

6. Dinamica dei sistemi di punti materiali

6.1 Sistemi di particelle, forze interne ed esterne

La dinamica dei sistemi

Un *sistema di punti* è costituito da un insieme di n punti materiali soggetti ad interazioni reciproche e con il mondo esterno.

Il problema generale della dinamica consiste nel determinare la legge oraria per ciascuno di tali punti (anche se nei casi con $n \gg 2$ ciò risulta praticamente impossibile).

La *dinamica dei sistemi* si occupa invece di determinare le proprietà del moto del sistema nel suo complesso.

Def. Forze interne e forze esterne

Indicheremo le forze agenti sul punto i -esimo del sistema come:

$\vec{F}_i^{(I)}$ forze interne (dovute alle interazioni con gli altri punti del sistema)

$\vec{F}_i^{(E)}$ forze esterne (dovute alle interazioni con l'esterno, cioè con un altro sistema)

La *risultante* delle forze agenti sul punto i -esimo verrà indicata come \vec{F}_i , pari alla somma

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)}$$

della risultante $\vec{F}_i^{(I)}$ delle forze interne e della risultante $\vec{F}_i^{(E)}$ delle forze esterne.

Le forze interne sono quelle dovute alle interazioni con gli altri $n - 1$ punti del sistema:

$$\vec{F}_i^{(I)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{i,j}$$

dove con $\vec{F}_{i,j}$ abbiamo indicato la forza (interna) esercitata sull' i -esimo punto dal j -esimo punto.

Oss. Per la III legge della dinamica di Newton avremo che $\vec{F}_{j,i} = -\vec{F}_{i,j}$ e quindi la *risultante di tutte le forze interne è nulla*:

$$\vec{F}^{(I)} \equiv \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{i,j} = 0$$

Oss. Di conseguenza, *la somma di tutte le forze agenti sul sistema è pari alla risultante delle sole forze esterne*:

$$\vec{F} \equiv \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(I)} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(E)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(E)} = \vec{F}^{(E)}$$

6.2 Quantità di moto, I eq. cardinale della dinamica dei sistemi e teorema dell'impulso

Def. Quantità di moto di un sistema di n punti materiali

La *quantità di moto totale del sistema* è per definizione la somma delle quantità di moto dei singoli punti materiali:

$$\vec{p} \equiv \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

Osserviamo che in base alla II legge della dinamica di Newton, il moto di ciascun punto obbedisce all'equazione:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)} = m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \quad \forall i$$

Sommando sull'indice i tutte queste equazioni si ottiene:

$$\vec{F}^{(E)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Quest'ultima equazione esprime la **I Equazione Cardinale della Dinamica dei Sistemi**:

THR. In un sistema di riferimento inerziale, la risultante delle forze esterne applicate ad un sistema di punti materiali è pari alla derivata temporale della quantità di moto totale del sistema

$$\boxed{\vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Teorema dell'impulso

Se poi integriamo nel tempo ambo i membri otteniamo il **Teorema dell'impulso**:

Thr. L'impulso in un certo intervallo di tempo delle forze agenti su un sistema di punti materiali è uguale alla variazione della quantità di moto totale del sistema nello stesso intervallo di tempo.

$$\boxed{\vec{I}_{t_1, t_2}(\vec{F}^{(E)}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{(E)} dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)}$$

Principio di conservazione della quantità di moto

Thr. In un sistema di riferimento inerziale, un sistema di punti materiali isolato oppure soggetto ad un sistema di forze esterne con risultante nulla conserva la quantità di moto totale.

