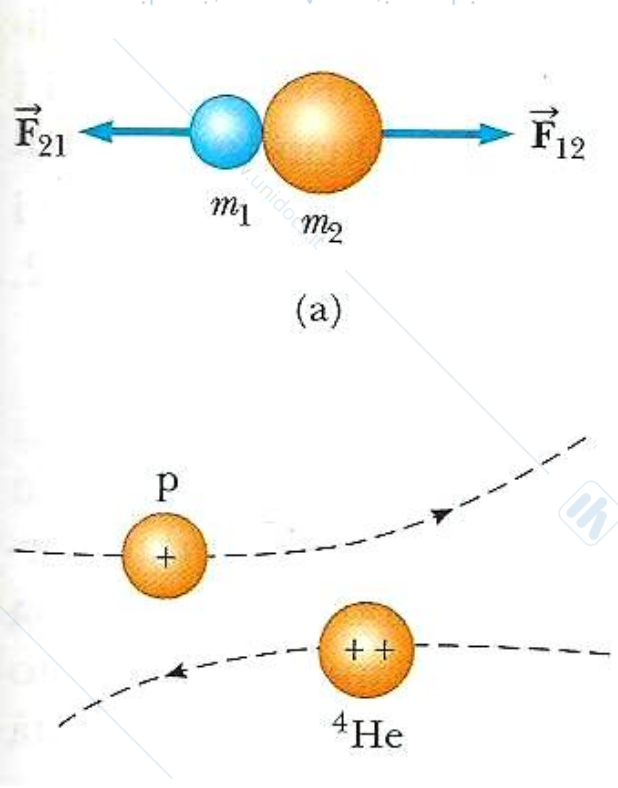
La forza media esercitata sull'automobile è

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{media}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0.150\text{ s}} = 1.76 \times 10^5\hat{\mathbf{i}}\text{ N}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Urti



Quando due particelle si urtano, vengono trattate come un *sistema isolato* e in generale le forze esterne sono trascurabili rispetto alle forze di interazione tra i due corpi.

Gli urti possono essere a contatto o a distanza.

Si parla di urto elastico se l'energia cinetica totale del sistema è la stessa prima e dopo l'urto, altrimenti si parla di urto anelastico.

L'urto ***completamente anelastico*** avviene quando i due corpi dopo l'urto assumono la stessa velocità dopo l'urto.

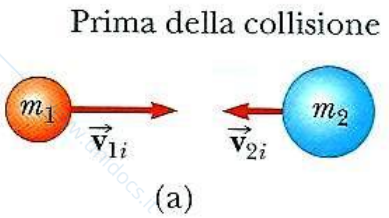
In **tutti** i casi di urto la quantità di moto si conserva, ma l'energia cinetica si conserva **solo** negli urti perfettamente elastici

Quando due particelle si urtano, vengono trattate come un *sistema isolato* e in generale le forze esterne sono trascurabili rispetto alle forze di interazione tra i due corpi.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

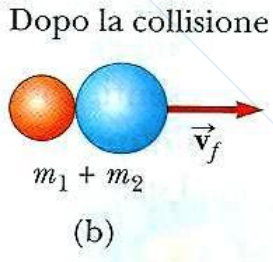
In un urto perfettamente **anelastico**, lungo una retta, due particelle si *urtano centralmente* e rimangono unite dopo l'urto, muovendosi con una *velocità comune* v_f.



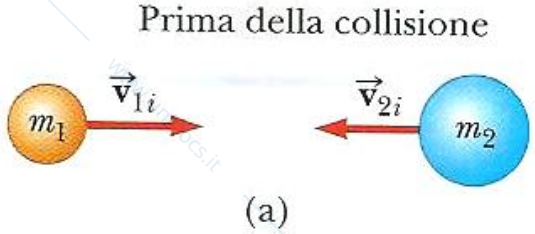
La qdm iniziale deve essere pari a quella finale (conservazione in un sistema isolato), quindi

$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$\Rightarrow \quad v_f = \frac{m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}}{m_1 + m_2}$$

