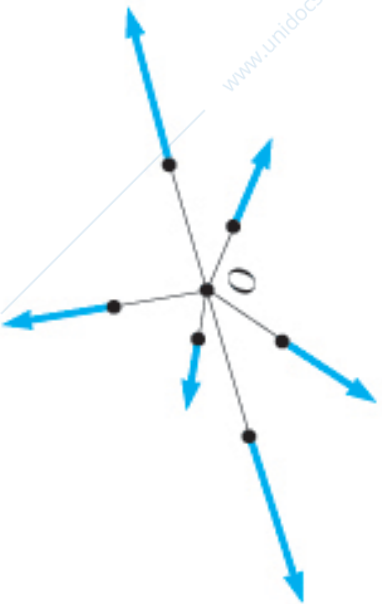


# GRAVITAZIONE ed ELETTROSTATICA

## 1. FORZE CENTRALI

Si definisce forza centrale una forza agente in una certa regione dello spazio per cui:

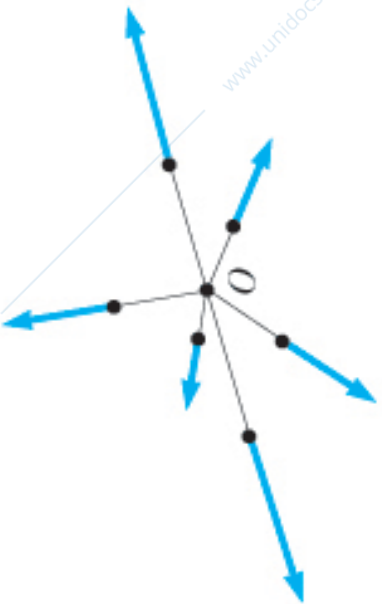
- 1) in qualsiasi punto  $P(x,y,z)$  la sua direzione passa sempre per un punto fisso  $O$ , detto centro della forza,



## 1. FORZE CENTRALI

Si definisce forza centrale una forza agente in una certa regione dello spazio per cui:

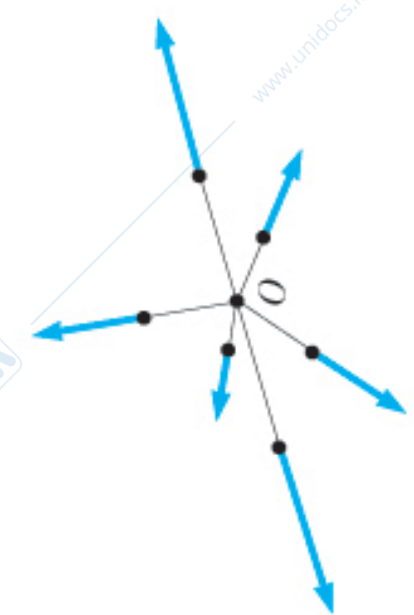
- 1) in qualsiasi punto  $P(x,y,z)$  la sua direzione passa sempre per un punto fisso  $O$ , detto centro della forza,
- 2) il modulo risulta funzione solo della distanza  $r$  dal centro della forza



# 1. FORZE CENTRALI

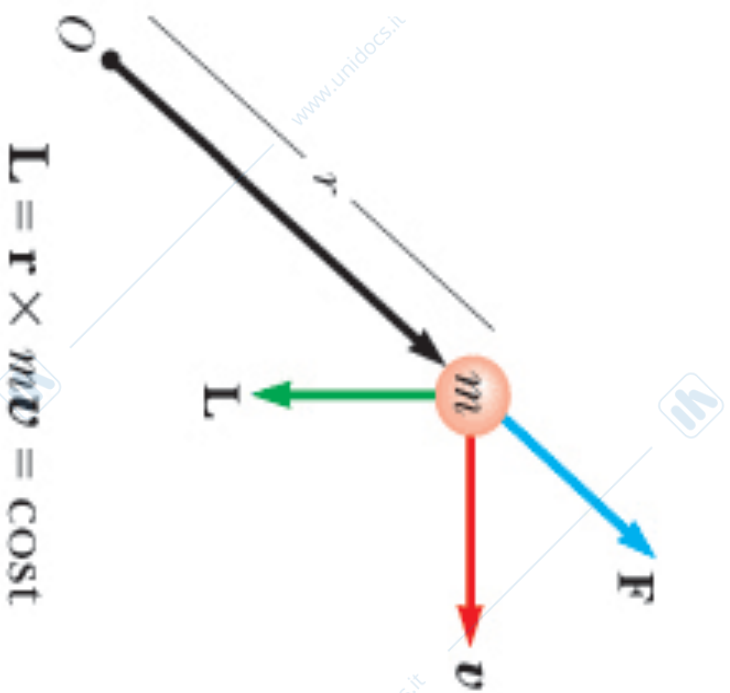
Si definisce forza centrale una forza agente in una certa regione dello spazio per cui:

- 1) in qualsiasi punto  $P(x,y,z)$  la sua direzione passa sempre per un punto fisso  $O$ , detto centro della forza,
- 2) il modulo risulta funzione solo della distanza  $r$  dal centro della forza
- 3)  $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$



( $\vec{u}_r$  vettore radiale uscente dal centro della forza)

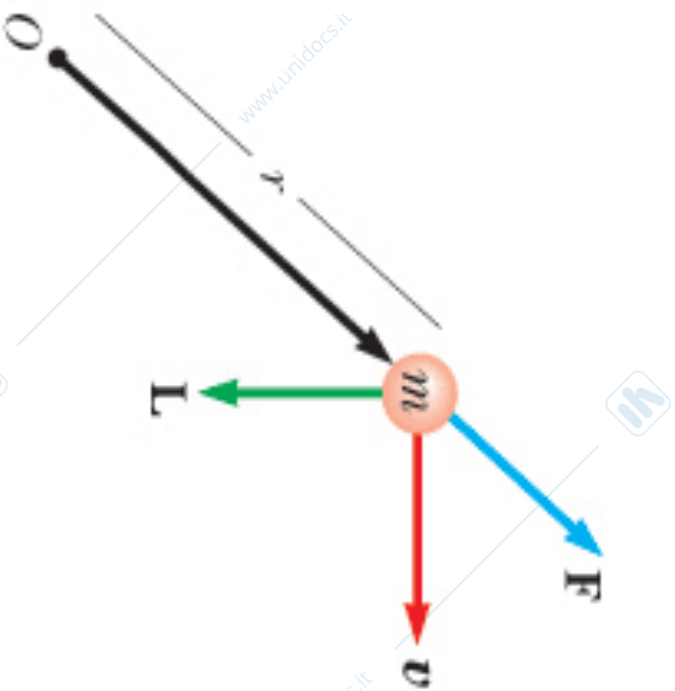
- a)  $F(r) > 0$  se la forza è repulsiva
- b)  $F(r) < 0$  se la forza è attrattiva



4) Se applichiamo il Teorema del momento angolare al moto di un punto materiale soggetto alla forza centrale  $\vec{F}(r)$ , prendendo come polo fisso in un sistema di riferimento inerziale il centro di forza O si ha:

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = r\vec{u}_r \times F(r)\vec{u}_r = 0$$

ossia per le forze centrali il momento della forza rispetto al centro di forza O è ovunque nullo



$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{cost}$$

4) Se applichiamo il Teorema del momento angolare al

moto di un punto materiale soggetto alla forza centrale  $\vec{F}(r)$ , prendendo come polo fisso in un sistema di riferimento inerziale il centro di forza O si ha:

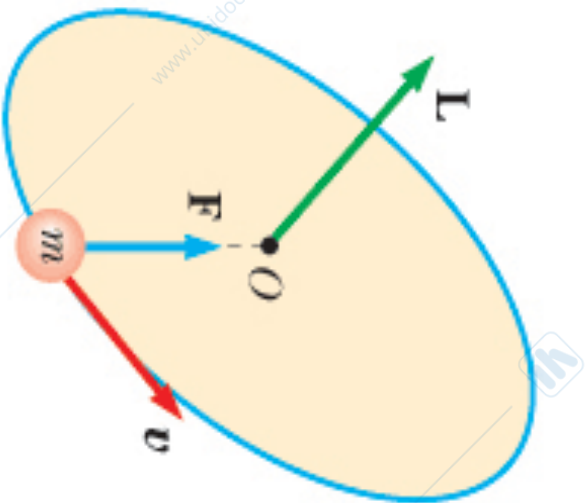
$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = r\vec{u}_r \times F(r)\vec{u}_r = 0$$

ossia per le forze centrali il momento della forza rispetto al centro di forza O è ovunque nullo

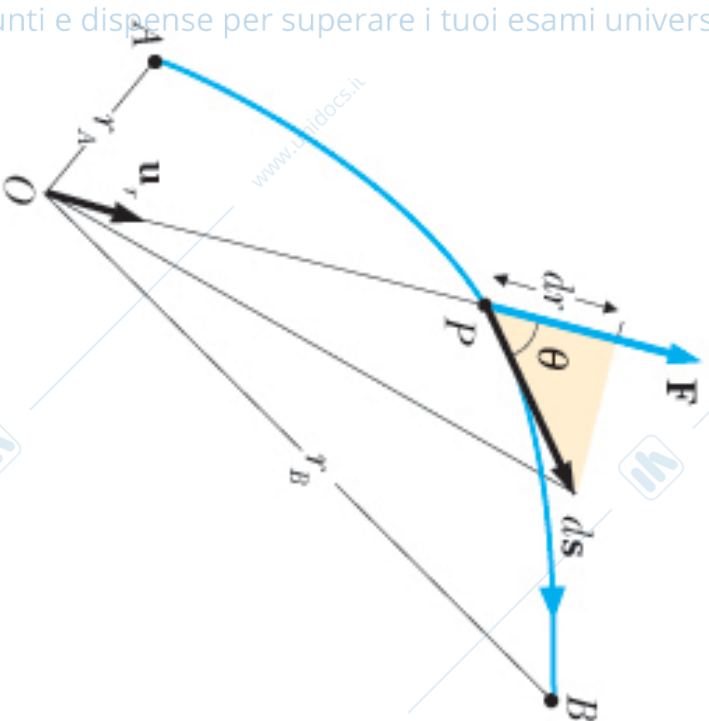
5) come conseguenza:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{costante (in direzione, verso e modulo)}$$

ossia per le forze centrali il momento angolare rispetto al centro di forza O si conserva



- 6) per definizione il momento angolare  $\vec{L}_o$  è sempre ortogonale al piano contenente  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$ : se  $\vec{L}_o$  è costante, in particolare in direzione, tale piano è fisso nel tempo, cioè  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  devono stare sempre nello stesso piano, inoltre la costanza in verso di  $\vec{L}_o$  fissa un verso di percorrenza sulla traiettoria



$$dW = F(r) \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{s} = F(r) dr$$

### 7) le forze centrali sono conservative

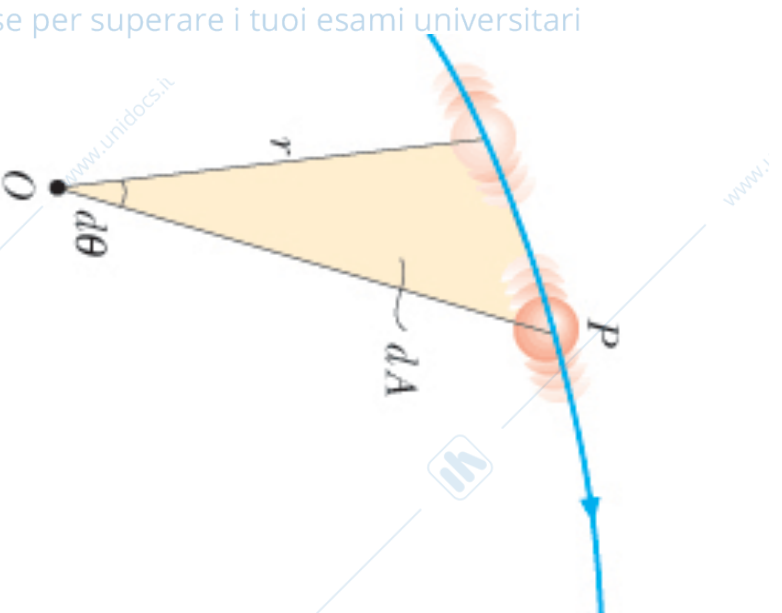
infatti  $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$ , e il lavoro di tale forza è:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r)\vec{u}_r \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r) ds \cos \vartheta = \int_A^B F(r) dr$$

dove  $dr$  è la variazione del modulo di  $\vec{r}$  durante lo spostamento  $d\vec{s}$ , quindi

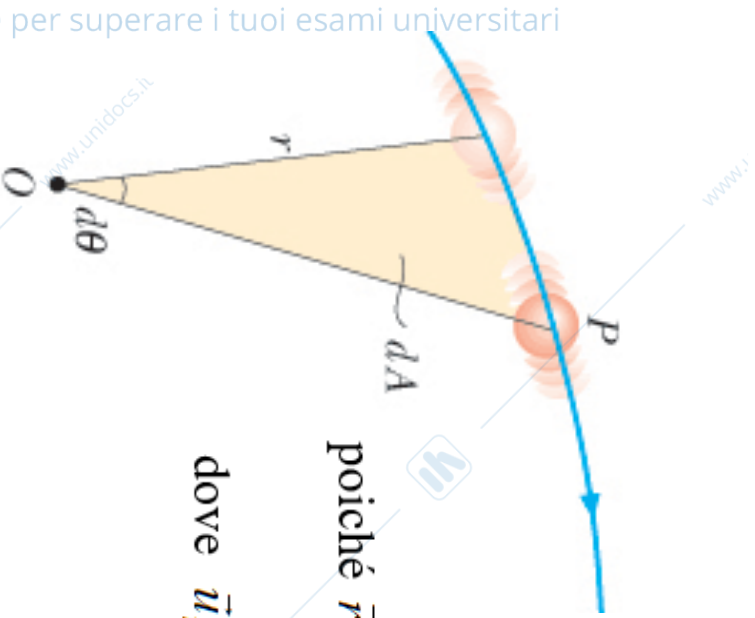
$$W = \int_A^B F(r) dr = f(r_B) - f(r_A)$$

ossia il lavoro è dato dalla variazione di una funzione  $f$  della sole coordinate di A e B, condizione perché la forza sia conservativa, ovviamente la funzione  $f$  risulta l'opposto dell'energia potenziale



- 8) la traiettoria di un punto P che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano fisso passante per il centro di forza O ed è percorsa in modo tale che la velocità areale  $dA/dt$  (rapidità con cui viene spazzata l'area dal vettore  $\vec{r}$ ) rimanga costante

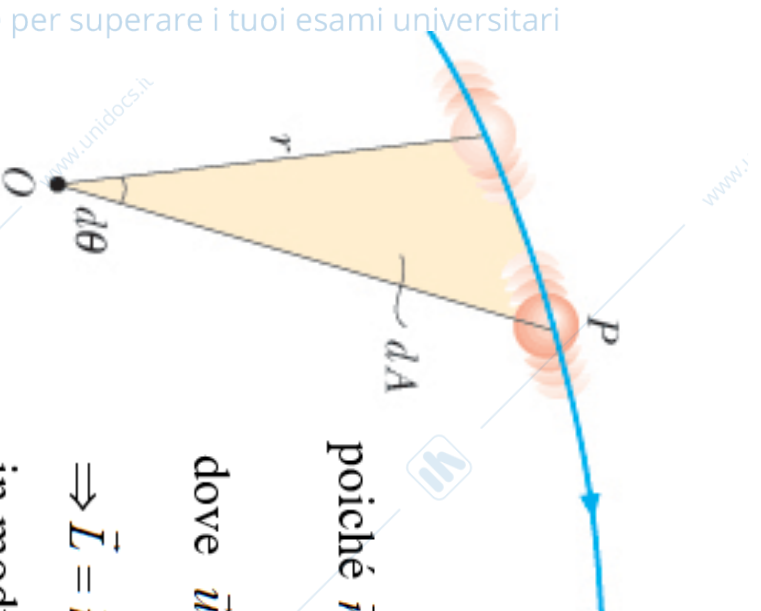
In particolare 
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{costante}$$



$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{costante}$$

poiché  $\vec{r} = r \cdot \vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$ ,

dove  $\vec{u}_r \perp \vec{u}_\theta$  e  $\frac{d\theta}{dt}$  misura la velocità di variazione della direzione del versore  $\vec{u}_r$



$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{costante}$$

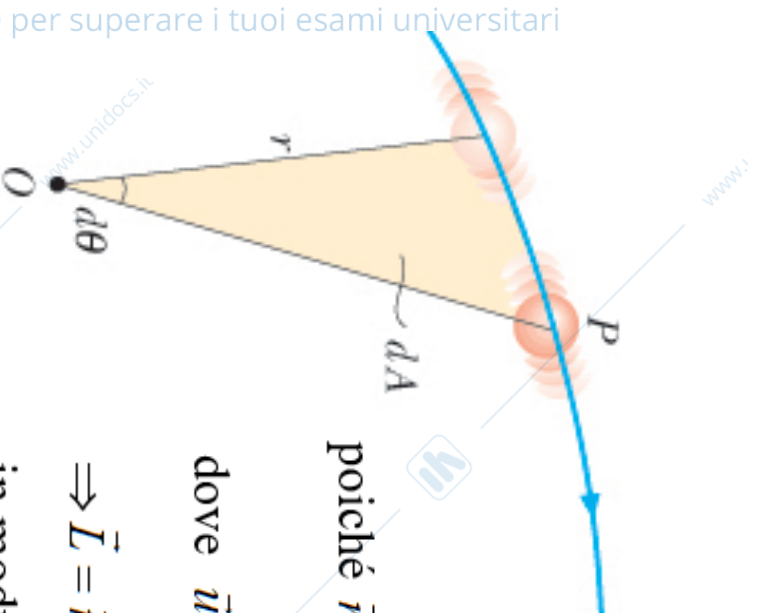
poiché  $\vec{r} = r \cdot \vec{u}_r$ ,  $\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vartheta}{dt} \vec{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$ ,

dove  $\vec{u}_r \perp \vec{u}_\theta$  e  $\frac{d\vartheta}{dt}$  misura la velocità di variazione della direzione del versore  $\vec{u}_r$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta, \text{ in quanto } \vec{r} \text{ e } \vec{v}_r \text{ sono tra loro paralleli,}$$

in modulo  $L = mrv_\theta$ , in quanto  $\vec{r}$  e  $\vec{v}_\theta$  sono tra loro perpendicolari,

$$L = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante} \Rightarrow \text{essendo } m \text{ costante allora } r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante.}$$



$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{costante}$$

poiché  $\vec{r} = r \cdot \vec{u}_r$ ,  $\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$ ,

dove  $\vec{u}_r \perp \vec{u}_\theta$  e  $\frac{d\theta}{dt}$  misura la velocità di variazione della direzione del versore  $\vec{u}_r$

$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta$ , in quanto  $\vec{r}$  e  $\vec{v}_r$  sono tra loro paralleli, in modulo  $L = mr v_\theta$ , in quanto  $\vec{r}$  e  $\vec{v}_\theta$  sono tra loro perpendicolari,

$$L = mr v_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante} \Rightarrow \text{essendo } m \text{ costante allora } r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante.}$$

In un tempo  $dt$  il raggio vettore  $r$  congiungente il centro di forza O e il punto P “spazza” l’area infinitesima  $dA$  che può essere approssimata a quella di un triangolo di base  $r d\theta$  e altezza  $r$

$$\Rightarrow dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{L}{2m} dt \quad \text{da cui} \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{costante}$$

9) classici esempi di forze centrali sono:

a) la **forza gravitazionale**

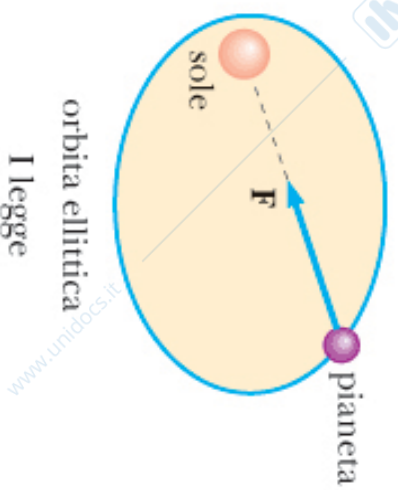
b) la **forza elettrostatica**

## 2. FORZA GRAVITAZIONALE

A – *Le tre Leggi di Keplero (1600-1620)* danno una descrizione cinematica del moto dei pianeti:

