Esercitazioni N.4

1. Un punto materiale si muove nel piano (x, y) secondo la legge oraria:

$$\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2bt \end{cases}$$

Ricavare l'equazione della traiettoria, l'accelerazione tangenziale, quella normale, ed il raggio di curvatura in funzione del tempo.

$$[\, x = \frac{a}{4b^2} y^2;\ \vec{a}_T = \frac{2a^2 t}{a^2t^2 + b^2}\left(a t \hat{u}_x + b \hat{u}_y\right);\ \vec{a}_N = \frac{2ab}{a^2t^2+b^2}\left(b\hat{u}_x - a t \hat{u}_y\right)\ \rho = \frac{v^2}{a_N}\ ]$$

2. Un proiettile viene lanciato da terra con velocità iniziale v_0 inclinata di un angolo ϑ_0 rispetto alla direzione orizzontale, ed è soggetto all'accelerazione g diretta verso il basso, per effetto del campo gravitazionale. Calcolare la gittata del proiettile in funzione di $|v_0|$ e di ϑ_0. Fissata la velocità scalare v_0, per quale valore di ϑ_0 la gittata è massima?

$$[\, \Delta x = 2 \sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0 \frac{v_0^2}{g} = \sin(2\vartheta_0)\frac{v_0^2}{g};\ \vartheta_0 = 45°;\ \Delta x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\ ]$$

3. Un cannone viene puntato su un bersaglio che è posto in cima ad una torre di altezza *h*, posta ad una distanza *a* dal cannone. All'istante dello sparo, il bersaglio viene lasciato cadere dalla torre. Mostrare che, purché la gittata del cannone non sia inferiore ad *a*, il proiettile colpisce il bersaglio.

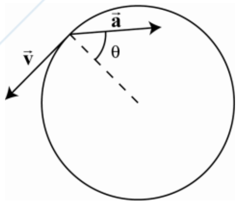
4. Un punto si muove lungo una circonferenza con legge oraria $s(t) = k_1 t^3 + k_2 t^2$, con $k_1 = 1$ m/s^3 e $k_2 = 2$ m/s^2. Se al tempo *t*=2 s l'accelerazione è $a = 16\sqrt{2}$ m/s^2, calcolare il raggio *R* della circonferenza.

[*R*=25 m]

5. Un ciclista percorre una pista circolare di raggio *R = 150 m* partendo da fermo con accelerazione tangenziale costante di valore a_t, fino all'istante t_1, poi continua con la velocità scalare v_1, raggiunta, riuscendo dopo un tempo *T = 2 min* a compiere un altro giro. Sapendo che al tempo t_1 l'angolo formato dal vettore accelerazione col vettore velocità vale $\vartheta(t_1) = 45°$, determinare:
   a. la velocità v_1;
   b. il valore dell'accelerazione tangenziale a_t;
   c. il tempo t_1;
   d. lo spazio s_1 percorso fino al tempo t_1;
   e. l'angolo $\vartheta(t)$ formato fra l'accelerazione e la velocità al variare del tempo.

$$[\, v_1 = \frac{2pR}{T} @ 7.85\frac{m}{s}; a_t = \frac{v_1^2}{R} @ 0.41\frac{m}{s^2}; t_1 = \frac{v_1}{a_t} @ 19.1\, s;\ s_1 = \frac{1}{2}a_t t_1^2 = 75\, m;\ J(t) = \arctan\left(\frac{t^2}{t_1^2}\right), t < t_1 = \frac{T}{2p}\ ]$$

6. Ad un certo istante di tempo, una particella che si muove in verso antiorario su una circonferenza di raggio *r=2m* possiede una velocità di *v=8m/s* e la sua accelerazione totale è diretta come mostrato in figura con *θ=30°*. In tale istante si determinino:



   a. l'accelerazione centripeta della particella;
   b. l'accelerazione tangenziale;
   c. il modulo dell'accelerazione totale.

[$a_N = v^2/R = 32 m/s^2$; $a = a_N / \cos(\theta) = 36.45 m/s^2$; $a_T = -a\,sen(\theta) = 18.47 m/s^2$]