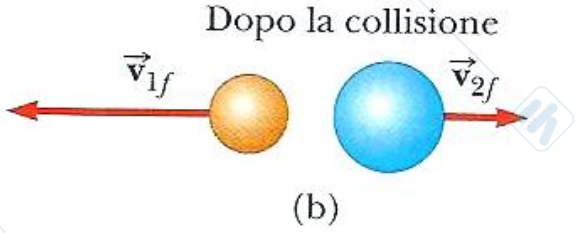


In un urto perfettamente **elastico**, lungo una retta, due particelle si *urtano centralmente*. In questo caso valgono sia la conservazione della quantità di moto che dell'energia cinetica:



$$m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2$$



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

In molti casi di urti centrali in una direzione, si devono determinare le velocità finali v_f dei due corpi dopo l'urto, conoscendo le loro velocità iniziali v_i.

In questo caso, dalla legge di conservazione dell'energia cinetica, semplificando, raccogliendo e scomponendo:

$$m_1\left(v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2\right) = m_2\left(v_{2,f}^2 - v_{2,i}^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad m_1\left(v_{1,i} - v_{1,f}\right)\left(v_{1,i} + v_{1,f}\right) = m_2\left(v_{2,f} - v_{2,i}\right)\left(v_{2,f} + v_{2,i}\right)$$

Dalla conservazione della quantità di moto si può scrivere che

$$m_1\left(v_{1,i} - v_{1,f}\right) = m_2\left(v_{2,f} - v_{2,i}\right)$$

e dividendo le due ultime espressioni:

$$v_{1,i} + v_{1,f} = v_{2,f} + v_{2,i}$$

$$\Rightarrow \quad v_{1,i} - v_{2,i} = -\left(v_{1,f} - v_{2,f}\right)$$

La velocità relativa dei due oggetti *prima* dell'urto, è uguale e di *segno opposto* alla velocità relativa dopo *l'urto*.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Se le due velocità iniziali sono note, usando l'equazione appena trovata e la conservazione della qdm si trova che

$$v_{1,f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1,i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2,i}$$

$$v_{2,f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1,i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2,i}$$

Se $m_1 = m_2$:

$$v_{1,f} = v_{2,i} \qquad e \qquad v_{2,f} = v_{1,i}$$

cioè i corpi si scambiano le velocità.

Se m_2 *inizialmente è in quiete* ($v_{2,i} = 0$)

$$v_{1,f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1,i}$$

$$v_{2,f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1,i}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Nel caso più generale, gli urti avvengono nello spazio, ossia nelle 3 dimensioni x, y, e z ed il principio di conservazione della quantità di moto implica che essa si conservi in *ciascuna delle 3 direzioni* dando luogo a 3 equazioni nelle 3 direzioni.

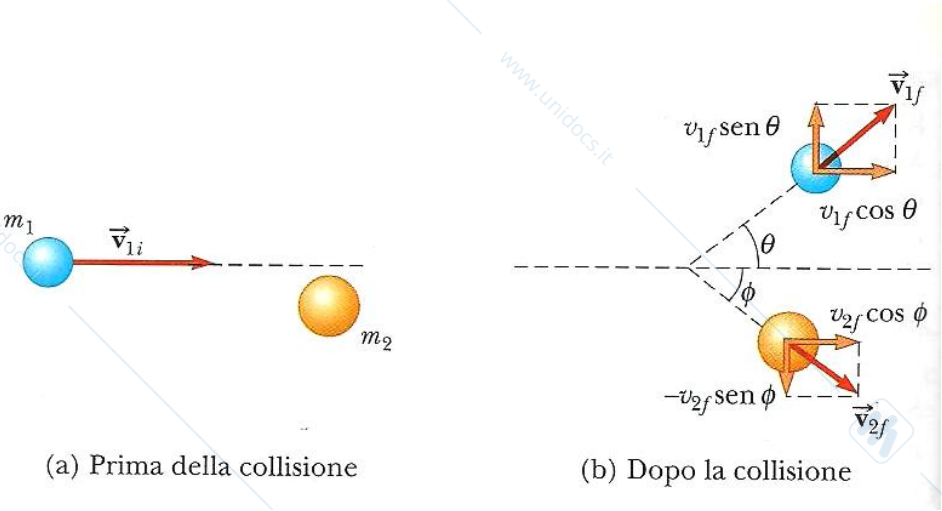
Un sottoinsieme importante è costituito dagli **urti in due dimensioni**.