1) Prima legge:

I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse



## 2. FORZA GRAVITAZIONALE

A – *Le tre Leggi di Keplero (1600-1620)* danno una descrizione cinematica del moto dei pianeti:

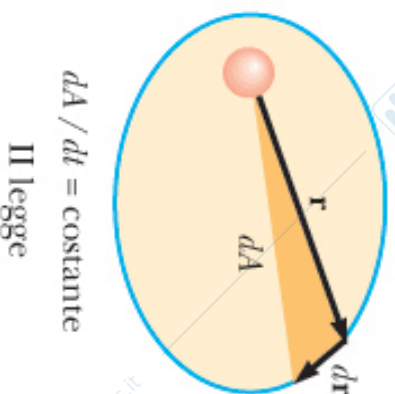
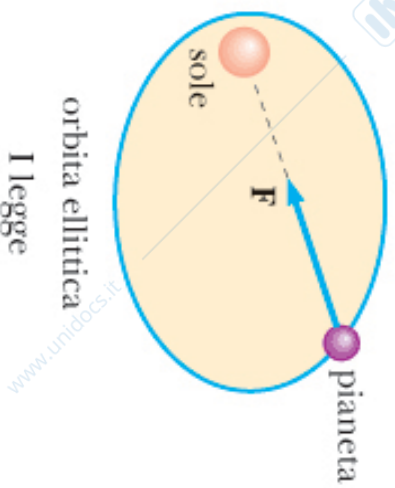
1) Prima legge:

I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse

2) Seconda legge:

La velocità areale  $\frac{dA}{dt}$ , con cui il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta descrive

l'orbita, è costante (il raggio vettore percorre aree uguali in tempi uguali)



## 2. FORZA GRAVITAZIONALE

A – *Le tre Leggi di Keplero (1600-1620)* danno una descrizione cinematica del moto dei pianeti:

1) Prima legge:

I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse

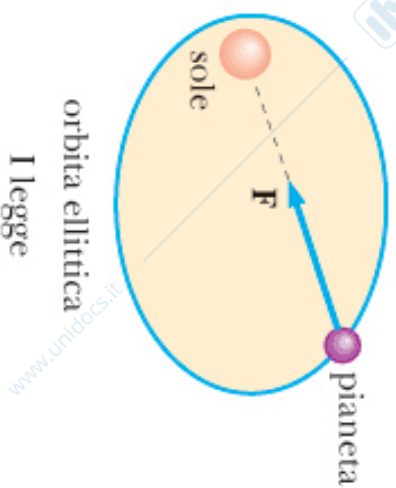
2) Seconda legge:

La velocità areale  $\frac{dA}{dt}$ , con cui il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta descrive

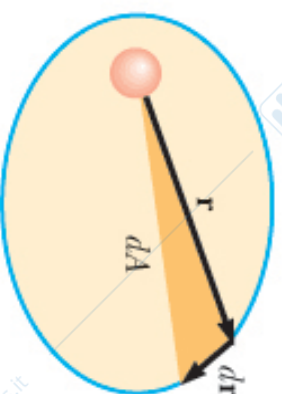
l'orbita, è costante (il raggio vettore percorre aree uguali in tempi uguali)

3) Terza legge:

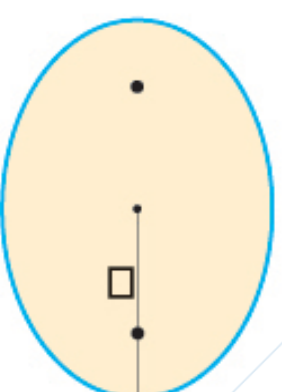
Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse:  $T^2 = ka^3$



orbita ellittica  
I legge



$dA / dt = \text{costante}$   
II legge



$T^2 = ka^3$   
III legge

## B – Spiegazione dinamica di Newton (1666-1687): la Teoria della gravitazione universale

Partendo dalla tre Leggi di Keplero, ipotizziamo che l'orbita di un pianeta attorno al sole sia approssimabile con un'orbita circolare:

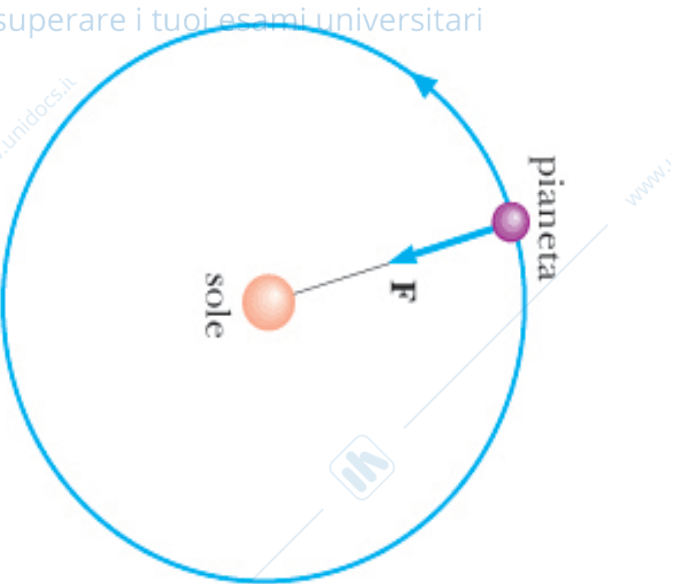
1) dalla II legge di Keplero la velocità areale  $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt}$  è costante e

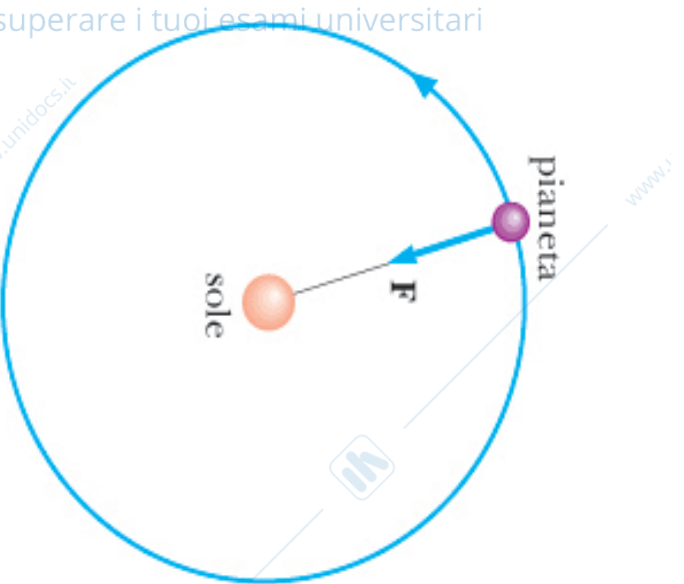
2) abbiamo ipotizzato l'orbita come circolare  $\Rightarrow r$  costante

$\Downarrow$

di conseguenza anche la velocità angolare  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  deve essere costante.

La forza  $\vec{F}$  che agisce sul pianeta per mantenerlo nell'orbita circolare a velocità angolare  $\omega$  costante ( $\Rightarrow$  accelerazione angolare  $\alpha = 0$  e accelerazione tangenziale  $a_t = \alpha \cdot r = 0$ ) deve essere centripeta, diretta lungo la congiungente terra-sole:





La forza  $\vec{F}$  che agisce sul pianeta per mantenerlo nell'orbita circolare a velocità angolare  $\omega$  costante ( $\Rightarrow$  accelerazione angolare  $\alpha = 0$  e accelerazione tangenziale  $a_t = \alpha \cdot r = 0$ ) deve essere centripeta, diretta lungo la congiungente terra-sole:

$$F = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot r \quad (\text{in modulo})$$

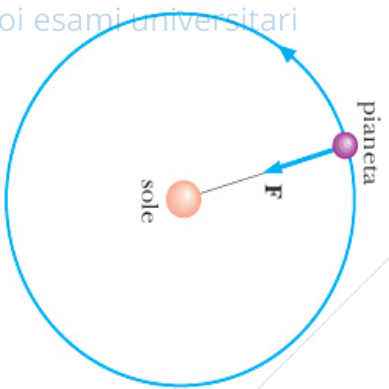
dove  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  è il periodo di rivoluzione ( $\rightarrow$  tempo relativo ad un giro completo del pianeta attorno

al sole) e, per la III legge di Keplero applicata ad un'orbita circolare  $\Rightarrow T^2 = kr^3$

$\Downarrow$

$$F = m \omega^2 r = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot r = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2} \quad (\text{in modulo})$$

ossia la forza esercitata dal sole sul pianeta, nell'approssimazione di orbita circolare, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole.



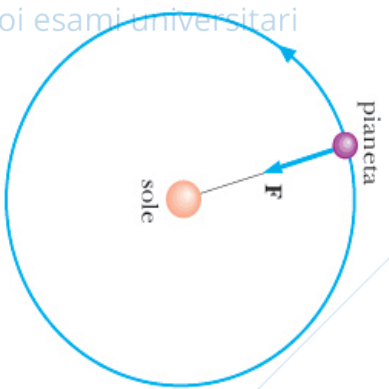
### Determinazione del valore del parametro $k$ .

Consideriamo il sistema sole-terra e la forza  $\vec{F}_{S,T}$  esercitata dal sole sulla terra:

$$F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{k_T} \frac{m_T}{r^2} \quad (\text{in modulo})$$

per il principio di azione e reazione (III legge della dinamica di Newton), allora la terra eserciterà una forza  $\vec{F}_{T,S}$  uguale e contraria a  $\vec{F}_{S,T}$

$$F_{T,S} = \frac{4\pi^2}{k_S} \frac{m_S}{r^2} = F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{k_T} \frac{m_T}{r^2} \quad (\text{in modulo})$$



### Determinazione del valore del parametro $k$ .

Consideriamo il sistema sole-terra e la forza  $\vec{F}_{S,T}$  esercitata dal sole sulla terra:

$$F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{k_T} \frac{m_T}{r^2} \quad (\text{in modulo})$$

per il principio di azione e reazione (III legge della dinamica di Newton), allora la terra eserciterà una forza  $\vec{F}_{T,S}$  uguale e contraria a  $\vec{F}_{S,T}$

$$F_{T,S} = \frac{4\pi^2}{k_S} \frac{m_S}{r^2} = F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{k_T} \frac{m_T}{r^2} \quad (\text{in modulo})$$

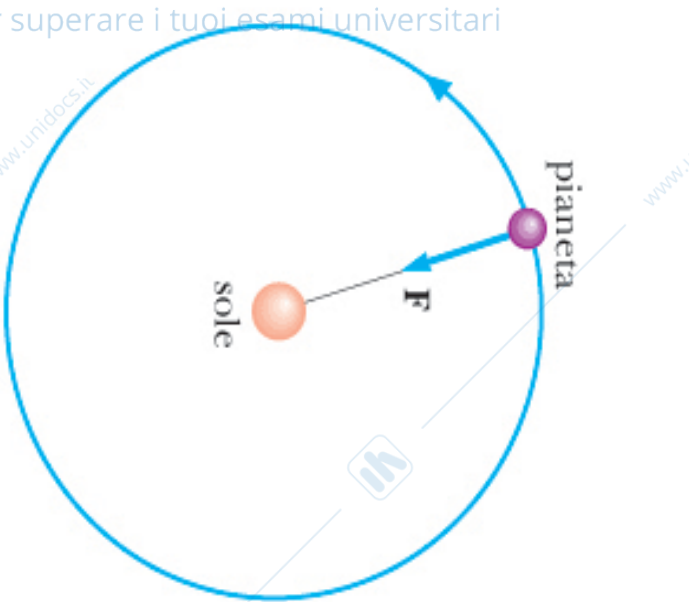
da cui  $\frac{m_S}{k_S} = \frac{m_T}{k_T}$  e  $m_S k_T = m_T k_S$

definiamo ora la costante  $\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T k_S} = \frac{4\pi^2}{m_S k_T}$

per cui il modulo della forza di interazione terra sole risulta:

$$F_{T,S} = F_{S,T} = F = \gamma \frac{m_S m_T}{r^2}$$

e la direzione risulta quella della congiungente il sole alla terra

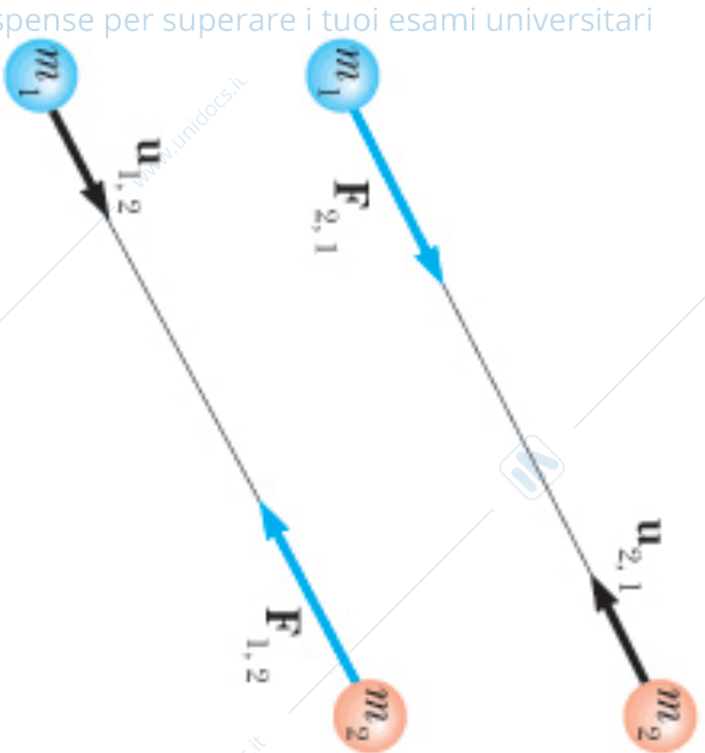


$$F_{T,S} = F_{S,T} = F = \gamma \frac{m_S m_T}{r^2}$$

e la direzione risulta quella della congiungente il sole alla terra

Generalizzando tale risultato Newton enunciò la legge di gravitazione universale:

date due masse qualsiasi  $m_1$  e  $m_2$  di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza  $r$  tra di loro, tra di esse si stabilisce una forza di interazione attrattiva diretta lungo la retta congiungente le due masse, il cui modulo è proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.



dal punto di vista vettoriale abbiamo:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

$$\vec{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1,2} \quad ; \quad \vec{F}_{2,1} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{2,1}$$

La costante di proporzionalità  $\gamma$  è una costante universale caratteristica dell'interazione gravitazionale il cui valore non dipende dai valori delle masse e dalla geometria del sistema.

La misura diretta di  $\gamma$  venne effettuata per la prima volta da Cavendish nel 1798 utilizzando una bilancia di torsione per misurare la forza di attrazione tra due masse sferiche.

Misure più recenti hanno portato alla valutazione di  $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$



La prima verifica della legge di Newton è stata quella di confrontare la legge di gravitazione universale con la legge di gravità  $\vec{F} = m\vec{g}$  valida sulla superficie terrestre, ossia la legge di gravitazione universale deve valere anche per un corpo  $m$  posto sulla superficie della terra, approssimabile ad un corpo sferico di massa  $M_T$  e raggio  $r_T$ .

Il problema che Newton ha dovuto risolvere per questa verifica e che ha causato il forte ritardo nella pubblicazione della legge di gravitazione universale è stato quello di dimostrare che un corpo a simmetria sferica eserciti una forza gravitazionale come se la massa fosse tutta concentrata nel suo centro.

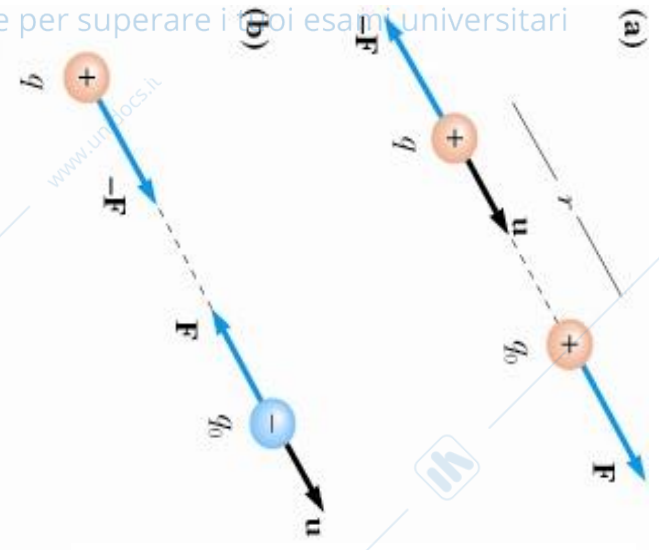
Noi dimostreremo tale affermazione più avanti utilizzando il Teorema di Gauss.

$$F = \gamma \frac{mM_T}{r_T^2} = mg$$

da cui  $g = \gamma \frac{M_T}{r_T^2} = 9.81 \text{ ms}^{-2}$

### **3. LEGGE di COULOMB – FORZA di COULOMB**

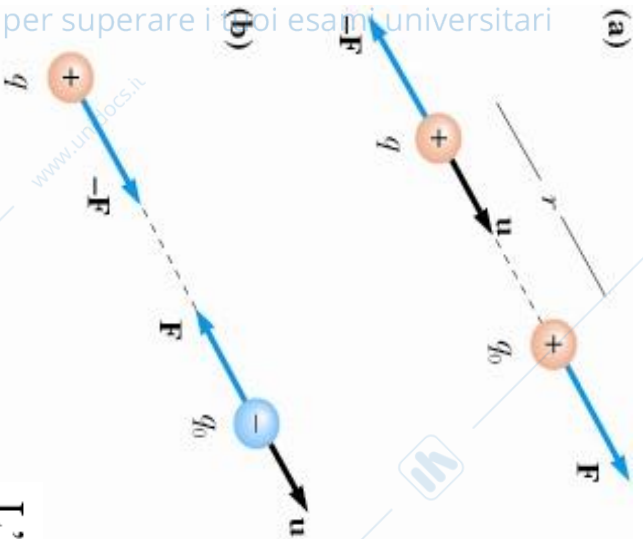
Un'altra interazione fondamentale che gioca un ruolo essenziale nella costituzione della materia è quella elettromagnetica, le cui leggi vennero formulate in modo quantitativo tra la fine del settecento e la metà dell'ottocento. Un aspetto particolare dell'interazione elettromagnetica è la forza elettrica. Nel seguito considereremo solamente il caso elettrostatico rimandando al corso di Fisica II la parte di elettromagnetismo.



Consideriamo due cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$  poste a distanza  $r$  tra loro, esse interagiscono tra di loro attraverso una forza centrale  $\vec{F}$ , diretta secondo la loro congiungente e di modulo

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

direttamente proporzionale al prodotto delle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le due cariche.



Consideriamo due cariche puntiformi  $q_1$  e  $q_2$  poste a distanza  $r$  tra loro, esse interagiscono tra di loro attraverso una forza centrale  $\vec{F}$ , diretta secondo la loro congiungente e di modulo

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

direttamente proporzionale al prodotto delle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra le due cariche.

L'unità di misura della carica è il coulomb, simbolo C, ed il valore della carica elementare,  $e$ , risulta  $e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , in particolare la carica dell'elettrone è negativa ed uguale  $-e$  e la carica del protone è positiva ed uguale ad  $e$ .

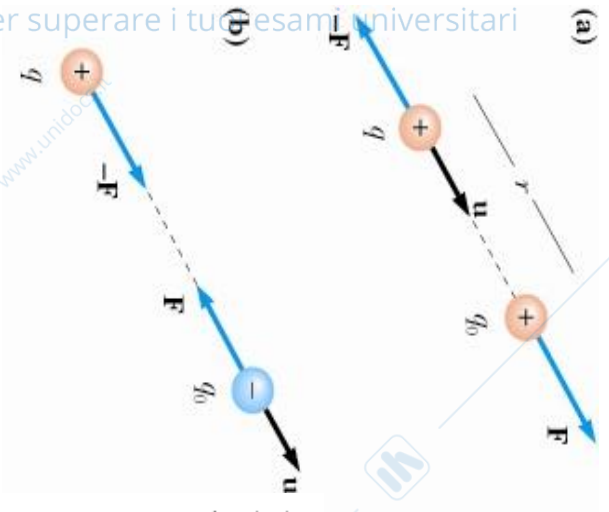
La costante di proporzionalità  $k$  è definita come:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

dove

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

è la costante dielettrica del vuoto.