$$\boxed{\vec{F}^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{cost.}}$$

Cor. Più in generale, se si annulla la componente della risultante delle forze esterne lungo un dato asse, allora si conserva la componente della quantità di moto totale lungo quell'asse e viceversa:

$$F_z^{(E)} = 0 \Rightarrow p_z = \text{cost.}$$

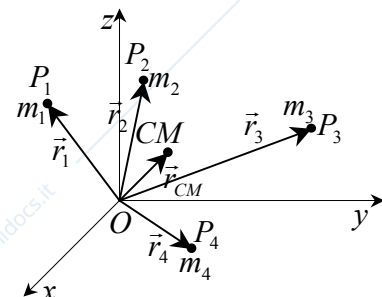
Oss. Notiamo infine che, in base al teorema dell'impulso, la quantità di moto di un sistema di punti materiali si conserva in un intervallo di tempo infinitesimo anche in presenza di una risultante delle forze esterne non nulla, purchè tale risultante sia non impulsiva. Vedremo che tale circostanza ricoprirà un ruolo chiave nello studio degli urti tra punti materiali.

6.3 Centro di massa e teorema del centro di massa

Centro di massa

Il *centro di massa*, che indicheremo con il simbolo CM , è un punto (fittizio) la cui posizione è la media delle posizioni dei punti materiali del sistema, pesate sulla loro massa.

Il vettore posizione corrispondente vale dunque:



$$\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M}, \text{ con } M = \sum_{i=1}^n m_i \text{ la massa totale del sistema.}$$

Teorema del centro di massa

Nota la risultante delle forze esterne, senza bisogno di conoscere le singole interazioni interne ed esterne, possiamo ricavare il moto del CM grazie alla I Equazione cardinale. Infatti, se deriviamo l'equazione che definisce il vettore posizione del centro di massa rispetto al tempo, otteniamo:

$$\vec{v}_{CM} \equiv \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{M} = \frac{\vec{p}}{M} \Rightarrow \vec{p} = M \cdot \vec{v}_{CM}$$

Oss. La quantità di moto totale è pari al prodotto della massa totale per la velocità del centro di massa.

Derivando ancora rispetto al tempo e tenendo conto della I Equazione cardinale si ottiene:

$$\vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M \cdot \vec{a}_{CM}$$

Siamo allora in grado di enunciare il seguente:

Thr. Teorema del centro di massa

In un sistema di riferimento inerziale, il centro di massa di un sistema di punti materiali si muove come un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema e soggetto alla risultante delle forze esterne applicate al sistema.

Oss. L'utilità del CM si comprende immediatamente alla luce del suddetto teorema, infatti il moto del CM , al contrario del moto dell' i -esimo punto del sistema, dipende solo dalla risultante delle forze esterne, non dalla configurazione di tali forze e neppure dalle forze interne.

Tale moto fornisce tuttavia solo delle *informazioni medie* sul sistema.

Oss. Dal teorema del centro di massa discende immediatamente una importante proprietà: se il sistema è isolato le forze esterne sono nulle e quindi il CM si muove di moto rettilineo uniforme oppure è in quiete in un sistema di riferimento inerziale.

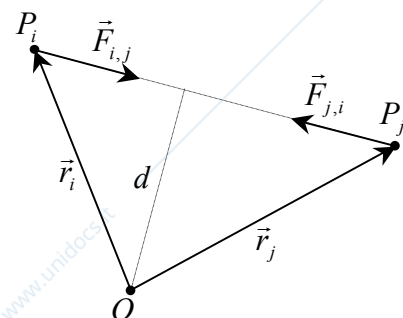
6.4 Momento angolare, II eq. cardinale della dinamica dei sistemi

Momento risultante delle forze

Indichiamo con il simbolo $\vec{\tau}_i$ il momento risultante delle forze agenti sull' i -esimo punto rispetto a un dato polo O (per brevità di notazione omettiamo il pedice O , assumendo ovunque il medesimo polo O , fisso in un sistema di riferimento inerziale); tale momento può essere scomposto nel risultante dei momenti delle forze interne e di quelle esterne, sempre rispetto al medesimo polo: $\vec{\tau}_i = \vec{\tau}_i^{(I)} + \vec{\tau}_i^{(E)}$.

Sommando sull'indice i i momenti risultanti delle forze interne otteniamo:

$$\vec{\tau}^{(I)} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j} =$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{j,i}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{i,j}) = \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n [(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{i,j}] = 0 \text{ perchè il vettore } \vec{r}_i - \vec{r}_j \text{ e il vettore } \vec{F}_{i,j} \text{ sono tra loro paralleli.}
 \end{aligned}$$

Le forze interne, infatti in base al terzo principio di Newton, sono a due a due uguali in modulo e direzione e contrarie in verso, ed hanno anche la stessa retta d'azione, perciò i rispettivi momenti si annullano a due a due: $\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j} = -\vec{r}_j \times \vec{F}_{j,i}$.

Di conseguenza, il momento risultante delle forze agenti su un sistema è pari al momento risultante delle sole forze esterne rispetto allo stesso polo:

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = \vec{\tau}^{(I)} + \vec{\tau}^{(E)} = \vec{\tau}^{(E)} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i^{(E)} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)}$$

Momento angolare e II equazione cardinale

Si definisce *momento della quantità di moto* o *momento angolare* di un sistema di punti rispetto al polo O la somma vettoriale dei momenti della quantità di moto dei singoli punti rispetto allo stesso polo:

$$\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

(ove di nuovo si è ommesso il pedice O per brevità di notazione).

Per ciascun punto materiale del sistema, vale la II equazione cardinale vista in precedenza, cioè

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{\tau}_i.$$

Sommando sull'indice i tale equazione otteniamo:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = \vec{\tau}.$$

Tenendo conto, inoltre, che il momento risultante delle forze agenti sul sistema è pari al momento risultante delle sole forze esterne, risulta:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(E)}}$$

Tale equazione prende il nome di *II Equazione cardinale* per i sistemi di punti materiali ed afferma che:

La derivata temporale del momento della quantità di moto di un sistema di punti rispetto ad un dato polo fisso è uguale al momento risultante, rispetto allo stesso polo, delle forze esterne applicate al sistema.

Oss. Un sistema è *isolato* se si annullano sia la risultante delle forze esterne, sia il momento risultante delle forze esterne. In generale il fatto che la risultante delle forze esterne sia nulla *non implica* che si annulli anche il momento risultante delle forze esterne:

$$\vec{F}^{(E)} = 0 \not\Rightarrow \vec{\tau}^{(E)} = 0$$

Per un sistema isolato si conservano sia la quantità di moto sia il momento della quantità di moto.

II Equazione cardinale rispetto ad un polo mobile

Consideriamo ora un polo O che si muove con velocità \vec{v}_O in un sistema di riferimento inerziale.

Il momento angolare di P rispetto ad O vale:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} \quad ; \quad \vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_O \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_P}{dt} - \frac{d\vec{r}_O}{dt} = \vec{v}_P - \vec{v}_O$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{v}_P - \vec{v}_O) \times \vec{p} + \vec{\tau} = -\vec{v}_O \times \vec{p} + \vec{\tau}$$

essendo $\vec{v}_P \parallel \vec{p} \Rightarrow \vec{v}_P \times \vec{p} = 0$.

In conclusione, la II equazione cardinale della dinamica rispetto ad un polo mobile con velocità \vec{v}_O diventa, per un singolo punto materiale:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} + \vec{v}_O \times \vec{p} = \vec{\tau}}$$

Per un sistema di punti materiali tale equazione varrà per ciascun punto del sistema. Sommando su tutti i punti, otteniamo banalmente:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} + \vec{v}_O \times \vec{p} = \vec{\tau}^{(E)}}$$

con ovvio significato dei simboli utilizzati per le grandezze totali (quantità di moto e momento angolare) del sistema.

Oss. Se il polo mobile coincide con il centro di massa del sistema di punti materiali ($O = CM$):

$$\vec{v}_{CM} \times \vec{p} = \vec{v}_{CM} \times M \vec{v}_{CM} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{CM}^{(E)}$$

Il centro di massa è un polo mobile ma gode di proprietà particolari!

Energia cinetica di un sistema

Si definisce energia cinetica di un sistema di punti materiali (in un dato SdR) la somma delle energie cinetiche di tutti i punti rispetto allo stesso sistema di riferimento:

$$E_c = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