Si ha quindi che

$$m_1 v_{1,ix} + m_2 v_{2,ix} = m_1 v_{1,fx} + m_2 v_{2,fx}$$

$$m_1 v_{1,iy} + m_2 v_{2,iy} = m_1 v_{1,fy} + m_2 v_{2,fy}$$

In particolare, se m_2 *inizialmente è in quiete* ($v_{2,i} = 0$) e chiamati θ e ϕ gli angoli dopo l'urto, e assumendo come direzione x quella iniziale del corpo m_1, si ha che (urto **non** centrale):



(a) Prima della collisione (b) Dopo la collisione

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Lungo x: $$m_1 v_{1,i} + 0 = m_1 v_{1,f} \cos\theta + m_2 v_{2,f} \cos\phi$$

Lungo y: $$0 + 0 = m_1 v_{1,f} \sin\theta - m_2 v_{2,f} \sin\phi$$

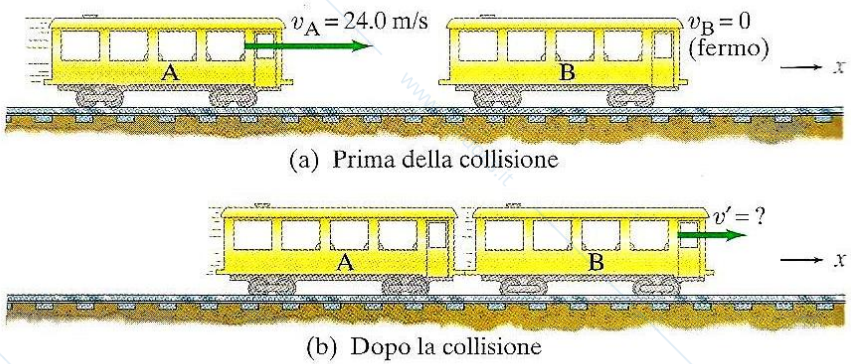
Se l'urto è elastico si può anche scrivere la conservazione dell'energia cinetica e si hanno quindi 3 equazioni e 4 incognite $v_{1,f}$, $v_{2,f}$, θ e ϕ. Misurando una delle 4 si possono determinare completamente le altre 3.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

ESEMPIO 7-3 **Vagoni ferroviari che si scontrano: conservazione della quantità di moto.** Un vagone di 10 000 kg, A, che si muove a una velocità di 24.0 m/s, colpisce un identico vagone fermo B. Se come risultato dell'urto i vagoni si agganciano, qual è la loro comune velocità dopo l'urto? (Vedi fig. 7-5).

APPROCCIO Scegliamo che il nostro sistema sia costituito dai due vagoni. Consideriamo un brevissimo intervallo di tempo, da appena prima dell'urto fino ad appena dopo, cosicché le forze esterne, come l'attrito, possano essere ignorate. Poi applichiamo la conservazione della quantità di moto.



SOLUZIONE La quantità di moto totale iniziale è

$$p_{\text{iniziale}} = m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A$$

perché il vagone B è inizialmente fermo ($v_B = 0$). La direzione è verso destra, cioè in direzione $+x$. Dopo l'urto, i due vagoni rimangono attaccati e quindi hanno la stessa velocità, chiamiamola v'. Allora la quantità di moto totale dopo l'urto sarà:

$$p_{\text{finale}} = (m_A + m_B)v'.$$

Abbiamo assunto che non ci siano forze esterne, quindi la quantità di moto si conserva:

$$p_{\text{iniziale}} = p_{\text{finale}}$$
$$m_A v_A = (m_A + m_B)v'.$$

Risolvendo per v', otteniamo

$$v' = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_A = \left(\frac{10\,000\text{ kg}}{10\,000\text{ kg} + 10\,000\text{ kg}}\right)(24.0\text{ m/s}) = 12.0\text{ m/s}.$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Un protone, con velocità iniziale $v_{1,i} = 3.5 \times 10^5$ m/s urta elasticamente un altro protone inizialmente fermo **non** centralmente, come nella figura precedente. Sapendo che l'angolo di deflessione di uno dei due protoni dopo l'urto è di 37°, determinare l'angolo ϕ del secondo protone e le due velocità finali.