La legge di Coulomb che si stabilisce tra due cariche  $q_1$  e  $q_2$  distanti  $r$  in termini vettoriali risulta:

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{n}_{1,2}$$

dove la forza è quella che  $q_1$  esercita su  $q_2$  e dove  $\vec{n}_{1,2}$  è il versore diretto da  $q_1$  a  $q_2$  (uscente da  $q_1$ ) lungo la congiungente le due cariche.

In particolare se:

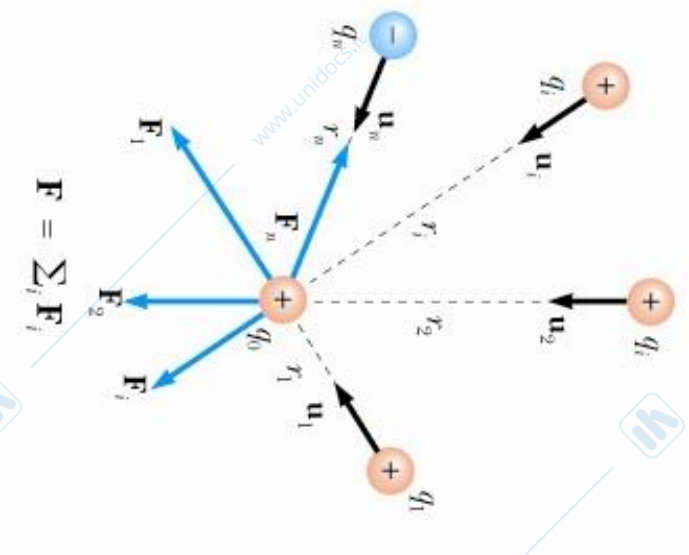
- 1) le due cariche hanno lo stesso segno ( $q_1 q_2 > 0$ ) la forza ha lo stesso verso di  $\vec{n}_{1,2}$  (forza repulsiva)
- 2) le due cariche hanno segno opposto ( $q_1 q_2 < 0$ ) la forza ha il verso opposto ad  $\vec{n}_{1,2}$  (forza attrattiva)

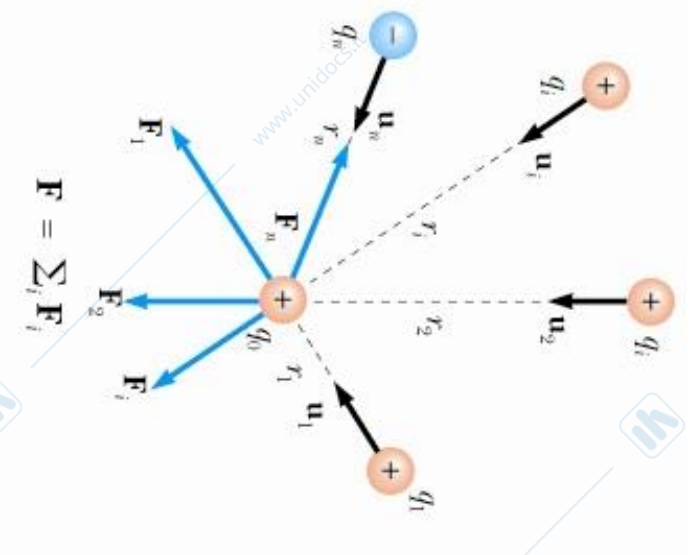
In accordo con il principio di azione e reazione, la forza  $\vec{F}_{2,1}$  che  $q_2$  esercita su  $q_1$  è  $-\vec{F}_{1,2}$

## 4. PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Le forze gravitazionali agenti su una massa  $m_0$  dovute alla masse circostanti o le forze di Coulomb agenti su una carica  $q_0$  dovute alle cariche circostanti si sommano vettorialmente:

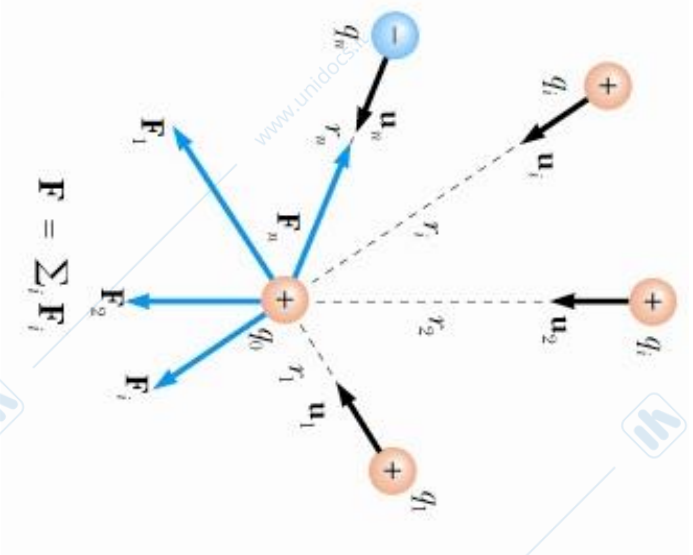
⇒ vige il principio di sovrapposizione degli effetti, detto anche principio di indipendenza delle forze simultanee.





Consideriamo  $n$  cariche elettriche puntiformi (o  $n$  masse puntiformi); la singola carica  $q_i$  (o la massa  $m_i$ ) esercita separatamente la forza  $\vec{F}_i$  su  $q_0$  (o  $m_0$ ). Indichiamo con  $r_i$  la distanza tra  $q_i$  (o massa  $m_i$ ) e  $q_0$  (o  $m_0$ ) e con  $\vec{u}_{i,0}$  il versore diretto da  $q_i$  (o la massa  $m_i$ ) a  $q_0$  (o  $m_0$ ). La forza totale agente su  $q_0$  (o  $m_0$ ) è data dalla somma vettoriale delle singole forze  $\vec{F}_i$ :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$



Consideriamo  $n$  cariche elettriche puntiformi (o  $n$  masse puntiformi); la singola carica  $q_i$  (o la massa  $m_i$ ) esercita separatamente la forza  $\vec{F}_i$  su  $q_0$  (o  $m_0$ ). Indichiamo con  $r_i$  la distanza tra  $q_i$  (o massa  $m_i$ ) e  $q_0$  (o  $m_0$ ) e con  $\vec{u}_{i,0}$  il versore diretto da  $q_i$  (o la massa  $m_i$ ) a  $q_0$  (o  $m_0$ ). La forza totale agente su  $q_0$  (o  $m_0$ ) è data dalla somma vettoriale delle singole forze  $\vec{F}_i$ :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

A) nel caso gravitazionale abbiamo:

$$\vec{F}_i = -\gamma \frac{m_i m_0}{r_i^2} \vec{u}_{i,0} \qquad \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m_0 \sum_{i=1}^n \left( -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u}_{i,0} \right)$$

B) nel caso elettrostatico abbiamo:

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_0}{r_i^2} \vec{u}_{i,0} \qquad \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = q_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{i,0}$$

## 5. CAMPO (GRAVITAZIONALE ed ELETTROSTATICO)

La forza di gravitazione tra due masse o la forza di Coulomb tra due cariche può essere intesa come un'azione diretta tra di esse, un'azione a distanza nella quale le masse (o cariche) interagiscono tra di loro senza venire a contatto, seguendo il principio di azione e reazione (terza legge della dinamica di Newton).

## 5. CAMPO (GRAVITAZIONALE ed ELETTROSTATICO)

La forza di gravitazione tra due masse o la forza di Coulomb tra due cariche può essere intesa come un'azione diretta tra di esse, un'azione a distanza nella quale le masse (o cariche) interagiscono tra di loro senza venire a contatto, seguendo il principio di azione e reazione (terza legge della dinamica di Newton).

In alternativa, si può anche ritenere che la prima massa (o carica) perturbi lo spazio circostante creando un "campo di forze" gravitazionali (o elettrostatiche) i cui effetti si rivelano quando una seconda massa (o carica) penetra in questo spazio perturbato dalla prima massa (o carica) e risente una determinata forza proporzionale all'intensità del campo, intensità che decresce con il quadrato della distanza dalla massa (o carica) che ha generato il campo.

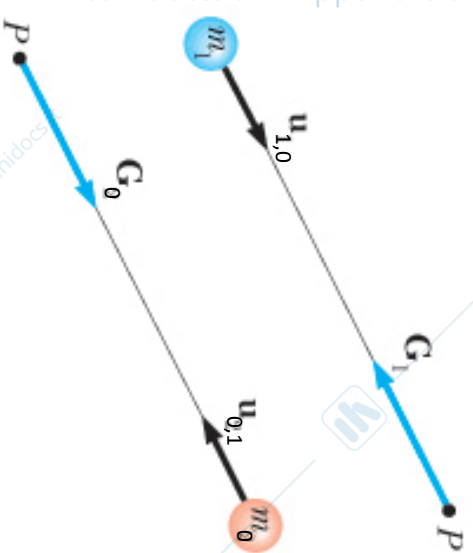
## 1) Campo gravitazionale $\vec{G}$

Supponiamo di avere due masse  $m_1$  e  $m_0$  puntiformi (o a simmetria sferica) poste a distanza  $r$  tra loro in un mezzo omogeneo ed isotropo, ad esempio il vuoto.

Tra di esse si esercita un'interazione gravitazionale costituita da una forza  $\vec{F}_{1,0}$  che  $m_1$  esercita su  $m_0$  e da una reazione  $\vec{F}_{0,1}$  che  $m_0$  esercita su  $m_1$ .



$$\vec{F}_{1,0} = -\gamma \frac{m_1 m_0}{r^2} \hat{u}_{1,0} = \left( -\gamma \frac{m_1}{r^2} \hat{u}_{1,0} \right) m_0 = \vec{G}_1 m_0 \quad \vec{F}_{0,1} = -\gamma \frac{m_1 m_0}{r^2} \hat{u}_{0,1} = \left( -\gamma \frac{m_0}{r^2} \hat{u}_{0,1} \right) m_1 = \vec{G}_0 m_1$$





$$\vec{F}_{1,0} = -\gamma \frac{m_1 m_0}{r^2} \hat{u}_{1,0} = \left( -\gamma \frac{m_1}{r^2} \hat{u}_{1,0} \right) m_0 = \vec{G}_1 m_0$$

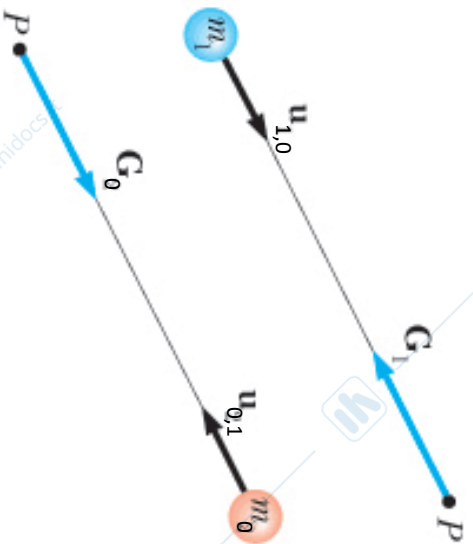
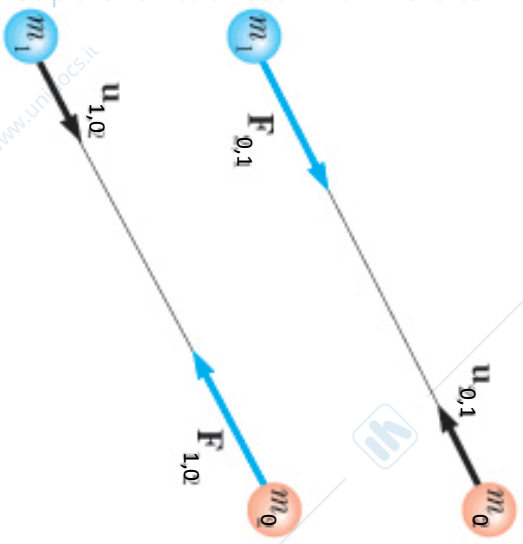
Supponiamo di avere due masse  $m_1$  e  $m_0$  puntiformi (o a simmetria sferica) poste a distanza  $r$  tra loro in un mezzo omogeneo ed isotropo, ad esempio il vuoto.

Tra di esse si esercita un'interazione gravitazionale costituita da una forza  $\vec{F}_{1,0}$  che  $m_1$  esercita su  $m_0$  e da una reazione  $\vec{F}_{0,1}$  che  $m_0$  esercita su  $m_1$ .

$$\vec{F}_{0,1} = -\gamma \frac{m_1 m_0}{r^2} \hat{u}_{0,1} = \left( -\gamma \frac{m_0}{r^2} \hat{u}_{0,1} \right) m_1 = \vec{G}_0 m_1$$



la forza gravitazionale  $\vec{F}_{1,0}$  che  $m_1$  esercita su  $m_0$  è pari al prodotto di un vettore che non dipende da  $m_0$ , ma solo da  $m_1$  e dalla distanza da  $m_1$  moltiplicato per la massa  $m_0$  sottoposta all'azione di  $m_1$ , viceversa nel caso di  $\vec{F}_{0,1}$ .



Tale vettore viene denominato “campo gravitazionale”  $\vec{G}$  generato, dalla massa  $m$  sorgente del campo, nel punto dello spazio  $P$  distante  $r$  dalla sorgente del campo stesso:

$$\vec{G}(P) = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{u}$$

dove  $\vec{u}$  è diretto uscente dalla massa  $m$ , sorgente del campo gravitazionale, verso il punto  $P(X,Y,Z)$  distante  $r$  dalla massa  $m$ .

Il campo gravitazionale è sempre diretto verso la massa sorgente del campo stesso e si misura in N/kg essendo il rapporto tra una forza e una massa.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1,0} &= -\gamma \frac{m_1 m_0}{r^2} \hat{u}_{1,0} = \left( -\gamma \frac{m_1}{r^2} \hat{u}_{1,0} \right) m_0 = \vec{G}_1 m_0 \\ \vec{F}_{0,1} &= -\gamma \frac{m_1 m_0}{r^2} \hat{u}_{0,1} = \left( -\gamma \frac{m_0}{r^2} \hat{u}_{0,1} \right) m_1 = \vec{G}_0 m_1 \end{aligned}$$



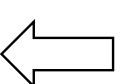
## 2) Campo elettrostatico

Supponiamo di avere due cariche  $q_1$  e  $q_0$  puntiformi poste a distanza  $r$  tra di loro.

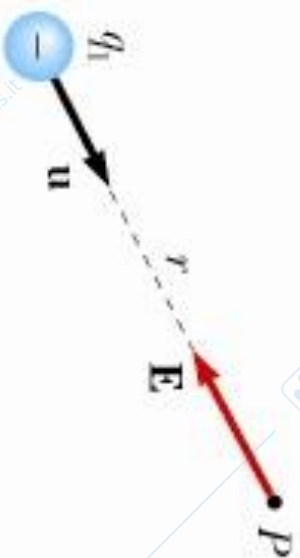
Tra di esse si esercita un'interazione gravitazionale costituita da una forza  $\vec{F}_{1,0}$  che  $m_1$  esercita su  $m_0$  e da una reazione  $\vec{F}_{0,1}$  che  $m_0$  esercita su  $m_1$ .

$$\vec{F}_{1,0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r^2} \hat{u}_{1,0} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{u}_{1,0} \right) q_0 = \vec{E}_{1,0} q_0$$

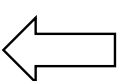
$$\vec{F}_{0,1} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r^2} \hat{u}_{0,1} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \hat{u}_{0,1} \right) m_1 = \vec{E}_{0,1} q_1$$



la forza gravitazionale  $\vec{F}_{1,0}$  che  $m_1$  esercita su  $m_0$  è pari al prodotto di un vettore che non dipende da  $m_0$ , ma solo da  $m_1$  e dalla distanza da  $m_1$  moltiplicato per la massa  $m_0$  sottoposta all'azione di  $m_1$ , viceversa nel caso di  $\vec{F}_{0,1}$ .



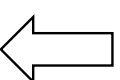
$$\vec{F}_{1,0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r^2} \hat{u}_{1,0} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{u}_{1,0} \right) q_0 = \vec{E}_{1,q_0} \quad \vec{F}_{0,1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r^2} \hat{u}_{0,1} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \hat{u}_{0,1} \right) m_1 = \vec{E}_{0,q_1}$$



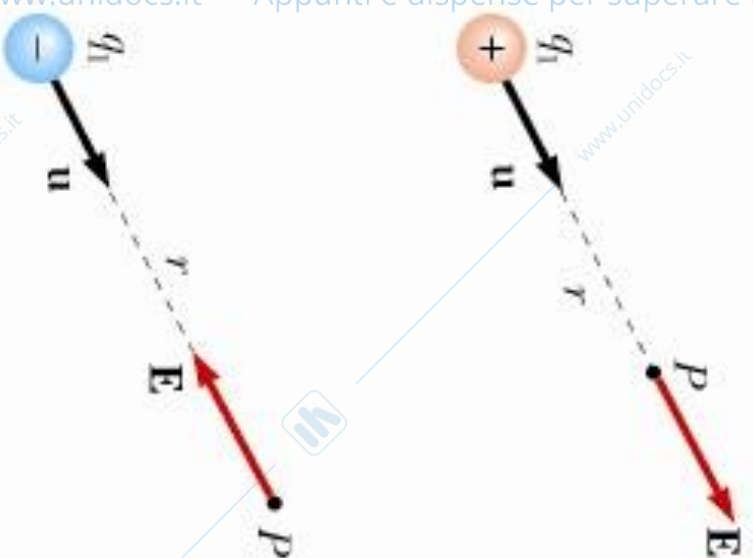
Tale vettore viene denominato “campo elettrostatico”  $\vec{E}$  generato, dalla carica  $q$  sorgente del campo, nel punto dello spazio P distante  $r$  dalla sorgente del campo stesso:

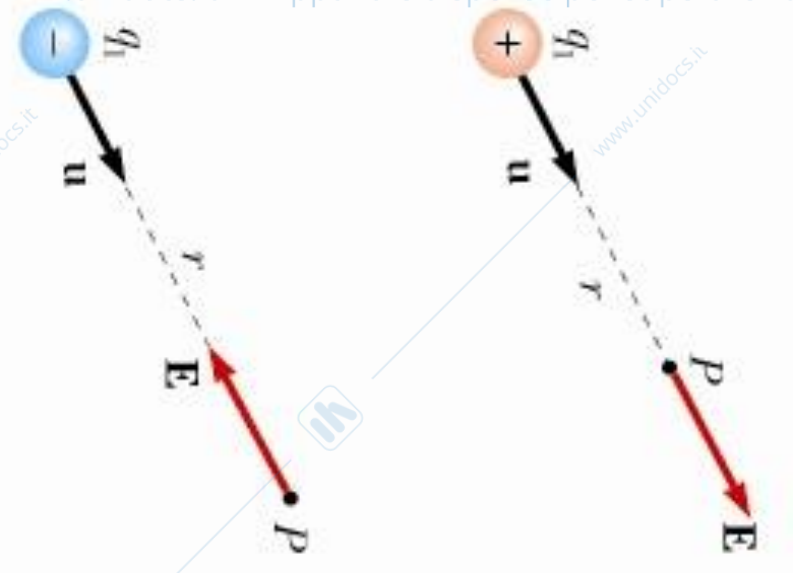
$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}_{1,0}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

dove  $\vec{u}$  è diretto uscente dalla carica  $q$ , sorgente del campo elettrostatico, verso il punto P(x,y,z) distante  $r$  dalla carica  $q$ .

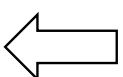


Il campo elettrostatico, rapporto tra una forza e una carica, si misura in N/C. Vedremo più avanti che un'unità di misura equivalente più utilizzata nella pratica è V/m (volt/metro)





$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}_{1,0}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$



A differenza del campo gravitazionale, abbiamo adesso due possibilità:

- 1) campo elettrostatico concorde con  $\vec{u}$ , e quindi uscente dalla carica  $q$ , quando quest'ultima è positiva
- 2) campo elettrostatico in verso opposto ad  $\vec{u}$ , e quindi entrante nella  $q$ , quando quest'ultima è negativa

### 3) Principio di sovrapposizione degli effetti

Anche per il campo gravitazionale ed elettrostatico vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

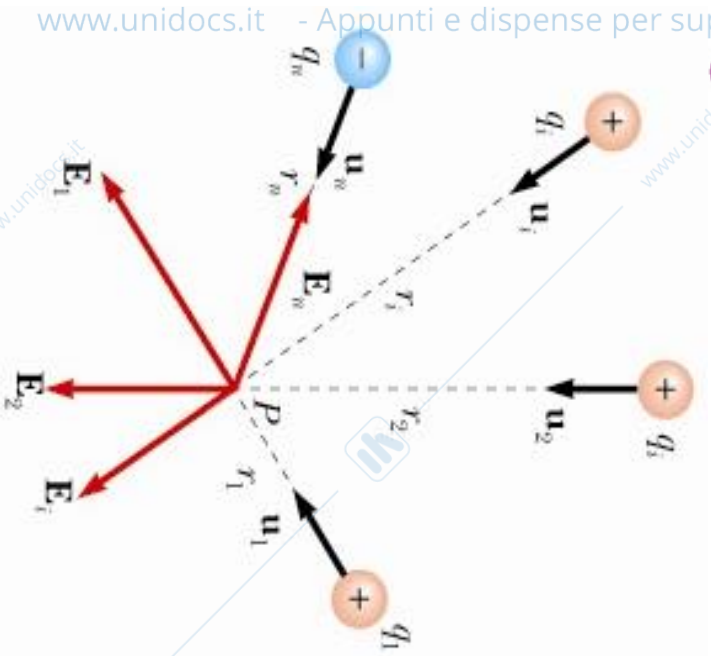
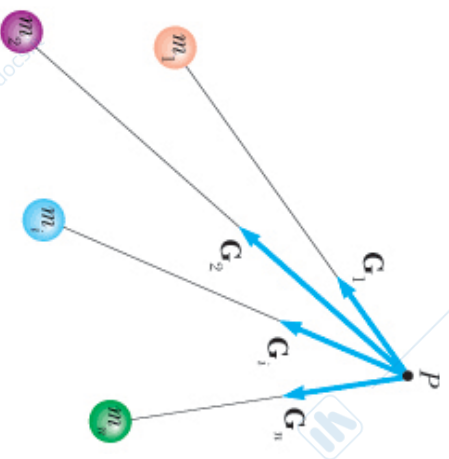
Dato un punto nello spazio  $P(x,y,z)$  e un insieme discreto di masse o cariche

A) nel caso gravitazionale abbiamo:

$$\vec{G}(P) = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i(P) = \sum_{i=1}^n \left( -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u}_i \right)$$

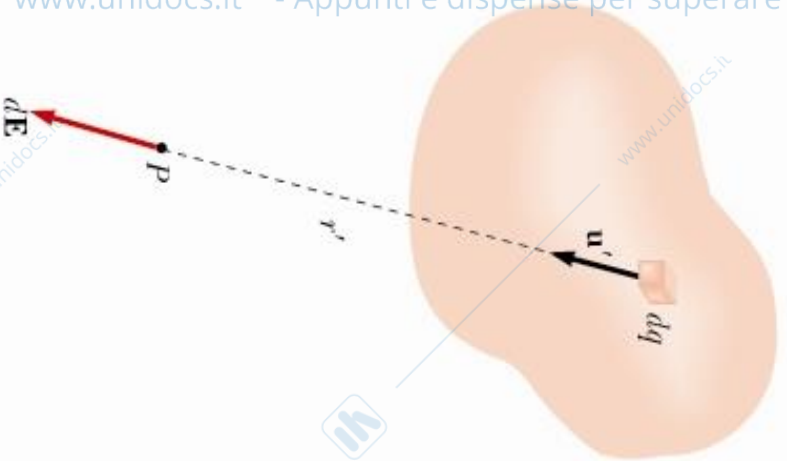
B) nel caso elettrostatico abbiamo:

$$\vec{E}(P) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(P) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$



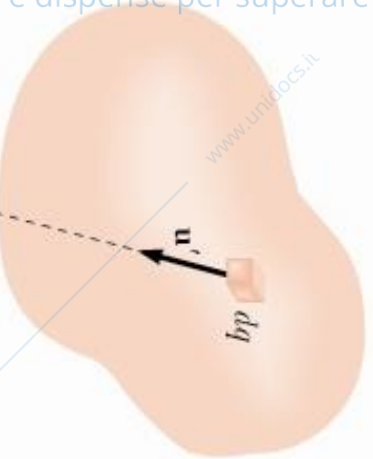
## 6. CAMPO PRODOTTO da una DISTRIBUZIONE di MASSA o CARICA

Nella maggior parte dei casi pratici e reali le masse o le cariche non sono concentrate in un unico punto, o in una regione estremamente ristretta, ma sono distribuite nello spazio con una ben determinata geometria. Tali distribuzioni di massa o carica sono naturalmente sorgenti di campo (gravitazionale o elettrostatico).



## 6. CAMPO PRODOTTO da una DISTRIBUZIONE di MASSA o CARICA

Nella maggior parte dei casi pratici e reali le masse o le cariche non sono concentrate in un unico punto, o in una regione estremamente ristretta, ma sono distribuite nello spazio con una ben determinata geometria. Tali distribuzioni di massa o carica sono naturalmente sorgenti di campo (gravitazionale o elettrostatico).



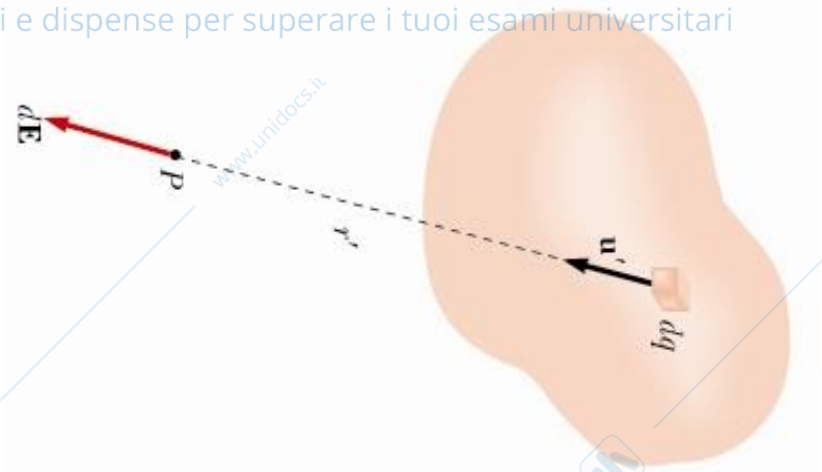
Se la massa o carica è distribuita in un corpo C avente il volume  $\tau$ , si definisce una densità spaziale  $\rho(x', y', z')$  di massa ( $\rho_m$ , misurata in  $\text{kg}/\text{m}^3$ ) o di carica ( $\rho_q$ , misurata in  $\text{C}/\text{m}^3$ ):

$$dm = \rho_m(x', y', z') d\tau \quad \text{oppure} \quad dq = \rho_q(x', y', z') d\tau$$

dove  $d\tau = dx' dy' dz'$  è il volume elementare intorno al punto del corpo C di coordinate  $(x', y', z')$  un cui è contenuta la massa infinitesima  $dm$  o la carica infinitesima  $dq$ .

Ovviamente la massa totale del corpo C è data da  $m = \int_{\tau} \rho_m(x', y', z') d\tau$  e la carica

totale contenuta nel corpo C è data da  $q = \int_{\tau} \rho_q(x', y', z') d\tau$ .



Il campo generato nel punto  $P(x,y,z)$  dovuto a una massa  $m$  totale o un carica  $q$  totale contenuta in una regione limitata  $C$  di volume  $\tau$  è dato dalla somma vettoriale dei singoli contributi  $d\vec{G}$  o  $d\vec{E}$  dovuti alla massa infinitesima  $dm$  o alla carica infinitesima  $dq$ :

$$d\vec{G}(P) = -\gamma \frac{dm}{r^2} \vec{u} \quad d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}$$

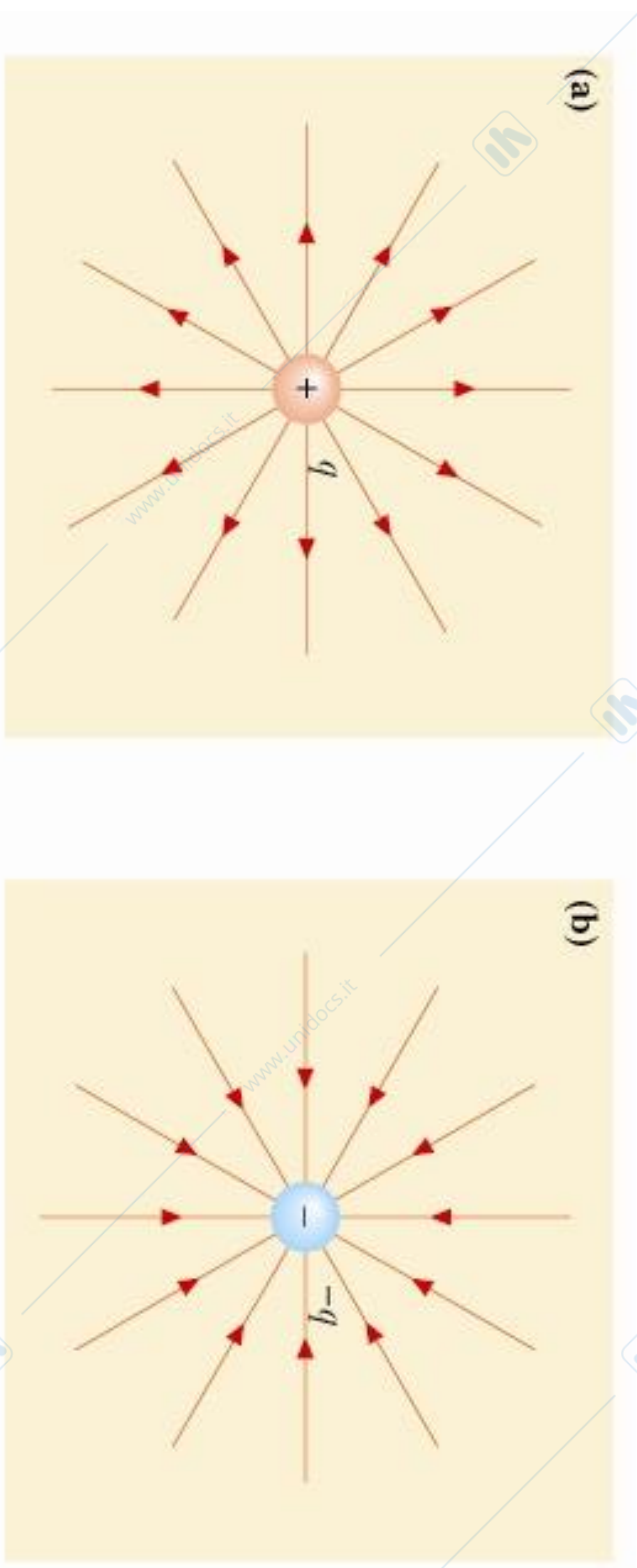
Integrando vettorialmente su tutti gli elementi  $dm$  o  $dq$ :

$$\vec{G}(P) = \int_C -\gamma \frac{dm}{r^2} \vec{u} = \int_{\tau} -\gamma \rho_m \frac{d\tau}{r^2} \vec{u}$$

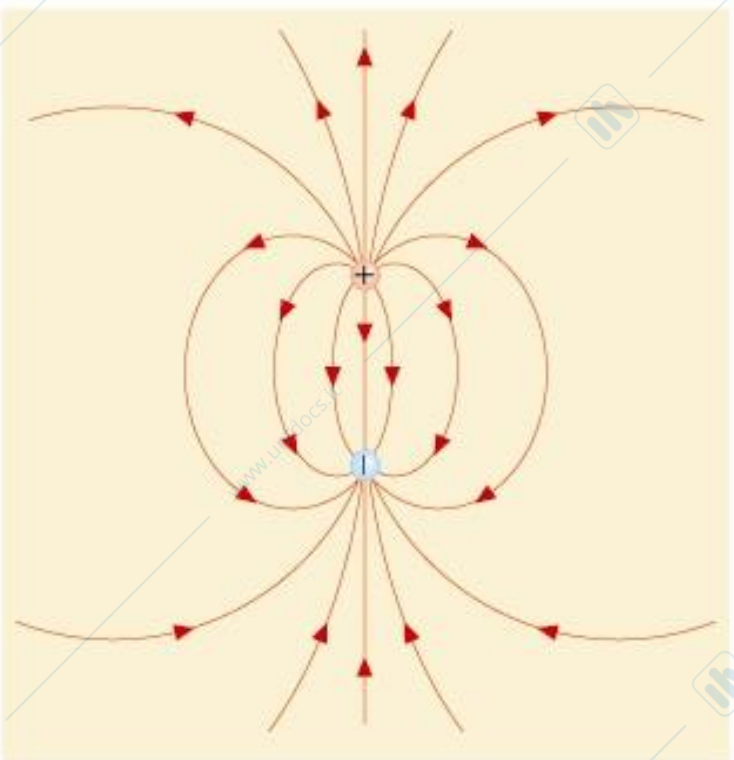
$$\vec{E}(P) = \int_C \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} = \int_{\tau} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_q \frac{d\tau}{r^2} \vec{u}$$

## 7. LINEE DI FORZA del CAMPO VETTORIALE

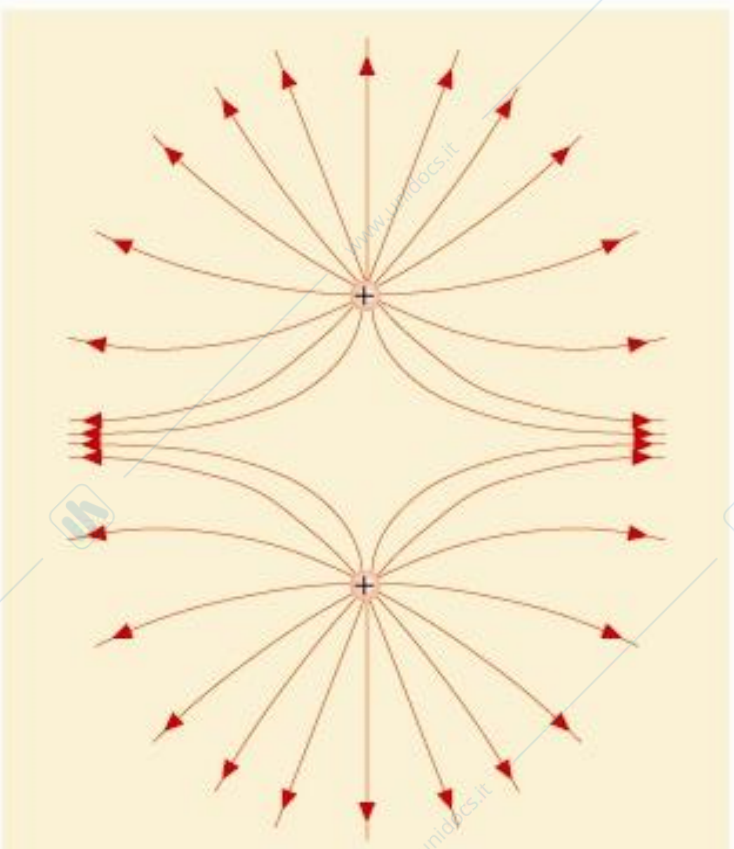
Partendo da una generica posizione e muovendosi per tratti infinitesimi successivi, ciascuno parallelo e concorde al campo vettoriale in quel dato punto, si ottiene una linea che è detta linea di forza o di campo: in ogni suo punto tale linea è, per definizione, tangente al campo e il suo verso di percorrenza indica il verso del campo. Se si traccia un certo numero di linee di campo si ha una rappresentazione grafica visiva complessiva del campo in tutto lo spazio.



Per esempio nel caso di cariche puntiformi o masse puntiformi (o a simmetria sferica), le linee di campo hanno direzione radiale con origine sulla carica o sulla massa e sono entranti (massa o carica negativa) o uscenti (carica positiva).



(a)



(b)

**Figura 1.24**

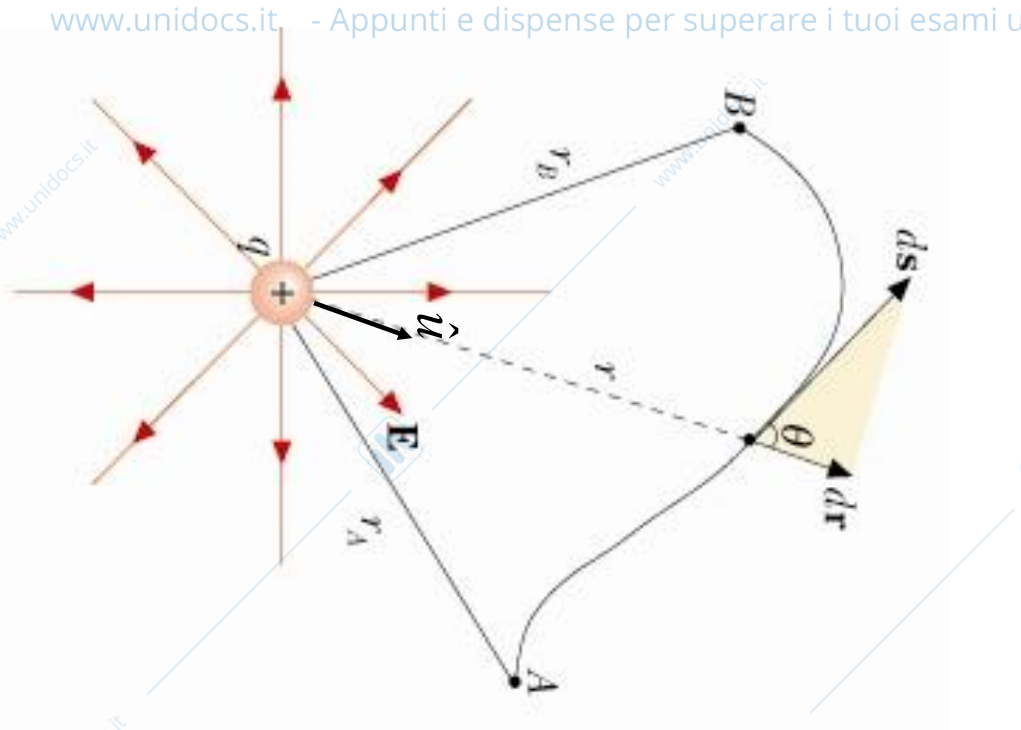
Linee di forza di due cariche puntiformi di valore uguale di segno opposto (a) e dello stesso segno (b).



Mazzoldi - Nigro - Voci  
Elementi di Fisica - Elettromagnetismo  
Edises

## 8. ENERGIA POTENZIALE (GRAVITAZIONALE e ELETTROSTATICA)

La forza gravitazionale e la forza elettrostatica sono conservative in quanto forze centrali.



Consideriamo come esempio la traiettoria di una carica  $q_0$  nel campo  $\vec{E}$  generato da una carica  $q$  (nel caso in figura positiva perché il campo elettrostatico è uscente da  $q$ ) per andare dal punto A al punto B.

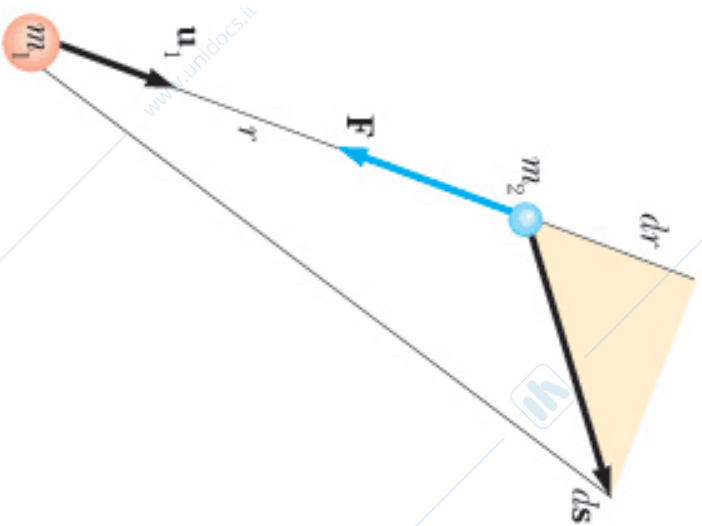
Il lavoro compiuto durante lo spostamento  $d\vec{s}$  è dato da

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

Il prodotto  $\vec{u} \cdot d\vec{s}$  è pari alla proiezione di  $d\vec{s}$  su  $\vec{u}$  e quindi pari a  $dr$ .

Pertanto, nel caso elettrostatico:

$$W = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = E_{p,A} - E_{p,B}$$



Nel caso gravitazionale

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m_0 \vec{G} \cdot d\vec{s} = -\gamma \frac{mm_0}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

Il prodotto  $\vec{u} \cdot d\vec{s}$  è pari alla proiezione di  $d\vec{s}$  su  $\vec{u}$  e quindi pari a  $dr$ .

$$W = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} -\gamma \frac{mm_0}{r^2} dr = -\gamma mm_0 \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Il lavoro della forza elettrostatica e della forza gravitazionale NON dipendono dalla traiettoria ma solo dalle posizioni iniziali e finali della traiettoria e che l'energia potenziale ha l'espressione:

1) caso elettrostatico: 
$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}$$

2) caso gravitazionale: 
$$E_p = -\gamma \frac{mm_0}{r}$$

$E_p$  è definita a meno di una costante additiva, però a distanza infinita, quando non c'è più interazione, l'energia potenziale elettrostatica o gravitazionale è nulla  $E_p(r = \infty) = 0$  e quindi la costante, che può essere ottenuta impostando  $r = \infty$ , ha valore nullo.

1) caso elettrostatico:  $E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}$

2) caso gravitazionale:  $E_p = -\gamma \frac{mm_0}{r}$



Il segno negativo nel caso gravitazionale e nel caso elettrostatico quando  $qq_0 < 0$  significa che la forza di interazione è attrattiva,

Il segno positivo nel caso elettrostatico quando  $qq_0 > 0$  significa che la forza di interazione è repulsiva.

Quando  $m_0$  si avvicina a  $m$  o  $q_0$  si avvicina a  $q$  (con  $qq_0 < 0$ ) la forza di interazione è attrattiva e compie un lavoro positivo e  $m_0$  (o  $q_0$ ) acquista energia cinetica :  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta E_K > 0$

Poichè la forza è conservativa, l'energia meccanica ( $E_m = E_K + E_p$ ) resta costante e quindi se  $E_K$  aumenta  $E_p$  deve diminuire: essendo  $E_p$  nulla per distanza infinita,  $E_p$  deve necessariamente essere negativa per distanze finite.

Quando  $m_0$  si avvicina a  $m$  o  $q_0$  si avvicina a  $q$  (con  $qq_0 < 0$ ) la forza di interazione è attrattiva e compie un lavoro positivo e  $m_0$  (o  $q_0$ ) acquista energia cinetica :  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta E_K > 0$

Poichè la forza è conservativa, l'energia meccanica ( $E_m = E_K + E_p$ ) resta costante e quindi se  $E_K$  aumenta  $E_p$  deve diminuire: essendo  $E_p$  nulla per distanza infinita,  $E_p$  deve necessariamente essere negativa per distanze finite.

Quando  $q_0$  si allontana da  $q$  (con  $qq_0 > 0$ ) la forza di interazione è repulsiva e compie un lavoro positivo e  $q_0$  acquista energia cinetica:  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta E_K > 0$

Poichè la forza è conservativa, l'energia meccanica ( $E_m = E_K + E_p$ ) resta costante e quindi se  $E_K$  aumenta  $E_p$  deve diminuire: essendo  $E_p$  nulla per distanza infinita,  $E_p$  deve necessariamente essere positiva per distanze finite.

Se consideriamo una traiettoria chiusa (percorso chiuso) si ottiene che il lavoro lungo tale traiettoria è nullo, ovvero che la circuitazione della forza elettrostatica o gravitazionale è nulla (forza conservativa).

Inoltre  $W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$  implica anche che  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$  e  $\oint \vec{G} \cdot d\vec{s} = 0$  ossia che il campo elettrostatico e il campo gravitazionale sono anche essi conservativi.

## Esempio - Calcolare la velocità di fuga di un corpo dalla Terra

Consideriamo inizialmente il corpo  $m$  sulla superficie della Terra con velocità iniziale  $v$  e energia cinetica:  $E_{k,in} = \frac{1}{2}mv^2$

Alla fine si vuole che il corpo  $m$  sia a distanza  $r = \infty$  dalla Terra con velocità  $v_\infty \geq 0$ .

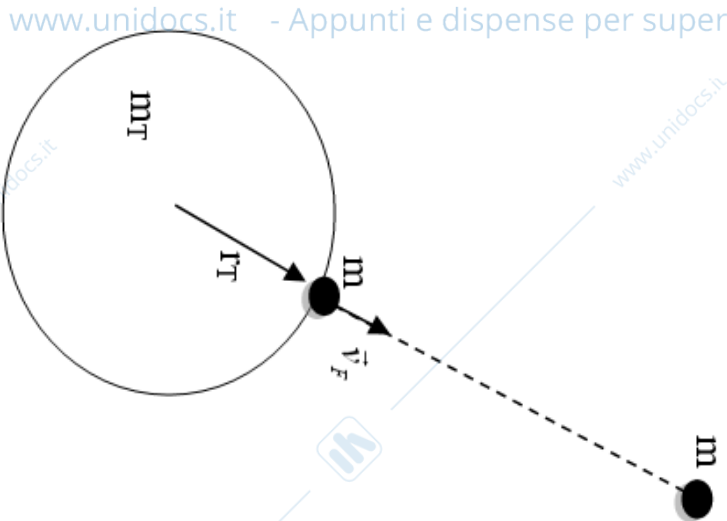
Utilizzando la conservazione dell'energia meccanica e sapendo che l'energia potenziale gravitazionale è  $E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$  si ha:

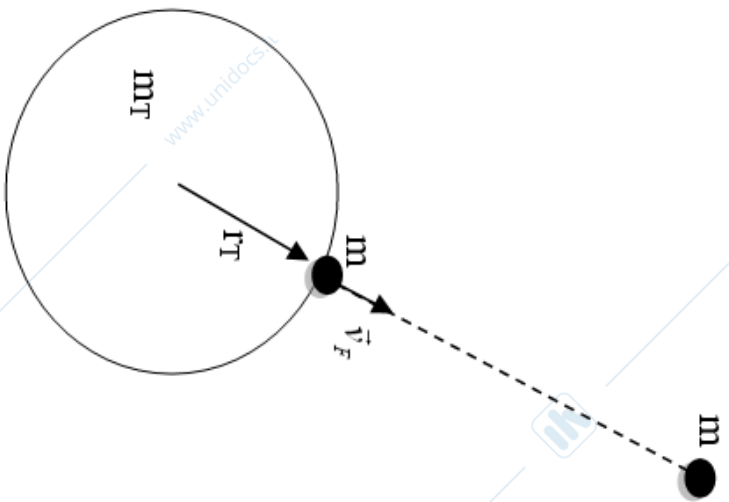
$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mm_T}{r_T} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r(=\infty)} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

$$v^2 = v_\infty^2 + 2\gamma \frac{m_T}{r_T}$$

Consideriamo il valore limite inferiore di  $v$ , ossia la velocità di fuga  $v_F$  a cui corrisponde una  $v_\infty = 0$ , ossia il corpo arriva a  $r = \infty$  con velocità  $v_\infty = 0$ .

$$v_F^2 = 2\gamma \frac{m_T}{r_T} \Rightarrow v_F = \sqrt{2\gamma \frac{m_T}{r_T}}$$





$$v_F = \sqrt{2\gamma \frac{m_T}{r_T}}$$

Numericamente:

$$r_T = 6.3710^6 \text{ m}, \quad \gamma = 6.6710^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2), \quad m_T = 5.9810^{24} \text{ kg}$$

$$\Rightarrow v_F = 11,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

## 9. POTENZIALE (GRAVITAZIONALE e ELETTROSTATICO)

L'energia potenziale gravitazionale si può scrivere come  $E_P = m_0 V$  e quella elettrostatica come  $E_P = q_0 V$  ponendo

1) nel caso gravitazionale:  $V = \frac{E_P}{m_0} = -\gamma \frac{m}{r}$  e  $V(r = \infty) = 0$

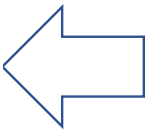
2) nel caso elettrostatico:  $V = \frac{E_P}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$  e  $V(r = \infty) = 0$



La grandezza scalare  $V$  si chiama potenziale gravitazionale (misurato in J/kg) o elettrostatico (misurato in J/C o nel suo equivalente volt (V)) del campo gravitazionale o elettrostatico prodotto dalla massa  $m$  o dalla carica  $q$ . Il potenziale è una funzione scalare continua e derivabile.

$$1) \quad \text{nel caso gravitazionale: } V = \frac{E_p}{m_0} = -\mathcal{N} \frac{m}{r} \quad \text{e} \quad V(r = \infty) = 0$$

$$2) \quad \text{nel caso elettrostatico: } V = \frac{E_p}{q_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{e} \quad V(r = \infty) = 0$$



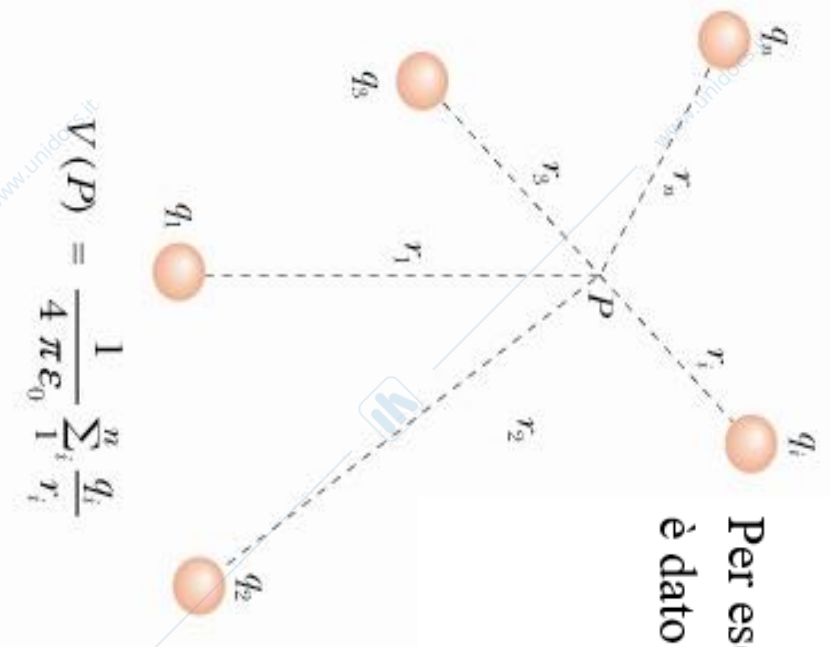
Il lavoro per uno spostamento generico della massa  $m_0$  o della carica  $q_0$  nel campo gravitazionale o elettrostatico prodotto dalla massa  $m$  o dalla carica  $q$ , dalla posizione iniziale A alla posizione finale B risulta essere:

1) nel caso gravitazionale:

$$W = -\Delta E_p = -m_0 \Delta V = m_0 (V_A - V_B)$$

2) nel caso elettrostatico:

$$W = -\Delta E_p = -q_0 \Delta V = q_0 (V_A - V_B)$$



Anche al potenziale si può applicare quanto visto per il campo in presenza di distribuzioni di masse o cariche: il potenziale si calcola come somma dei vari contributi, finiti o infinitesimi. Da notare che si tratta di somme o integrali di grandezze scalari e non vettoriali come avviene per il campo, quindi il calcolo può risultare più facile dal punto di vista analitico.

Per esempio il potenziale generato da un sistema di cariche nel punto  $P(x,y,z)$  è dato da:

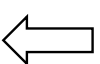
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

Tra campo e potenziale esiste la seguente relazione locale fondamentale:

$$\vec{G} = -\text{grad}(V) = -\vec{\nabla}V$$

e

$$\vec{E} = -\text{grad}(V) = -\vec{\nabla}V$$



$$[E] = \frac{[V]}{[L]} = V/m$$

Tra campo e potenziale esiste la seguente relazione locale fondamentale:

$$\vec{G} = -\mathit{grad}(V) = -\vec{\nabla}V$$

e

$$\vec{E} = -\mathit{grad}(V) = -\vec{\nabla}V$$

Sapendo che per una forza conservativa si ha:  $\vec{F} = -\mathit{grad}(E_p)$

$$\Rightarrow \vec{F}_g = m_0 \vec{G} = -\mathit{grad}(E_p) = -m_0 \mathit{grad}(V) \Rightarrow \vec{G} = -\mathit{grad}(V)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{el} = q_0 \vec{E} = -\mathit{grad}(E_p) = -q_0 \mathit{grad}(V) \Rightarrow \vec{E} = -\mathit{grad}(V)$$

## 10. MOTO di un CORPO SOTTOPOSTO alla FORZA GRAVITAZIONALE

Consideriamo un sistema formato da due masse  $m_1$  e  $m_2$  che interagiscono tra di loro attraverso l'interazione gravitazionale. L'energia meccanica totale di tale sistema è data da:

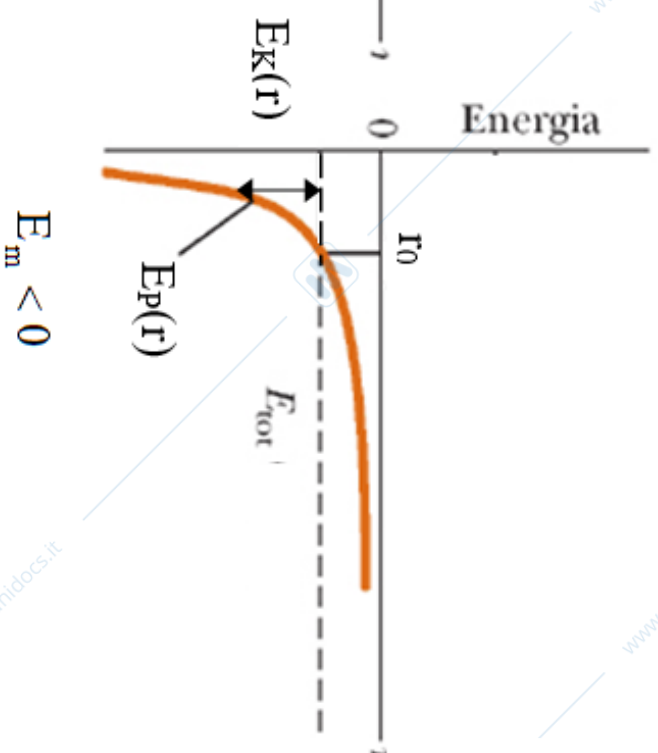
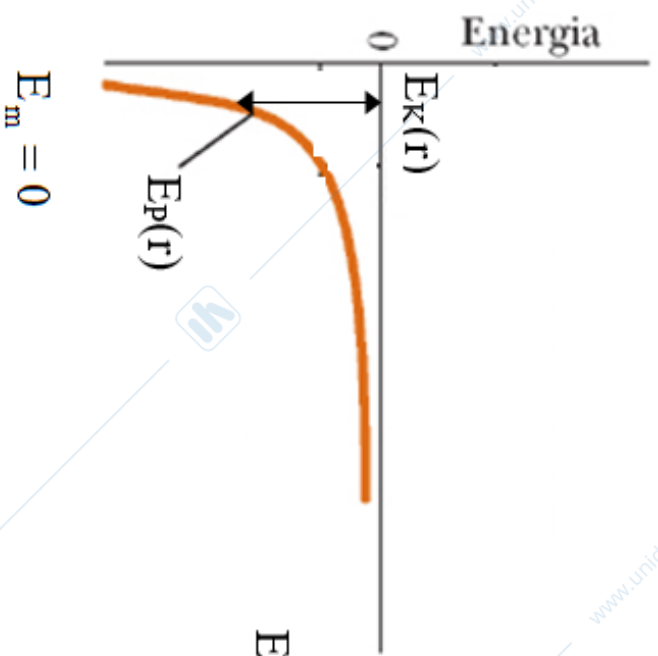
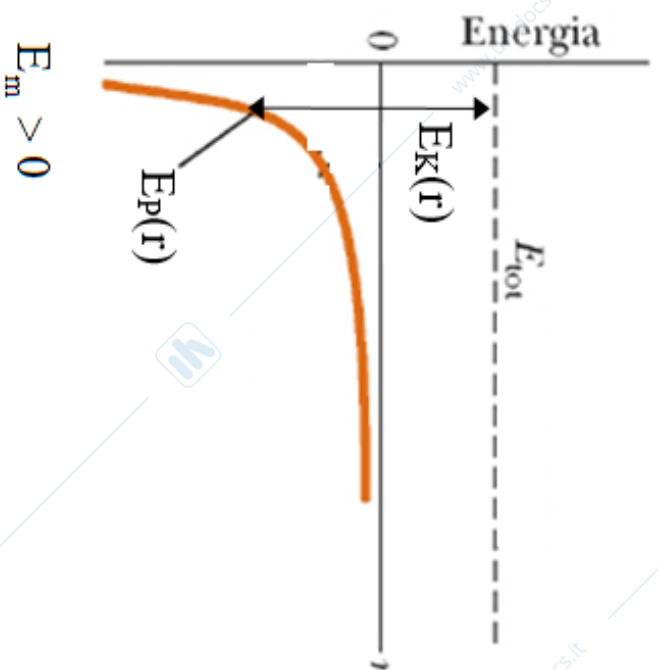
$$E_m = E_K + E_p = \text{costante}$$

dove  $E_K \geq 0$  e  $E_p = E_{p,\text{gravitazionale}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \leq 0$  (in particolare  $E_{p,\text{gravitazionale}}(r = \infty) = 0$ )

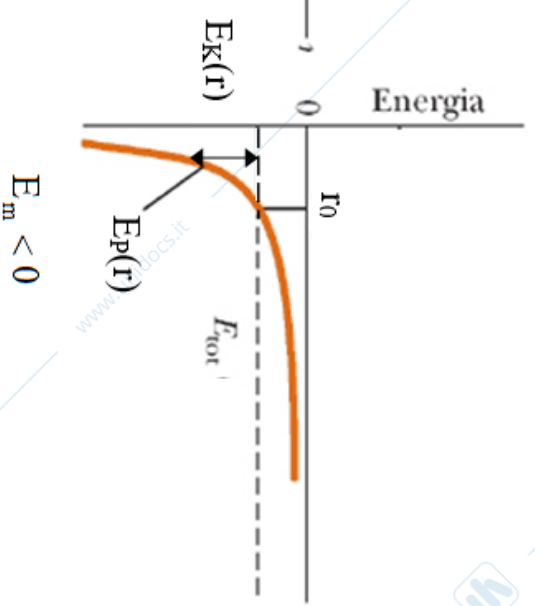
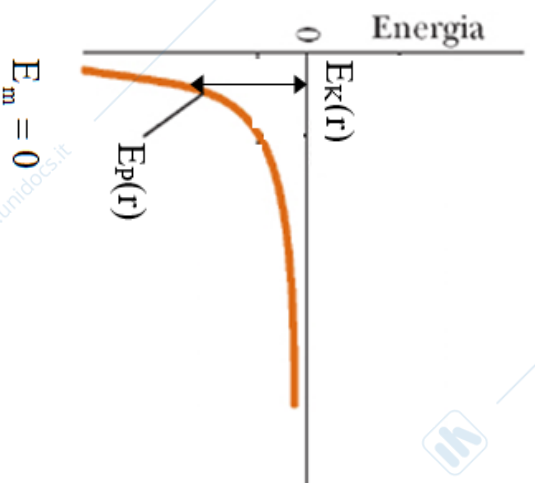
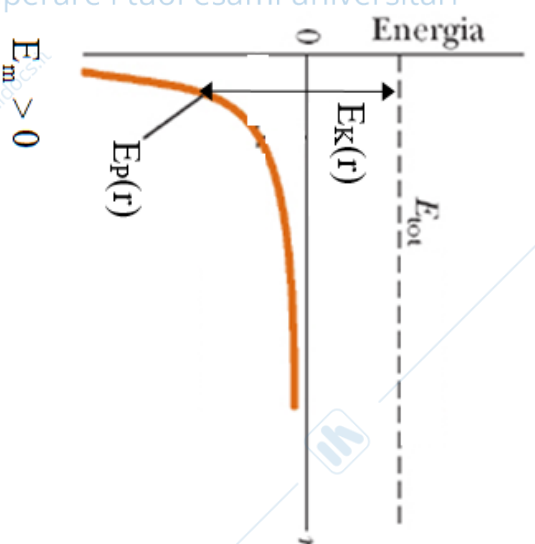
Per quanto riguarda il valore dell'energia meccanica totale  $E_m$ , abbiamo tre possibilità:

- 1)  $E_m > 0 \Leftrightarrow E_K > |E_P|$
- 2)  $E_m = 0 \Leftrightarrow E_K = |E_P|$
- 3)  $E_m < 0 \Leftrightarrow E_K < |E_P|$

$$E_m = E_K + E_P = \text{costante}$$



Nei primi due casi non ci sono limiti per  $r$ , mentre nel terzo caso, dovendo essere  $E_K(r) \geq 0$ ,  $r$  deve essere  $\leq r_0$ .

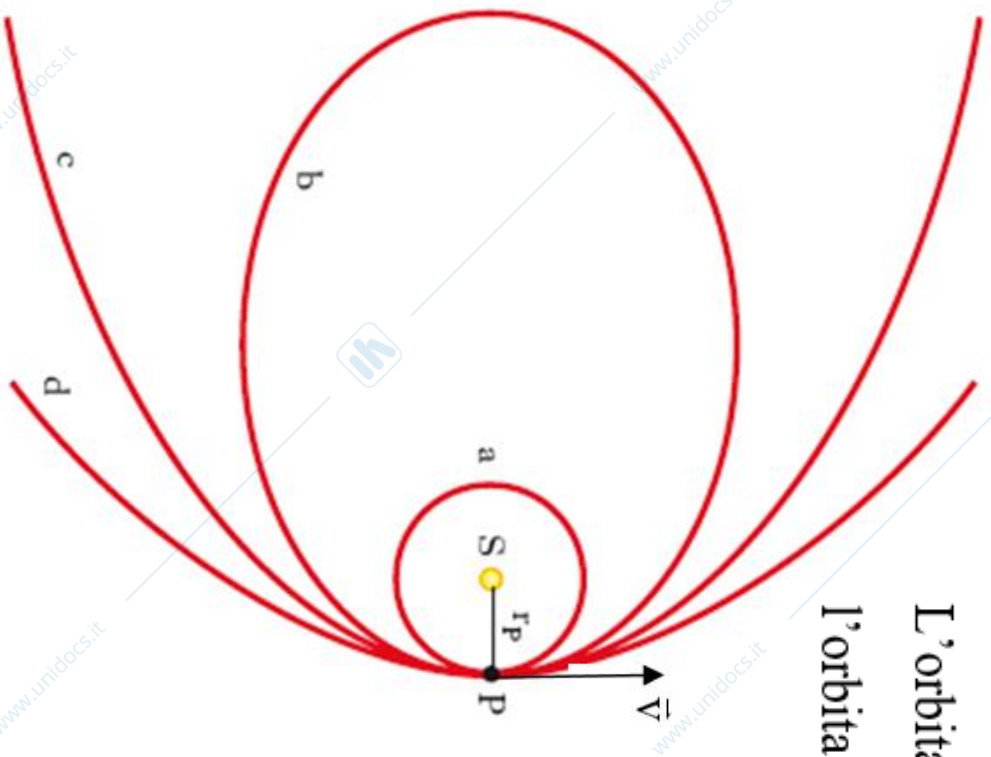


Ipotizziamo ora che  $m_1 > m_2$  e che  $m_2$  sia in movimento con velocità  $\bar{v}$  rispetto alla massa  $m_1$ . La tipologia di traiettoria percorsa da  $m_2$  rispetto a  $m_1$  (orbita) dipende dal segno dell'energia meccanica totale:

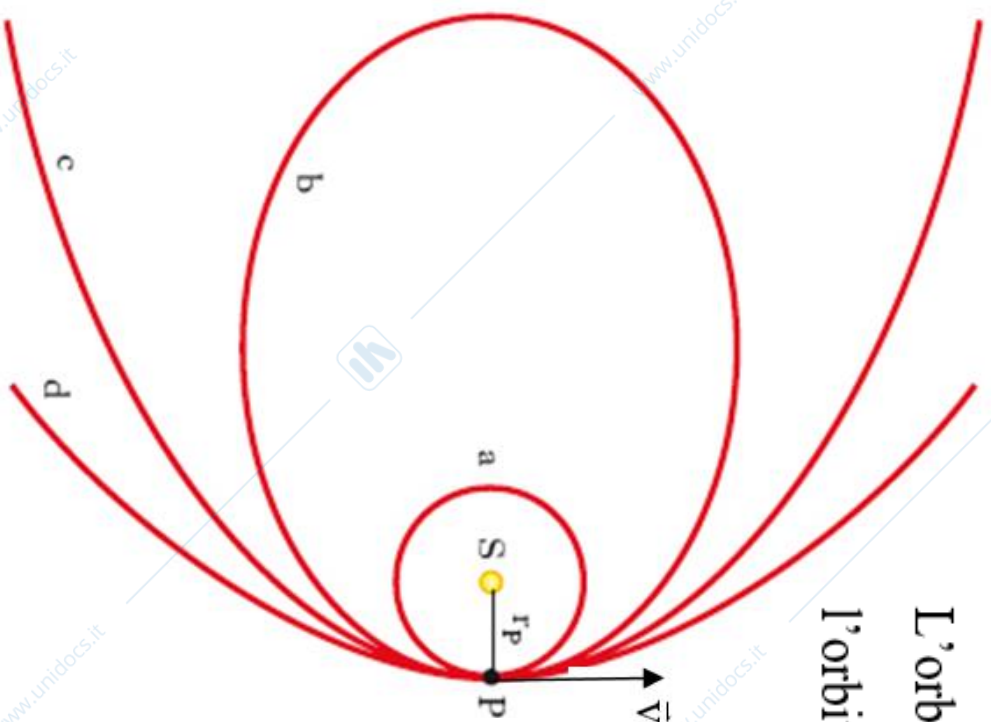
- 1)  $E_m > 0 \Rightarrow$  orbita iperbolica
- 2)  $E_m = 0 \Rightarrow$  orbita parabolica
- 3)  $E_m < 0 \Rightarrow$  orbita ellittica (caso particolare: orbita circolare)

- 1)  $E_m > 0 \Rightarrow$  orbita iperbolica
- 2)  $E_m = 0 \Rightarrow$  orbita parabolica
- 3)  $E_m < 0 \Rightarrow$  orbita ellittica (caso particolare: orbita circolare)

L'orbita d è iperbolica ( $E_m > 0$ ), l'orbita c è parabolica ( $E_m = 0$ ),  
l'orbita b è ellittica ( $E_m < 0$ ) e l'orbita a è circolare ( $E_m < 0$ ).



- 1)  $E_m > 0 \Rightarrow$  orbita iperbolica
- 2)  $E_m = 0 \Rightarrow$  orbita parabolica
- 3)  $E_m < 0 \Rightarrow$  orbita ellittica (caso particolare: orbita circolare)

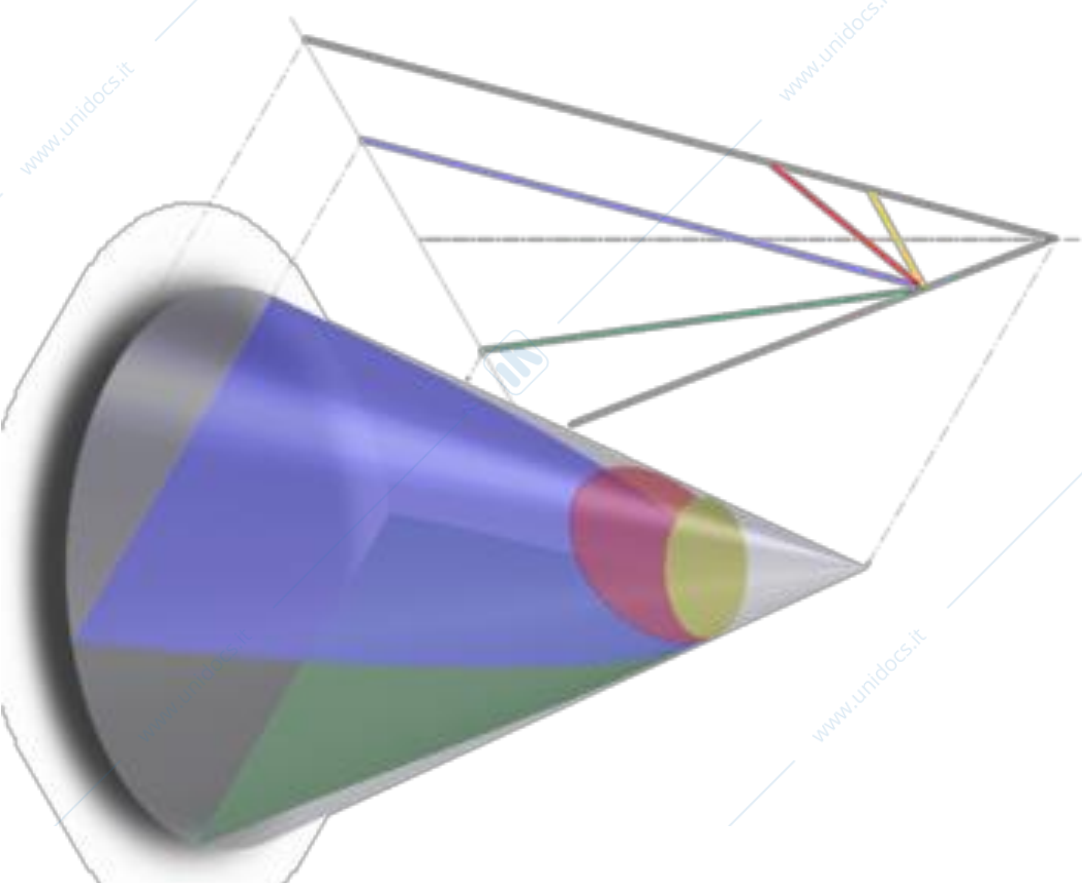


L'orbita d è iperbolica ( $E_m > 0$ ), l'orbita c è parabolica ( $E_m = 0$ ), l'orbita b è ellittica ( $E_m < 0$ ) e l'orbita a è circolare ( $E_m < 0$ ).

Le orbite iperboliche e paraboliche sono aperte, ossia  $m_2$  non è legata a  $m_1$ , e ad esse corrisponde il moto di un corpo di massa  $m_2$  che ha una tale energia cinetica  $E_k > |E_p|$  da non poter essere catturato da  $m_1$ : la forza gravitazionale incurva soltanto la traiettoria, accelera il moto nella fase di avvicinamento e lo decelera nella fase di allontanamento, con scambio tra energia cinetica e potenziale. Le orbite ellittiche (e circolari) sono chiuse e  $m_2$  è legata a  $m_1$ . Controllando  $\vec{v}$  è possibile selezionare la traiettoria voluta, come avviene con i satelliti artificiali.

Dal punto di vista matematico, le tre tipologie di curva sono casi particolari della curva conica, ossia di una curva piana che sia luogo dei punti ottenibili intersecando la superficie di un cono circolare retto con un piano.

Tipi di sezioni coniche: i piani, intersecando il cono, descrivono una circonferenza (in giallo), un'ellisse (in rosso), una parabola (in blu) e un'iperbole (in verde)



## 11. **TEOREMA di GAUSS**

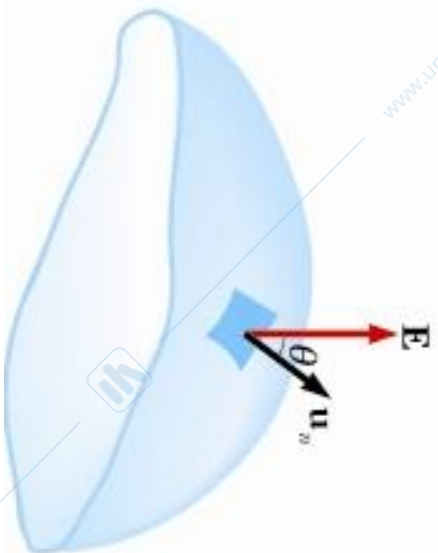
Il teorema (o legge) di Gauss che vale solamente per campi vettoriali con dipendenza dalla distanza dalla sorgente di campo del tipo  $1/r^2$

⇒ si applica sia al campo gravitazionale che al campo elettrostatico.

## 11. TEOREMA di GAUSS

Il teorema (o legge) di Gauss che vale solamente per campi vettoriali con dipendenza dalla distanza dalla sorgente di campo del tipo  $1/r^2$

⇒ si applica sia al campo gravitazionale che al campo elettrostatico.

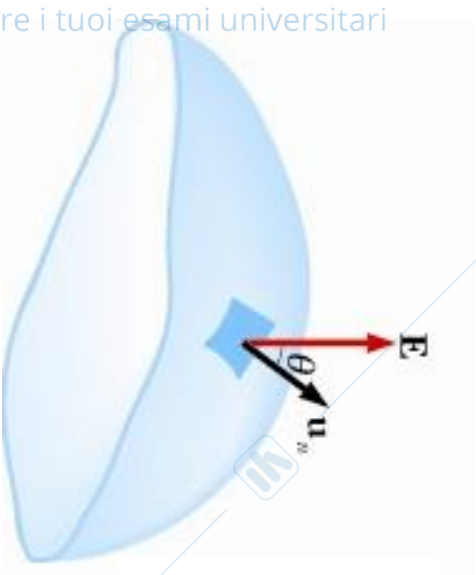


### Flusso di un campo vettoriale

Consideriamo una superficie infinitesima  $d\Sigma$  immersa in una regione dello spazio in cui è definito un campo vettoriale  $\vec{C}$  (il campo gravitazionale  $\vec{G}$  o il campo elettrostatico  $\vec{E}$ ) ed orientiamola fissando il verso del versore  $\vec{n}_n$  normale alla superficie stessa.

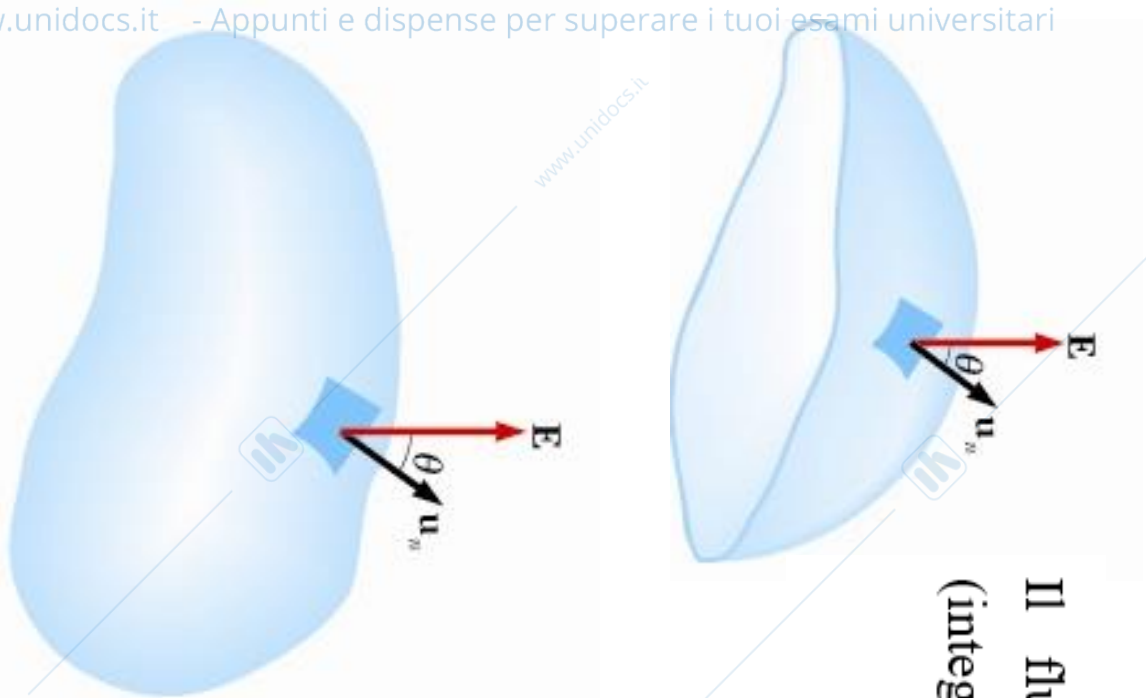
Si definisce flusso infinitesimo,  $d\phi$ , del campo vettoriale  $\vec{C}$  attraverso la superficie  $d\Sigma$  la quantità scalare:

$$d\phi(\vec{C}) = \vec{C} \cdot \vec{n}_n d\Sigma$$



Il flusso attraverso una superficie finita  $\Sigma$  si ottiene sommando (integrando) tutti i contributi infinitesimi  $d\phi$ :

$$\phi(\vec{C}) = \int d\phi = \int_{\Sigma} \vec{C} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

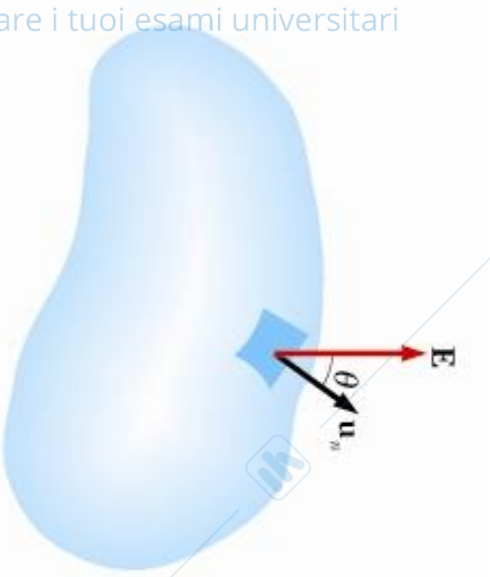


Il flusso attraverso una superficie finita  $\Sigma$  si ottiene sommando (integrando) tutti i contributi infinitesimi  $d\phi$ :

$$\phi(\vec{C}) = \int d\phi = \int_{\Sigma} \vec{C} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

Se la superficie è chiusa, il flusso si scrive allora:

$$\phi(\vec{C}) = \int d\phi = \oint_{\Sigma} \vec{C} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$



Nel teorema di Gauss considereremo solo il caso di superfici chiuse:

→ per convenzione il vettore normale è diretto verso l'esterno della superficie chiusa.

$$\phi(\vec{C}) = \int d\phi = \oint_{\Sigma} \vec{C} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

I contributi positivi all'integrale che definisce il flusso sono quelli per cui  $\vec{C} \cdot \vec{u}_n > 0$  dovuti a quelle zone della superficie chiusa  $\Sigma$  dove anche  $\vec{C}$  punta verso l'esterno: essi rappresentano un flusso di  $\vec{C}$  uscente dalla superficie chiusa  $\Sigma$ .

I contributi negativi provengono dalla zone in cui  $\vec{C} \cdot \vec{u}_n < 0$  in cui cioè  $\vec{C}$  punta verso l'interno e rappresenta un flusso di  $\vec{C}$  entrante nella superficie chiusa  $\Sigma$ .

Se il flusso è nullo vuol dire che il flusso entrante è uguale al flusso uscente.

## Caso elettrostatico (carica puntiforme q)

$$\vec{E}(P) = E(r) \cdot \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{con } \vec{u}_r \text{ il versore radiale uscente dalla carica}$$

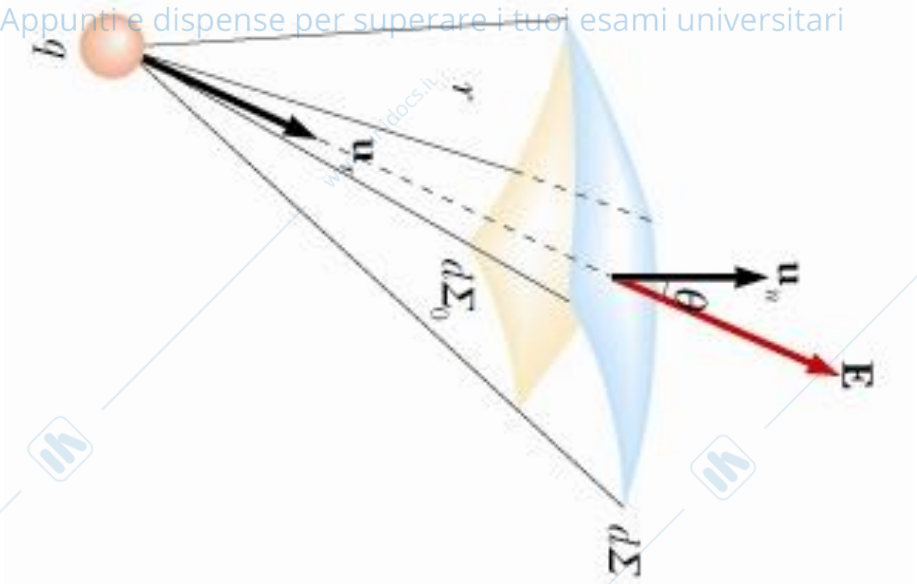
Flusso di  $\vec{E}$  attraverso l'elemento di superficie  $d\Sigma$  :

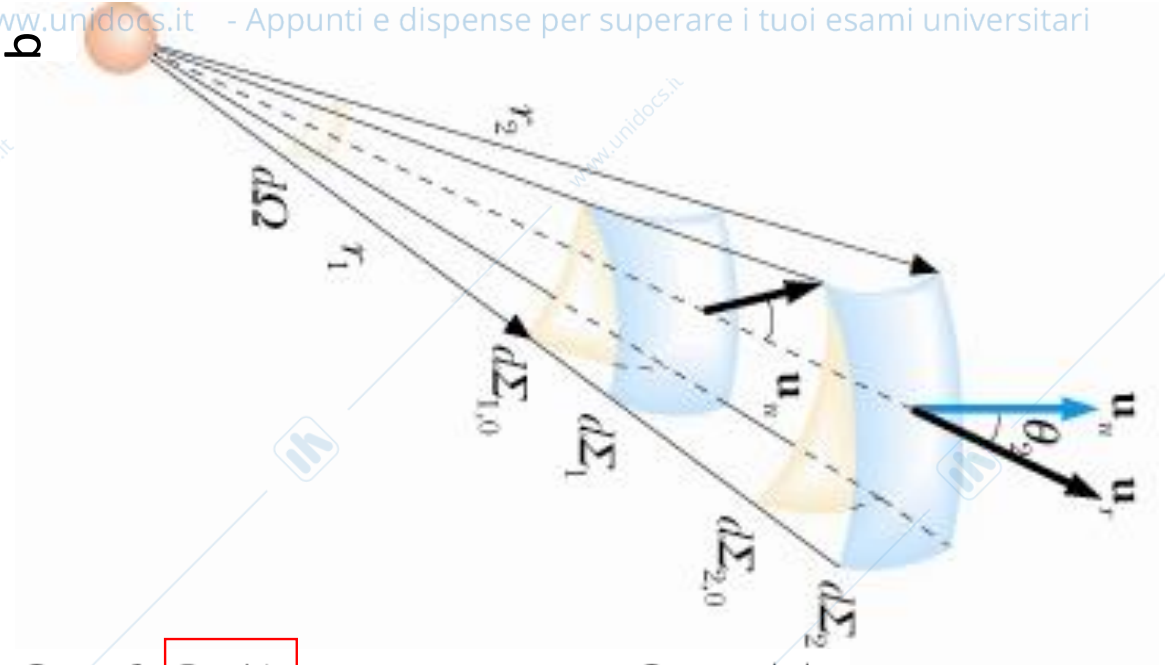
$$d\phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} d\Sigma \cos \vartheta$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo tra la direzione del versore  $\vec{u}_r$  e del versore  $\vec{u}_n$

$$d\phi(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} d\Sigma \cos \vartheta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma_0}{r^2}$$

dove  $d\Sigma_0$  è la proiezione di  $d\Sigma$  sul piano perpendicolare a  $\vec{u}_r$ .





$$d\phi(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} d\Sigma \cos\vartheta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma_0}{r^2}$$

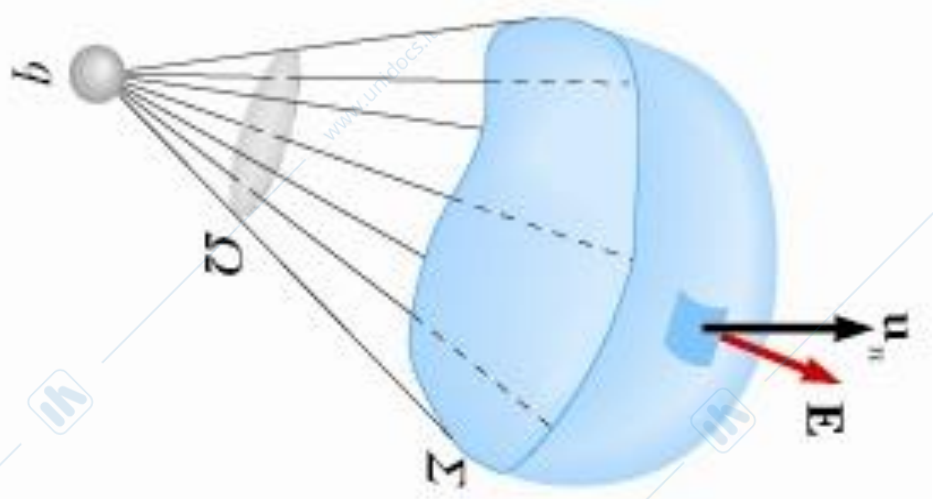
Per definizione  $\frac{d\Sigma_0}{r^2}$  è l'angolo solido  $d\Omega$  sotto cui viene visto dalla carica  $q$  il contorno di  $d\Sigma$ , per cui:

$$d\phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$



il flusso di  $\vec{E}$  di una carica puntiforme  $q$  dipende **solo** dall'angolo solido e non dalla superficie né dalla sua distanza dalla carica

Tracciate da  $q$  una serie di semirette che definiscono un cono infinitesimo con vertice in  $q$ , il flusso di  $\vec{E}$  è lo stesso per qualsiasi superficie  $d\Sigma$  il cui contorno si appoggi sulla superficie laterale del cono.



La dipendenza del flusso dall'angolo solido è un conseguenza diretta del fatto che a denominatore dell'espressione del campo  $\vec{E}$  compare il termine  $r^2$

⇒ qualunque altra dipendenza funzionale non avrebbe portate a tale risultato.

Il flusso totale attraverso una superficie chiusa è quindi dato da:

$$\phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n}_n d\Sigma = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

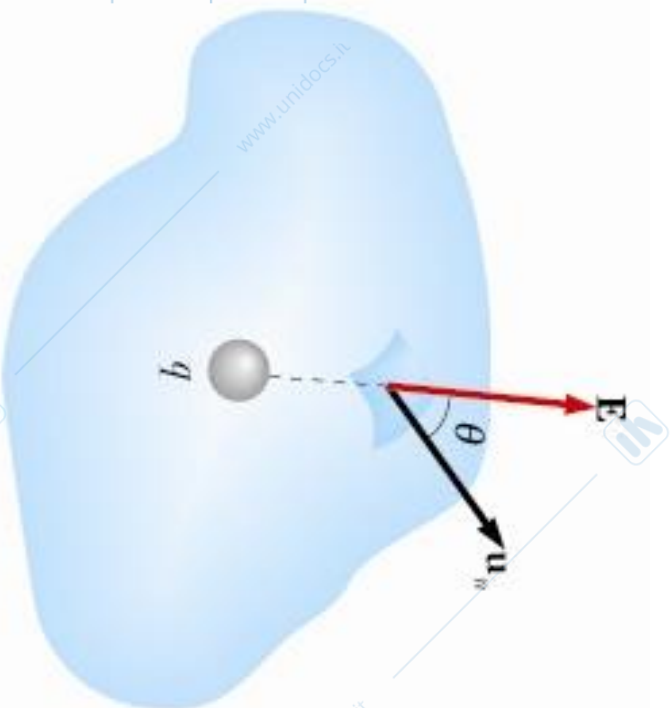
dove  $\Omega$  è l'angolo solido sotto cui è visto dalla carica sorgente  $q$  il contorno della superficie  $\Sigma$ .

$$\phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

Calcolo del flusso del campo elettrostatico  $\vec{E}$  attraverso un superficie chiusa, distinguendo due casi:

- 1) carica  $q$  interna alla superficie chiusa  $\Sigma$
- 2) carica  $q$  esterna alla superficie chiusa  $\Sigma$ .

## 1) carica $q$ interna alla superficie chiusa $\Sigma$



Tutti i contributi  $\vec{E} \cdot \vec{n}_n d\Sigma$  si sommano in quanto hanno sempre lo stesso segno (positivo se la carica  $q$  è positiva, negativo in caso contrario) in qualsiasi punto della superficie  $\Sigma$  e otteniamo:

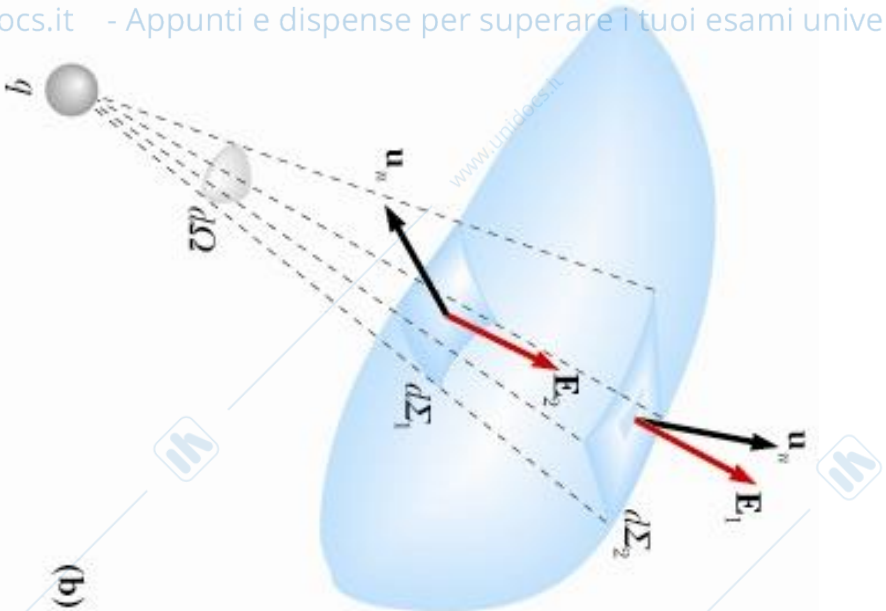
$$\phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

in quanto l'angolo solido totale sotto cui è vista una superficie chiusa da un punto al suo interno è  $4\pi$ .

## 2) carica $q$ esterna alla superficie chiusa $\Sigma$ .

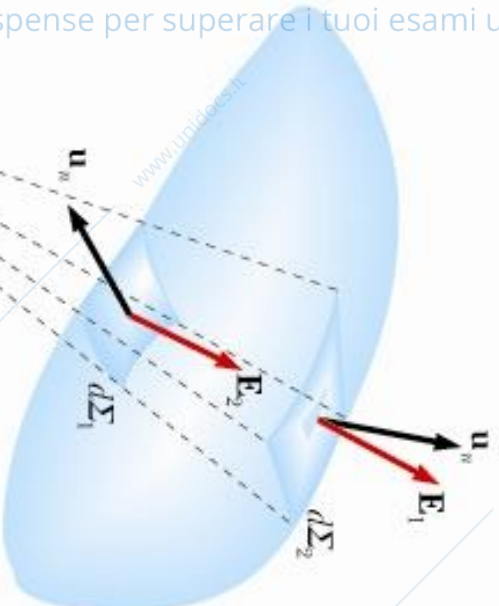
Consideriamo un cono elementare che sottende l'angolo solido  $d\Omega$  e che stacca sulla superficie chiusa  $\Sigma$  due elementi  $d\Sigma_1$  (in entrata) e  $d\Sigma_2$  (in uscita)

L'orientazione della normale è tale che su  $d\Sigma_1$  (in entrata)  $\vec{E}_1 \cdot \vec{u}_n d\Sigma_1 < 0$  e su  $d\Sigma_2$  (in uscita)  $\vec{E}_2 \cdot \vec{u}_n d\Sigma_2 > 0$  ( $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$  sono i valori del campo elettrostatico  $\vec{E}$  in corrispondenza dei due elementi di superficie  $d\Sigma_1$  e  $d\Sigma_2$ ).



## 2) carica $q$ esterna alla superficie chiusa $\Sigma$ .

Consideriamo un cono elementare che sottende l'angolo solido  $d\Omega$  e che stacca sulla superficie chiusa  $\Sigma$  due elementi  $d\Sigma_1$  (in entrata) e  $d\Sigma_2$  (in uscita)



L'orientazione della normale è tale che su  $d\Sigma_1$  (in entrata)  $\vec{E}_1 \cdot \vec{u}_n d\Sigma_1 < 0$  e su  $d\Sigma_2$  (in uscita)  $\vec{E}_2 \cdot \vec{u}_n d\Sigma_2 > 0$  ( $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$  sono i valori del campo elettrostatico  $\vec{E}$  in corrispondenza dei due elementi di superficie  $d\Sigma_1$  e  $d\Sigma_2$ ).

I flussi  $d\phi_1(\vec{E})$  e  $d\phi_2(\vec{E})$  attraverso i due elementi di superficie  $d\Sigma_1$  e  $d\Sigma_2$  sono:

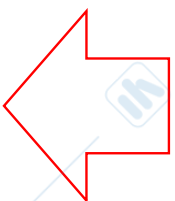
$$\begin{aligned} d\phi_1(\vec{E}) &= \vec{E}_1 \cdot \vec{u}_n d\Sigma = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega, & d\phi_2(\vec{E}) &= \vec{E}_2 \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = -d\phi_1(\vec{E}) \\ \Rightarrow d\phi_1(\vec{E}) + d\phi_2(\vec{E}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{(b)}$$

Integrando su tutta la superficie  $\Sigma$  chiusa si ottiene:

$$\phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = 0$$

Il flusso totale, attraverso una superficie chiusa, del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme  $q$  vale:

- 1)  $\frac{q}{\epsilon_0}$  se la carica  $q$  risulta interna alla superficie chiusa
- 2) 0 se la carica  $q$  risulta esterna alla superficie chiusa



## Caso gravitazionale (massa puntiforme m)

Utilizzando lo stesso metodo di prima si ottiene:

$$\vec{G}(P) = G(r) \cdot \vec{u}_r = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$$

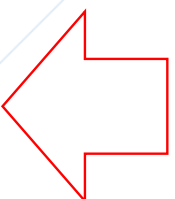
$$\phi(\vec{G}) = \int_{\Sigma} -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} -\gamma \frac{m}{r^2} \cos \theta d\Sigma = \int_{\Sigma} -\gamma m \frac{d\Sigma_0}{r^2} = -\gamma m \int_{\Sigma} d\Omega$$

Calcolo del flusso del campo gravitazionale  $\vec{G}$  attraverso una superficie chiusa, distinguendo due casi:

1) massa  $m$  interna alla superficie chiusa  $\Sigma$

2) massa  $m$  esterna alla superficie chiusa  $\Sigma$ .

$$\phi(\vec{G}) = -\gamma m \int_{\Sigma} d\Omega$$



1) nel primo caso (massa  $m$  interna) otteniamo:  $\phi(\vec{G}) = -\gamma m 4\pi$

2) nel secondo caso (massa  $m$  esterna) otteniamo:  $\phi(\vec{G}) = 0$

I risultati ottenuti per una singola carica puntiforme o una singola massa puntiforme si possono estendere a sistemi discreti di cariche puntiformi o masse puntiformi utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti e la proprietà additiva degli integrali:

1) caso elettrostatico: il flusso totale, attraverso una superficie chiusa, del campo elettrostatico generato da un sistema di cariche puntiformi è dato da:

$$\phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n}_n d\Sigma = \oint_{\Sigma} \left( \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \right) \cdot \vec{n}_n d\Sigma = \sum_{i=1}^n \oint_{\Sigma} \vec{E}_i \cdot \vec{n}_n d\Sigma$$

ciascun integrale  $\oint_{\Sigma} \vec{E}_i \cdot \vec{n}_n d\Sigma$  vale  $\frac{q_i}{\epsilon_0}$  se la carica  $q_i$  è interna alla superficie e vale 0 se la carica  $q_i$  è esterna alla superficie. Pertanto, riassumendo, si ottiene:

$$\phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n q_i \right)_{\text{int}}$$

essendo la somma estesa a tutte e sole le cariche interne alla superficie chiusa  $\Sigma$ .

I risultati ottenuti per una singola carica puntiforme o una singola massa puntiforme si possono estendere a sistemi discreti di cariche puntiformi o masse puntiformi utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti e la proprietà additiva degli integrali:

2) caso gravitazionale: il flusso totale, attraverso una superficie chiusa, del campo gravitazionale generato da un sistema di masse puntiformi è dato da:

$$\phi(\vec{G}) = \oint_{\Sigma} \vec{G} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \oint_{\Sigma} \left( \sum_{i=1}^n \vec{G}_i \right) \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \sum_{i=1}^n \oint_{\Sigma} \vec{G}_i \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

ciascun integrale  $\oint_{\Sigma} \vec{G}_i \cdot \vec{u}_n d\Sigma$  vale  $-\gamma 4\pi m_i$  se la massa  $m_i$  è interna alla superficie e vale 0

se la massa  $m_i$  è esterna alla superficie. Pertanto, riassumendo, si ottiene:

$$\phi(\vec{G}) = -\gamma 4\pi \left( \sum_{i=1}^n m_i \right)_{\text{int}}$$

essendo la somma estesa a tutte e sole le masse interne alla superficie chiusa  $\Sigma$ .

Nel caso in cui il campo (elettrostatico e gravitazionale) sia generato da una distribuzione continua di carica o massa caratterizzata dalla densità spaziale  $\rho(x, y, z)$  si ottiene:

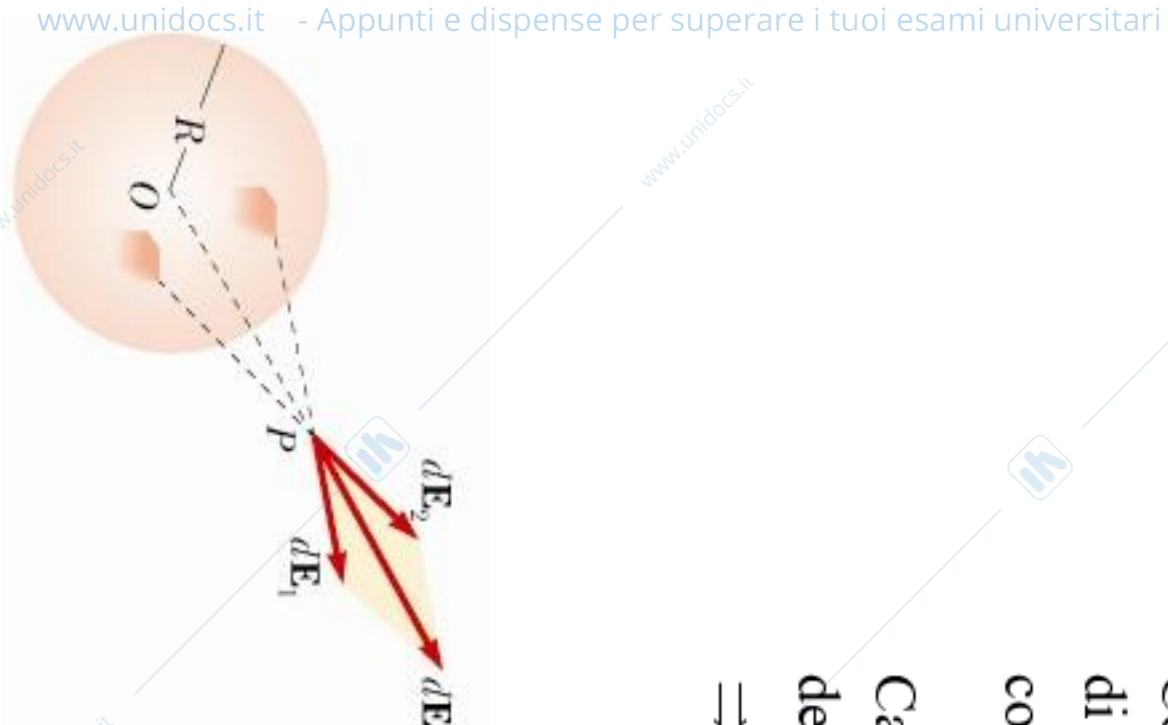
- 1) caso elettrostatico: 
$$\phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_q(x, y, z) d\tau$$
- 2) caso gravitazionale: 
$$\phi(\vec{G}) = -4\pi\gamma \int_{\tau} \rho_m(x, y, z) d\tau$$

dove in entrambi i casi gli integrali sono estesi al volume  $\tau$  (contenente la carica totale  $\int_{\tau} \rho_q(x, y, z) d\tau$  o la massa totale  $\int_{\tau} \rho_m(x, y, z) d\tau$ ) racchiuso dalla superficie chiusa  $\Sigma$ .

## **12. TEOREMA di GAUSS e DISTRIBUZIONE SFERICA di MASSA O CARICA**

Il Teorema di Gauss permette di calcolare facilmente il campo generato da una distribuzione sferica di massa o carica

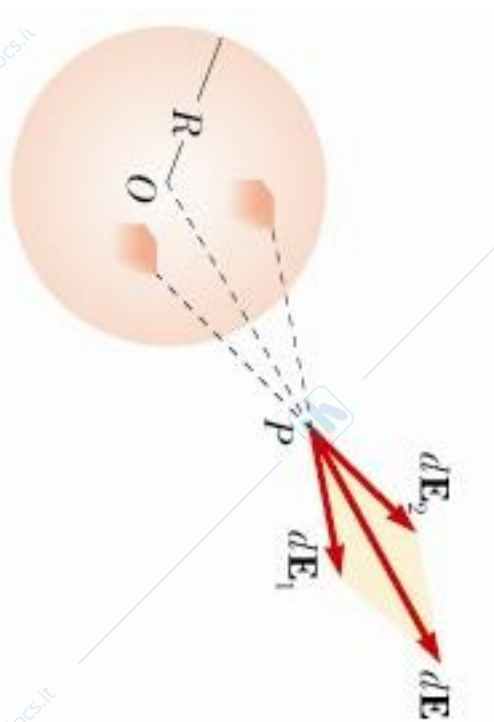
⇒ permette di verificare che il campo (gravitazionale o elettrostatico) generato da tale distribuzione sferica è pari a quello generato da una uguale massa o carica puntiforme posta al centro della distribuzione stessa.



Consideriamo una distribuzione sferica di raggio  $R$  di massa o di carica distribuita con densità spaziale  $\rho_m(x,y,z)$  o  $\rho_q(x,y,z)$  costante (distribuzione sferica uniforme).

Calcoliamo il campo gravitazionale o elettrostatico nei punti dello spazio esterni alla distribuzione stessa:

$\Rightarrow$  sia il campo gravitazionale che il campo elettrostatico nel punto  $P(r)$  distante  $r > R$  dal centro della distribuzione sono radiali in quanto somma di contributi a due a due simmetrici e uguali in modulo la cui risultante è radiale.



In qualsiasi altro punto che ha la stessa distanza di P dal centro della distribuzione la situazione è la stessa.

⇒ il campo ha modulo costante su una superficie sferica di raggio r, è ortogonale a questa e ha verso entrante (campo gravitazionale) e entrante o uscente a secondo del segno della carica (campo elettrostatico):

$$\vec{G}(P) = G(r) \cdot \vec{u}_r ; \quad \vec{E}(P) = E(r) \cdot \vec{u}_r$$

Applichiamo il Teorema di Gauss considerando una superficie chiusa  $\Sigma$  rappresentata da una sfera di raggio  $r > R$  con centro nel centro della distribuzione sferica (di massa o di carica) e otteniamo:

$$\phi(\vec{G}) = \oint_{\Sigma} G(r) \cdot \vec{n}_r \cdot \vec{n}_n d\Sigma = G(r) \oint_{\Sigma} d\Sigma = G(r) 4\pi r^2 = -\gamma \frac{m}{r^2} \quad \text{da cui } G(r) = -\gamma \frac{m}{r^2} \quad \text{e } \vec{G}(r) = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{n}_r$$

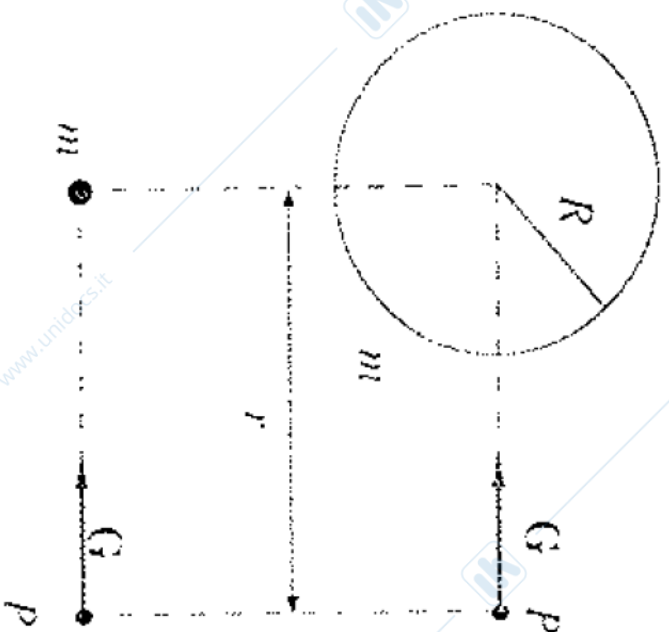
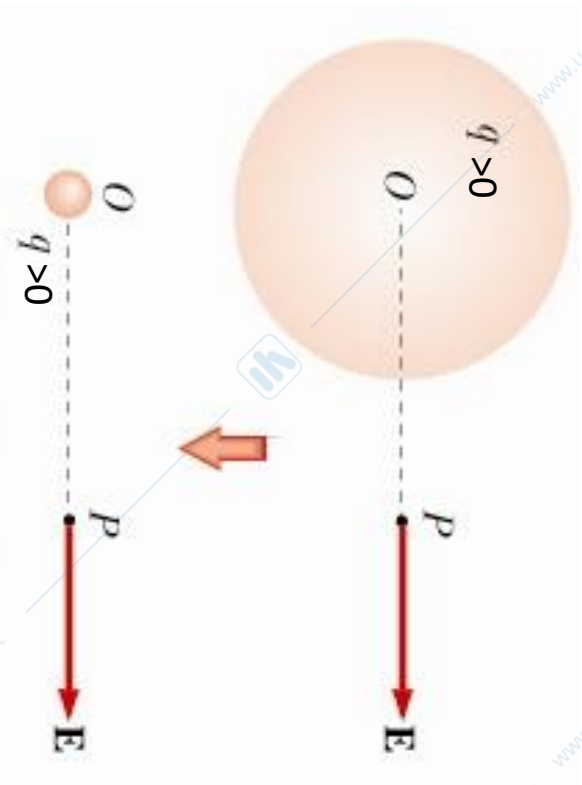
$$\phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} E(r) \cdot \vec{n}_r \cdot \vec{n}_n d\Sigma = E(r) \oint_{\Sigma} d\Sigma = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{da cui } E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{e } \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{n}_r$$

dove  $\vec{n}_n$  è il versore normale alla superficie sferica  $\Sigma$  uscente dalla sfera stessa,  $m = \rho_m \tau$  è la massa totale e  $q = \rho_q \tau$  la carica totale contenute all'interno della distribuzione sferica di massa o carica di volume  $\tau = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

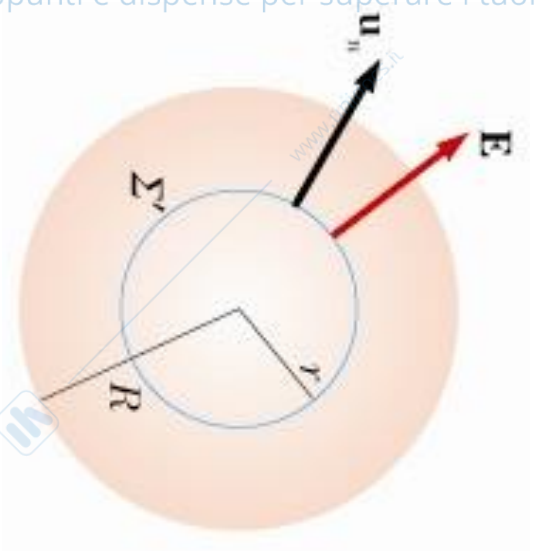
$$\vec{G}(r) = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Quindi il campo all'esterno di una distribuzione sferica uniforme di massa o carica è uguale a quello generato da una massa o carica puntiforme di egual valore concentrata nell'origine della distribuzione sferica stessa



Calcolo del il campo gravitazionale o elettrostatico all'interno della stessa distribuzione sferica uniforme di massa o carica presa in considerazione nel calcolo precedente.

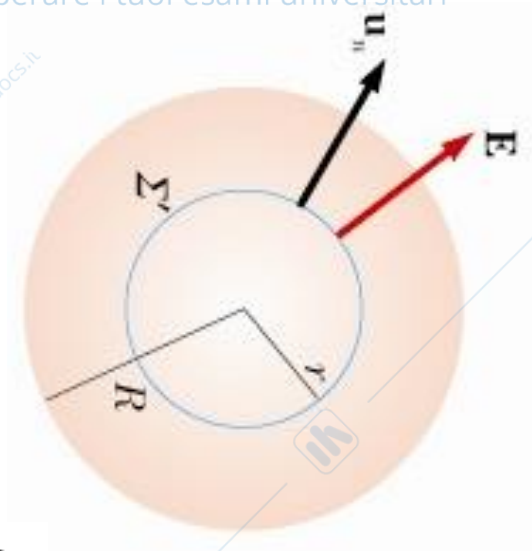


All'interno della distribuzione omogenea sferica ( $r < R$ ) esiste una massa  $m(r)$  o carica  $q(r)$  distribuita uniformemente così definite:

$$m(r) = \rho_m \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{m_{tot}}{\frac{4}{3} \pi R^3} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = m_{tot} \frac{r^3}{R^3}$$

$$q(r) = \rho_q \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{q_{tot}}{\frac{4}{3} \pi R^3} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = q_{tot} \frac{r^3}{R^3}$$

dove  $m_{tot}$  e  $q_{tot}$  sono la massa totale e la carica totale contenute nella distribuzione sferica uniforme di massa o carica.



Anche in questo caso il campo gravitazionale e quello elettrostatico sono a simmetria radiale (come nel caso discusso precedentemente)

$\Rightarrow$  il campo ha modulo costante su una superficie sferica di raggio  $r < R$ , è ortogonale a questa e ha verso entrante (campo gravitazionale) e entrante o uscente a secondo del segno della carica (campo elettrostatico):

$$\vec{G}(P) = G(r) \cdot \vec{n}_r; \quad \vec{E}(P) = E(r) \cdot \vec{n}_r$$

con  $P$  appartenente alla superficie sferica di raggio  $r < R$

Dal Teorema di Gauss applicato alla superficie sferica  $\Sigma$  di raggio  $r < R$  (interna alla distribuzione sferica di massa o carica) si ottiene:

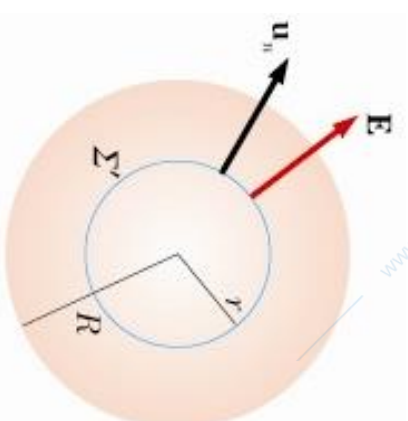
$$\oint_{\Sigma} \vec{G}(r) \cdot \vec{n}_r \cdot \vec{n}_n d\Sigma = G(r) \oint_{\Sigma} d\Sigma = G(r) 4\pi r^2 = -4\pi \gamma m(r)$$

$$\Rightarrow G(r) = -\gamma \frac{m(r)}{r^2} = -\gamma \frac{m_{\text{tot}}}{R^3} r \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{G}(r) = -\gamma \frac{m_{\text{tot}}}{R^3} r \cdot \vec{n}_r}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{E}(r) \cdot \vec{n}_r \cdot \vec{n}_n d\Sigma = E(r) \oint_{\Sigma} d\Sigma = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$

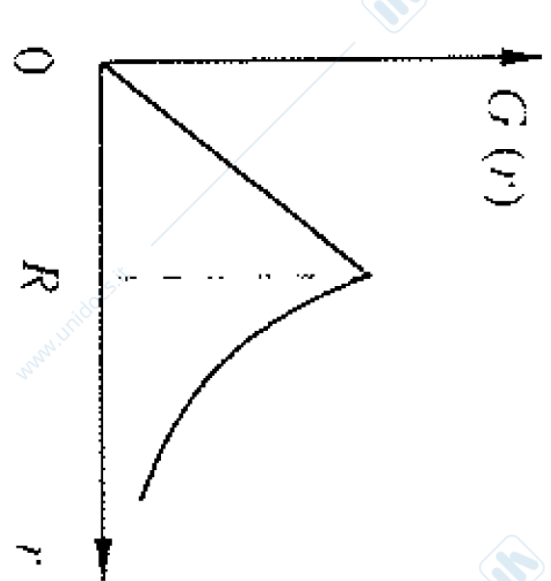
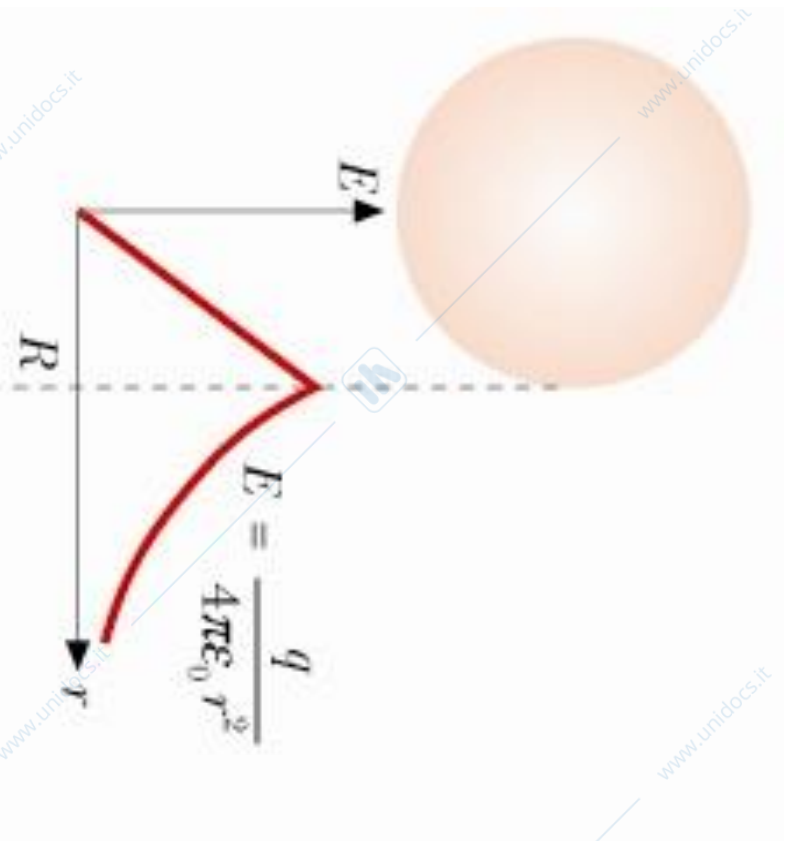
$$\Rightarrow E(r) = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{E}(r) = \frac{q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \cdot \vec{n}_r}$$

dove  $\vec{n}_n$  è il versore normale alla superficie sferica  $\Sigma$  uscente dalla sfera stessa



## In entrambi i casi

- ⇒ il campo all'interno della distribuzione sferica di massa o carica risulta lineare con la distanza  $r < R$ , partendo dal valore nullo per  $r = 0$
- ⇒ il campo all'esterno ( $r > R$ ), in modulo, decresce con il quadrato della distanza dal centro della distribuzione sferica.



## Calcoli del potenziale per entrambi i casi 1) $r > R$ e 2) $r < R$

$$\vec{G} = -\text{grad}(V) = -\vec{\nabla}V_G \quad \text{e} \quad \vec{E} = -\text{grad}(V) = -\vec{\nabla}V_E$$

$$\vec{G}(P) = G(r) \cdot \vec{u}_r \quad \text{e} \quad \vec{E}(P) = E(r) \cdot \vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad G(r) = -\frac{dV_G}{dr} \quad \text{e} \quad E(r) = -\frac{dV_E}{dr}$$

⇓

$$G(r)dr = -dV_G \quad \Rightarrow \quad \int dV_G = -\int G(r)dr \quad \Rightarrow \quad V_G = -\int G(r)dr$$

$$E(r)dr = -dV_E \quad \Rightarrow \quad \int dV_E = -\int E(r)dr \quad \Rightarrow \quad V_E = -\int E(r)dr$$

1)  $r > R$

$$V_G(r > R) = -\int G(r) dr = -\int -\gamma \frac{M_{\text{tot}}}{r^2} dr \Rightarrow -\gamma \frac{M_{\text{tot}}}{r} + c_G$$

$$V_E(r > R) = -\int E(r) dr = -\int \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \Rightarrow +\frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r} + c_E$$

dove  $c_G$  e  $c_E$  sono le costanti di integrazione

Nell'ipotesi che all'infinito ( $r \rightarrow \infty$ ) entrambi i potenziali si annullino in quanto a distanza infinita non c'è più interazione  $\Rightarrow c_G = 0$  e  $c_E = 0$

$$\Rightarrow \boxed{V_G(r > R) = -\gamma \frac{M_{\text{tot}}}{r}, \quad V_E(r > R) = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

2)  $r < R$ 

$$V_G(r < R) = -\int G(r) dr = -\int -\gamma \frac{m(r)}{r^2} dr \Rightarrow -\int -\gamma \frac{m_{\text{tot}}}{R^3} r dr \Rightarrow \gamma \frac{m_{\text{tot}}}{R^3} \frac{r^2}{2} + c_G$$

$$V_E(r < R) = -\int E(r) dr = -\int \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \Rightarrow -\int \frac{q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R^3} r dr \Rightarrow -\frac{q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{r^2}{2} + c_E$$

dove  $c'_G$  e  $c'_E$  sono le costanti di integrazione.

2)  $r < R$ 

$$V_G(r < R) = -\int G(r) dr = -\int -\gamma \frac{m(r)}{r^2} dr \Rightarrow -\int -\gamma \frac{m_{\text{tot}}}{R^3} r dr \Rightarrow \gamma \frac{m_{\text{tot}}}{R^3} \frac{r^2}{2} + c'_G$$

$$V_E(r < R) = -\int E(r) dr = -\int \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \Rightarrow -\int \frac{q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R^3} r dr \Rightarrow -\frac{q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{r^2}{2} + c'_E$$

dove  $c'_G$  e  $c'_E$  sono le costanti di integrazione.

Poiché il potenziale è una funzione continua e derivabile allora:

$$V_G(r > R) = V_G(r < R) \quad \text{e} \quad V_E(r > R) = V_E(r < R) \quad \text{per } r = R$$

$$-\gamma \frac{m_{\text{tot}}}{R} = \gamma \frac{m_{\text{tot}}}{R^3} \frac{R^2}{2} + c'_G \Rightarrow c'_G = -\gamma \frac{3m_{\text{tot}}}{2R}$$

$$\frac{q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{R^2}{2} + c'_E \Rightarrow c'_E = \frac{3q_{\text{tot}}}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow V_G(r < R) = -\int G(r) dr = -\int -\gamma \frac{m(r)}{r^2} dr \Rightarrow -\int -\gamma \frac{m_{\text{tot}}}{R^3} r dr \Rightarrow \gamma \frac{m_{\text{tot}}}{R^3} \frac{r^2}{2} - \gamma \frac{3m_{\text{tot}}}{2R}$$

$$\Rightarrow V_E(r < R) = -\int E(r) dr = -\int \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \Rightarrow -\int \frac{q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R^3} r dr \Rightarrow -\frac{q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{r^2}{2} + \frac{3q_{\text{tot}}}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Nel caso del campo elettrostatico per una distribuzione sferica di carica positiva si ha