$m_1 = m_2$, $\theta = 37°$, e $v_{1i} = 3.5 \times 10^5$ m/s, le Equazioni 8.26, 8.27 e 8.28 diventano

$$(1) \qquad v_{1f} \cos 37° + v_{2f} \cos \phi = 3.5 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$(2) \qquad v_{1f} \operatorname{sen} 37° - v_{2f} \operatorname{sen} \phi = 0$$

$$(3) \quad {v_{1f}}^2 + {v_{2f}}^2 = (3.5 \times 10^5 \text{ m/s})^2 = 1.2 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Riscriviamo la (1) e la (2) come segue:

$$v_{2f} \cos \phi = 3.5 \times 10^5 \text{ m/s} - v_{1f} \cos 37°$$

$$v_{2f} \operatorname{sen} \phi = v_{1f} \operatorname{sen} 37°$$

Quadrando e sommando queste due equazioni si ha:

$${v_{2f}}^2 \cos^2 \phi + {v_{2f}}^2 \operatorname{sen}^2 \phi = 1.2 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}^2 - (7.0 \times 10^5 \text{ m/s}) v_{1f} \cos 37° + {v_{1f}}^2 \cos^2 37° + {v_{1f}}^2 \operatorname{sen}^2 37°$$

$$\rightarrow \quad {v_{2f}}^2 = 1.2 \times 10^{11} - (5.6 \times 10^5) v_{1f} + {v_{1f}}^2$$

Sostituendo questa espressione nella (3),

$${v_{1f}}^2 + [1.2 \times 10^{11} - (5.6 \times 10^5) v_{1f} + {v_{1f}}^2] = 1.2 \times 10^{11}$$

$$\rightarrow \quad 2{v_{1f}}^2 - (5.6 \times 10^5) v_{1f} = (2v_{1f} - 5.6 \times 10^5) v_{1f} = 0$$

Una possibile soluzione per questa equazione è $v_{1f} = 0$, che corrisponde a un urto frontale; il primo protone si ferma e il secondo continua con la stessa velocità del primo nella stessa direzione. Questa non è la soluzione che cerchiamo. L'altra soluzione possibile è

$$2v_{1f} - 5.6 \times 10^5 = 0 \quad \rightarrow \quad v_{1f} = 2.8 \times 10^5 \text{ m/s}$$

Dalla (3),

$$v_{2f} = \sqrt{1.2 \times 10^{11} - {v_{1f}}^2} = \sqrt{1.2 \times 10^{11} - (2.8 \times 10^5)^2} = 2.1 \times 10^5 \text{ m/s}$$

e dalla (2),

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{v_{1f} \sin 37°}{v_{2f}}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{(2.8 \times 10^5) \operatorname{sen} 37°}{2.1 \times 10^5}\right) = 53°$$

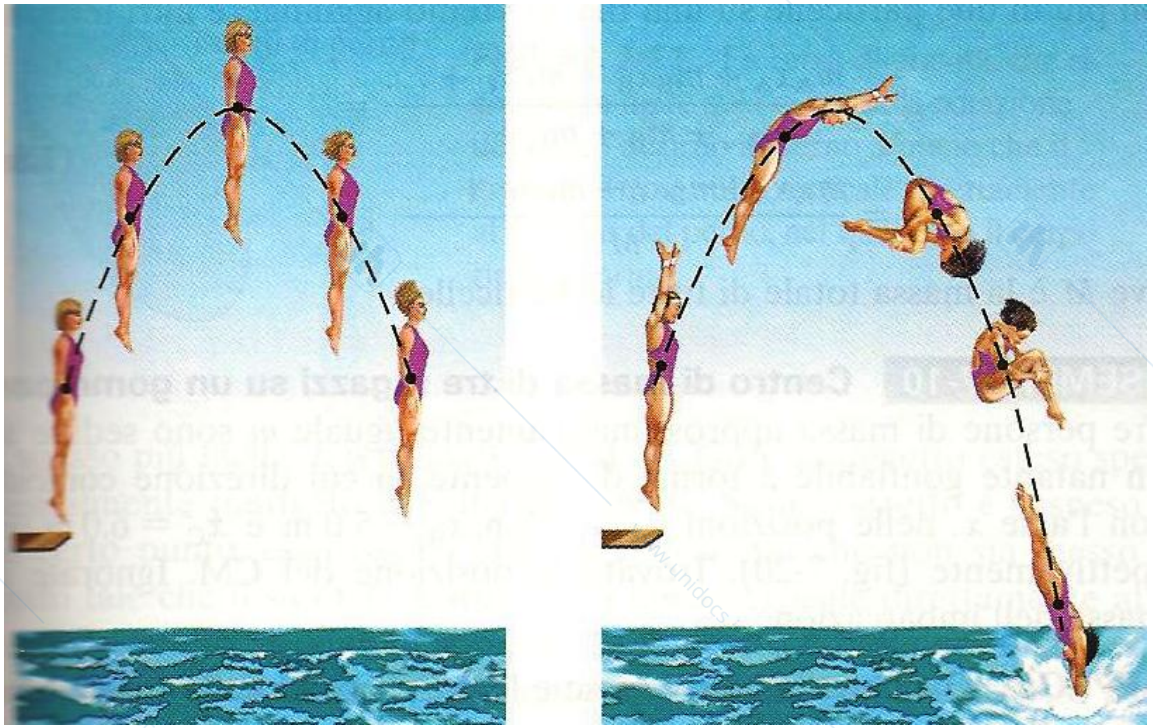
È interessante notare che $\theta + \phi = 90°$. Questo risultato *non* è casuale. Ogni volta che due particelle di massa uguale si urtano elasticamente in modo radente ed una delle particelle è inizialmente in quiete, le velocità finali delle particelle formano sempre un angolo retto.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Fino ad ora solo corpi puntiformi. In effetti i corpi reali **non** sono puntiformi ed il loro moto è più complicato di quanto visto.

In generale il moto di un corpo reale è dato da un moto traslatorio più un moto rotatorio, solo in casi particolari è solo traslatorio o solo rotatorio.



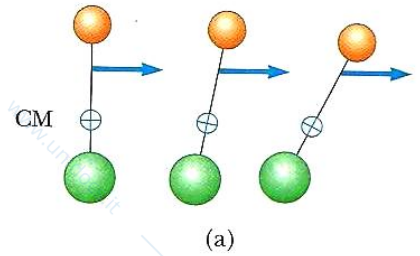
Esiste però un punto di un corpo che si muove come si muoverebbe una particelle puntiforme soggetta alla stessa forza risultante.
Prende il nome di ***centro di massa*** (**CM**).

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

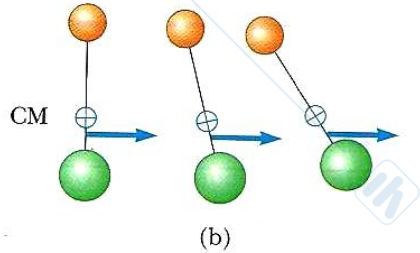
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

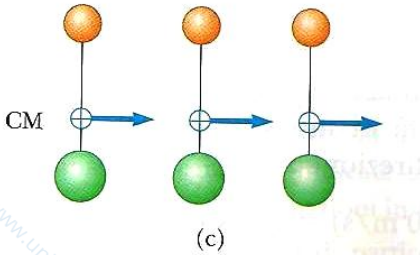
Ad esempio, sia data una coppia di particelle come in figura, collegate tramite una sbarretta rigida indeformabile di massa trascurabile, e con

$$m_1 \neq m_2$$



A seconda di dove si applica una forza esterna alla barretta, il sistema si muoverà di moto traslatorio ***più*** un moto rotatorio (orario o antiorario), ma se si applica la forza nel CM, il moto sarà puramente traslatorio!

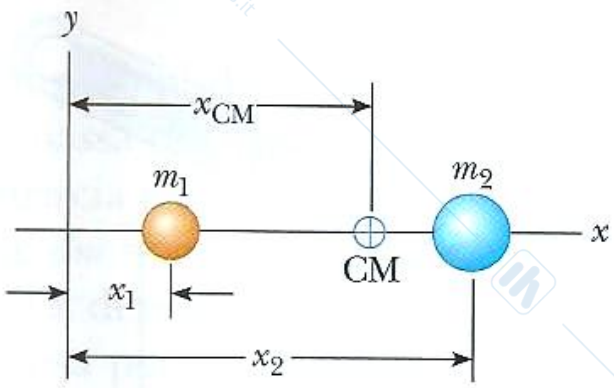




Il sistema si comporta cioè come se fosse puntiforme con tutta la sua massa ***concentrata*** nel CM.

La *coordinata* x del centro di massa della coppia di particelle è data da:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Per un sistema tridimensionale, di massa totale M, costituito da *n particelle*, si ha che

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}$$

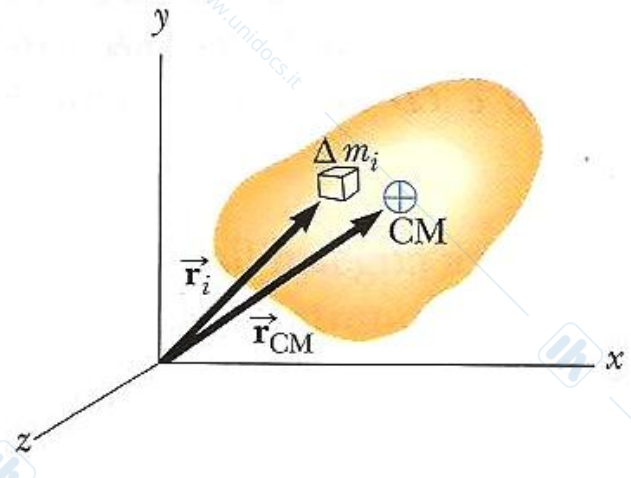
e

$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

In *forma vettoriale*:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

Un corpo esteso può essere interpretato come un sistema contenente un enorme numero di elementi di massa Δm_i e coordinate x_i, y_i, z_i.



Quindi

$$x_{CM} \approx \frac{\sum_i m_i x_i}{M}$$

e analoghe per y_{CM} e z_{CM}.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Se si assume che il numero di elementi tenda ad infinito, si ha che:

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i \Delta m_i x_i}{M} = \frac{1}{M}\int x dm$$

e

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y dm \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z dm$$

In *forma vettoriale*:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r} dm$$

Il centro di massa di un corpo omogeneo e simmetrico si deve trovare su un asse di simmetria.

Il centro di massa di un sistema coincide con il centro di gravità (o ***baricentro***) del sistema se esso è soggetto ad un campo gravitazionale costante.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Si può determinare l'accelerazione del **CM** di un sistema dalla

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\,\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\,\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \quad M\,\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

Per il terzo principio della dinamica, le forze interne tra le particelle si annullano, quindi la forza risultante sul sistema è dovuta solo alle forze esterne

$$\Rightarrow \quad \sum_i \vec{F}_{est} = M\,\vec{a}_{CM} = \frac{d\,\vec{p}_{tot}}{dt}$$

Se la **risultante delle forze esterne è nulla**, allora

$$\frac{d\,\vec{p}_{tot}}{dt} = M\,\vec{a}_{CM} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_{tot} = M\,\vec{v}_{CM} = cost$$

In un sistema isolato (risultante delle forze esterne = 0) la quantità di moto totale si conserva.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari