# DINAMICA DEL PUNTO

# Dinamica

La dinamica si occupa di studiare le cause del moto, studiando gli effetti che l'applicazione di una o più forze produce sul moto di un oggetto.

La variazione dello stato di quiete o del moto di un corpo dipende dalle interazioni che esso ha con altri oggetti o con l'ambiente esterno.

# Principi della dinamica

- La dinamica newtoniana si fonda su tre principi $\Rightarrow$ "le tre leggi di Newton":
- 1) **Principio di inerzia**: definisce cosa succede se non ci sono forze agenti (o la risultante delle forze è nulla) su un corpo;
- 2) **II Legge di Newton**: definisce cosa succede quando su un corpo agiscono delle forze;
- 3) **Principio di azione e reazione**: definisce cosa succede se un corpo esercita una forza su un altro corpo.

***Limiti di validità:***

- la dinamica newtoniana rappresenta un caso limite di teorie più generali (meccanica relativistica e meccanica quantistica);
- vale nei sistemi di riferimento inerziali, nei quali vale il principio di inerzia;
- le velocità non devono essere prossime a quella della luce;
- gli oggetti in studio non devono avere massa comparabile o inferiore a quella atomica

# Principi della dinamica

## 1) **Principio di inerzia**:

Un corpo non soggetto a forze (o con risultante delle forze nulla) non subisce cambiamenti del vettore velocità $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}=0\right)$, ossia resta in uno stato di quiete se era inizialmente fermo $\left(\vec{v}=0\right)$ oppure si muove di moto rettilineo uniforme $\left(\vec{v}=\text{costante}\right)$.

$$\Downarrow$$

L'assenza di forza (o con risultante delle forze nulla) non implica che non ci sia moto, ma implica che il vettore velocità non vari nel tempo (in direzione, verso e modulo).

$$\Downarrow$$

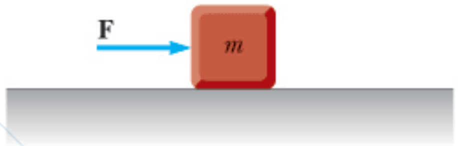
La variazione del vettore velocità nel tempo (direzione e/o verso e/o modulo) è dovuta all'azione di una o più forze.

# Principi della dinamica

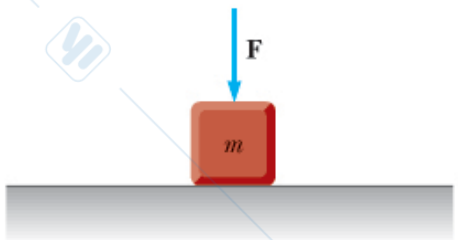
## 2) II Legge di Newton:

- La forza è una grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici.
- L'effetto di una forza e quello di imprimere un'accelerazione ad un oggetto.

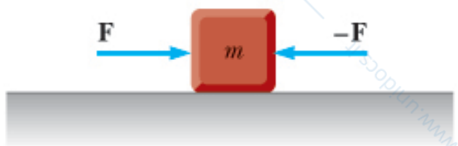
L'effetto di una forza cambia con la direzione:




L'effetto dell'applicazione della forza è un moto




L'effetto dell'applicazione della forza non è un moto ma una deformazione del corpo




Non si manifesta alcun moto (→ concetto di equilibrio)

# Principi della dinamica

## 2) II Legge di Newton

### Classificazione delle forze

- La forza è una grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici.

| |
|---|
| Interazione gravitazionale |
| Interazione elettromagnetica |
| Interazione nucleare forte |
| Interazione nucleare debole |

# Principi della dinamica

## 2) II Legge di Newton:

La formulazione quantitativa del legame tra la forza e lo stato del moto è data dalla legge di Newton:

$$\vec{F}=m\vec{a}$$

*m* = massa inerziale → inerzia dell'oggetto a variare il proprio stato di moto, ossia a modificare la propria velocità (in direzione, verso e modulo)

$\vec{a}$ = vettore accelerazione

$[F]=[M][L][T]^{-2} \rightarrow kg \cdot m \cdot s^{-2} = N$ (Newton)

N.B. $\vec{F}=m\vec{a}$ vale se la massa inerziale m è costante

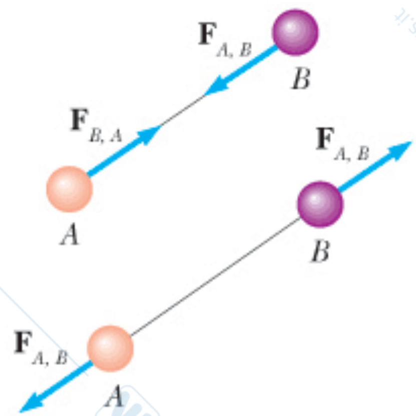
# Principi della dinamica

## 3) Principio di azione e reazione:

Le forze si presentano sempre in coppia:

se il corpo A esercita una forza $\vec{F}_{A,B}$ sul corpo B, il corpo B reagisce esercitando una forza $\vec{F}_{B,A}$ sul corpo A.
Le due forze hanno la stessa direzione, la stessa retta d'azione, lo stesso modulo e verso opposto, cioè sono uguali e contrarie

$$\vec{F}_{A,B} = -\vec{F}_{B,A}$$



# Principi della dinamica

## Quantità di moto, $\vec{p}$

Si definisce quantità di moto di un punto materiale il vettore:

$$\vec{p}=m\vec{v}$$

$[p]=[M][L][T]^{-1} \rightarrow kg \cdot m \cdot s^{-1} = N \cdot s$

$$\Rightarrow \vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Forma più generale della II Legge di Newton, valida anche se la massa non è costante

$$\Rightarrow \vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\frac{dm}{dt}\vec{v}+m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dm}{dt}\vec{v}+m\vec{a}$$

$\Rightarrow$ *Lo stato dinamico del punto è individuato dalla quantità di moto, l'applicazione di una forza determina la variazione nel tempo della quantità di moto*

# Principi della dinamica

## Impulso della forza, $\vec{J}$

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \vec{F}dt=d\vec{p} \rightarrow \vec{J}=\int_0^t \vec{F}dt=\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p}=\vec{p}-\vec{p}_0=\Delta\vec{p}$$

$[J]=[p]=[M][L][T]^{-1} \rightarrow kg\cdot m\cdot s^{-1}=N\cdot s$

**Teorema dell'impulso:** l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto (in direzione e/o verso e/o modulo)

$$\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{J}=0 \Rightarrow \Delta\vec{p}=0 \Rightarrow \vec{p}=\text{costante (in direzione, verso e modulo)}$$

$$\Downarrow$$

**Principio di conservazione della quantità di moto**

# Principi della dinamica

## Indipendenza delle azioni simultanee

Se più forze $\vec{F}_i$ agiscono su un punto materiale: $\vec{R}=\sum_i \vec{F}_i$

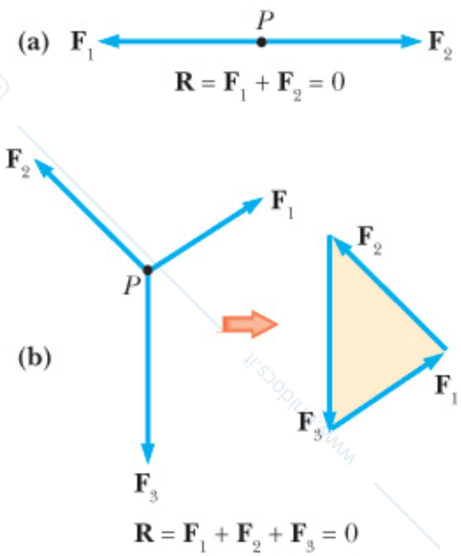
ciascuna agisce indipendentemente dalle altre comunicando al corpo un'accelerazione $\vec{a}_i=\vec{F}_i/m$

$$\vec{a}=\sum_i \vec{a}_i=\sum_i \left(\vec{F}_i/m\right)$$

$\Rightarrow$ **indipendenza delle azioni simultanee**

Dallo studio del moto del punto materiale si possono ottenere informazioni solo sulla risultante di tutte le forze in gioco e non sulle singole forze.

In particolare affermare che la forza agente su un corpo è nulla, non significa necessariamente che sul punto non agiscano forze ma che la somma delle forze risultante e nulla.



# Principi della dinamica

## Azione dinamica delle forze

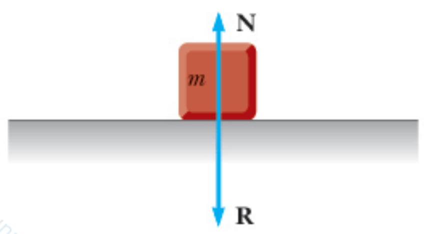
| | | |
|---|---|---|
| Moto rettilineo vario | $\vec{a}=\vec{a}(t)=a(t)\hat{u}_x$ | $\vec{F}=m\cdot\vec{a}(t)=F(t)\hat{u}_x$ |
| Moto rettilineo uniforme | $\vec{a}=0$ | $\vec{F}=0$ |
| Moto rettilineo uniformemente accelerato | $\vec{a}=\vec{a}_0=\text{costante}$ | $\vec{F}=\text{costante}=m\cdot\vec{a}_0$ |
| Moto piano curvilineo | $\vec{a}=\vec{a}_T+\vec{a}_N$ | $\vec{F}=m\cdot\vec{a}_T+m\cdot\vec{a}_N=m\dfrac{dv}{dt}\hat{u}_T+m\dfrac{v^2}{R}\hat{u}_N$ |

*Forza tangenziale*:
provoca la variazione del modulo della velocità.

*Forza centripeta* :
ortogonale alla traiettoria, provoca la variazione della direzione della velocità

# Reazioni vincolari

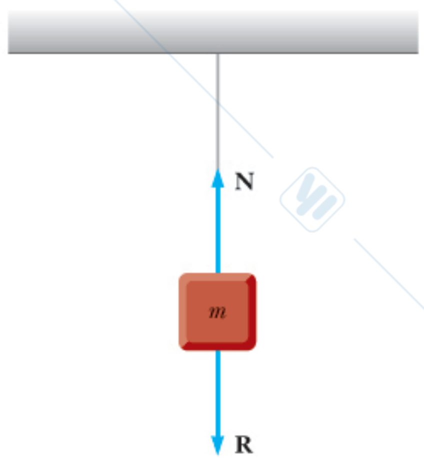
Se un corpo soggetto all'azione di una forza (o della risultante delle forze) rimane fermo → deve esserci una reazione dell'ambiente circostante → **reazione vincolare**



(a)

Il corpo di massa *m* risente dell'attrazione gravitazionale della Terra e preme la superficie del piano orizzontale. Poiché il corpo rimane fermo → il piano orizzontale reagisce generando una forza $\vec{N}$ uguale e contraria

$$\Rightarrow \vec{R}+\vec{N}=0$$



(b)

Il corpo di massa *m* è appeso al soffitto tramite un filo. Il corpo risente dell'attrazione gravitazionale della Terra, ma rimane fermo → il sistema filo-punto di aggancio al soffitto reagisce generando una forza $\vec{N}$ uguale e contraria

$$\Rightarrow \vec{R}+\vec{N}=0$$

# Forza peso

Forza costante, indicata con $\vec{P}$, dovuta all'attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra su un corpo. Sperimentalmente si osserva che in uno stesso luogo tutti i corpi, qualunque sia la massa inerziale, assumono, se lasciati liberi, la stessa accelerazione (detta di *gravità*) diretta verticalmente verso il suolo il cui modulo, che varia leggermente da luogo a luogo della Terra, vale in media $g = 9{,}8\ m/s^2$

$$\vec{P}=m\vec{g}$$

Attenzione:
- la massa m è uno scalare (es. $m = 10$ kg)
- il peso (o forza peso) è un vettore (es. $|\vec{P}|=mg=98.1\ N$ )

# La sensazione di peso

Un corpo di massa *m,* posto sul pavimento e in equilibrio statico, esercita una forza, pari alla sua forza peso, sul pavimento e risente della reazione vincolare del pavimento stesso. E' questa reazione, applicata per esempio al nostro corpo, che ci dà la sensazione di peso.


$$\vec{N}+m\vec{g}=0 \rightarrow N\hat{u}_z - mg\hat{u}_z = 0 \rightarrow N=mg$$

# La sensazione di peso

Caso 1) Una persona si trova all'interno di un ascensore che si muove verticalmente verso l'alto con accelerazione $\vec{a}=a\hat{u}_z$ $(a > 0)$

$$\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a} \rightarrow N\hat{u}_z-mg\hat{u}_z=ma\hat{u}_z \rightarrow N\hat{u}_z=ma\hat{u}_z+mg\hat{u}_z \rightarrow N=m(a+g)$$


$\Rightarrow$ Si ha una sensazione di aumento di peso

$\Rightarrow$ Una bilancia posta sotto la persona darebbe una lettura maggiore di quando l'ascensore è fermo

N.B. se fosse $\vec{a} = 0$ (ossia $\vec{v}$ = costante)

$$\vec{N}+m\vec{g}=0 \rightarrow N\hat{u}_z=mg\hat{u}_z \rightarrow N=mg$$

# La sensazione di peso

Caso 2) Una persona si trova all'interno di un ascensore che si muove verticalmente verso il basso con accelerazione $\vec{a}=a\hat{u}_z=-|a|\hat{u}_z$

$$\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a} \rightarrow N\hat{u}_z-mg\hat{u}_z=-m|a|\hat{u}_z \rightarrow N\hat{u}_z=mg\hat{u}_z-m|a|\hat{u}_z \rightarrow N=m(g-|a|)>0$$


$\Rightarrow$ Si ha una sensazione di diminuzione di peso

$\Rightarrow$ Una bilancia posta sotto la persona darebbe una lettura minore di quando l'ascensore è fermo

Se fosse $\vec{a}=\vec{g}$

$$\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a}=m\vec{g} \rightarrow N\hat{u}_z-mg\hat{u}_z=-mg\hat{u}_z \rightarrow N=0$$

$\Rightarrow$ Non c'è sensazione di peso

Se fosse $|\vec{a}|>|\vec{g}|$

$$\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a} \rightarrow N\hat{u}_z=mg\hat{u}_z-m|a|\hat{u}_z \rightarrow N=m(g-|a|)<0$$

$\Rightarrow$ Si ha il distacco del corpo dal pavimento dell'ascensore

**Esempio**

Una massa (puntiforme) $m$ = 0.8 kg, inizialmente in quiete sopra un piano orizzontale, è sottoposta all'azione di una forza $\mathbf{F}_1$ avente la direzione e il verso dell'asse x, essendo l'asse x relativo al piano orizzontale, e modulo $F_1$ = 16 N. Dopo un tempo $t_1$ = 3 s cessa l'azione di $\mathbf{F}_1$ e si osserva che la massa rallenta uniformemente fermandosi all'istante $t_2$ = 9 s. Calcolare:

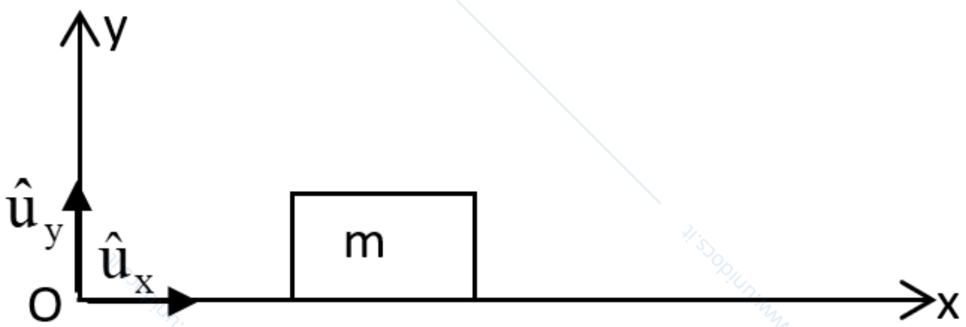
1) il modulo della forza $\mathbf{F}_2$ parallela all'asse x che agisce durante la frenata e
2) lo spazio totale percorso.

**Esempio**

Una massa (puntiforme) $m = 0.8$ kg, inizialmente in quiete sopra un piano orizzontale, è sottoposta all'azione di una forza $\mathbf{F}_1$ avente la direzione e il verso dell'asse x, essendo l'asse x relativo al piano orizzontale, e modulo $F_1 = 16$ N. Dopo un tempo $t_1 = 3$ s cessa l'azione di $\mathbf{F}_1$ e si osserva che la massa rallenta <u>uniformemente</u> fermandosi all'istante $t_2 = 9$ s. Calcolare:

1) il modulo della forza $\mathbf{F}_2$ parallela all'asse x che agisce durante la frenata e
2) lo spazio totale percorso.

Prendiamo un sistema di riferimento cartesiano (O, $x$, $y$) centrato nella posizione della massa $m$ all'istante $t = 0$, con l'asse $x$ sul piano orizzontale e verso che segue il moto della massa e l'asse $y$ (perpendicolare) rivolto verso l'alto. Il moto della massa $m$ risulta unidimensionale, lungo l'asse x.



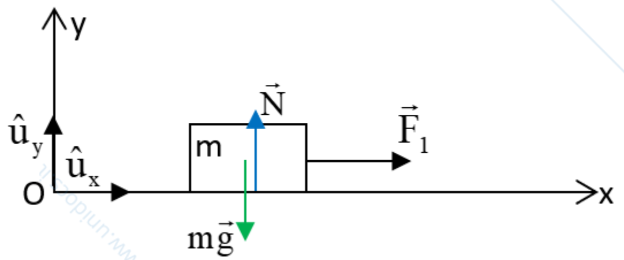

Lo spazio totale percorso dalla massa $m$ sarà la somma dello spazio $x_1$ percorso da $m$ soggetta alla forza $\vec{F}_1$ accelerante + lo spazio $x_2$ percorso da $m$ soggetta alla forza frenante $\vec{F}_2$

$$\Rightarrow x_{tot} = x_1 + x_2$$

**Metodo 1**

Determinazione di $x_1$

Sulla massa *m* agiscono verticalmente la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione vincolare del piano orizzontale $\vec{N}$, e orizzontalmente la forza accelerante $\vec{F}_1 = F_1\hat{u}_x$ con $F_1 > 0$




Dalla seconda legge di Newton: $m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_1 = ma_1\hat{u}_x$, poiché la massa non varia nel tempo. Se proiettiamo tale relazione vettoriale sull'asse x e sull'asse y otteniamo le seguenti due condizioni scalari:

$$\begin{cases} F_1 = ma_1 \\ N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{F_1}{m} = 20 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \text{moto rettilineo uniformemente accelerato;}$$

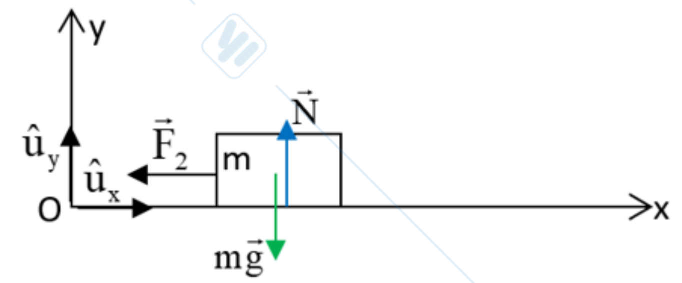
sapendo che $a_1 = \frac{dv_1}{dt} \Rightarrow a_1 dt = dv_1 \Rightarrow \int_0^t a_1 dt = \int_0^{v_1(t)} dv_1 \Rightarrow v_1(t) = a_1 t$

sapendo che $v_1 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_1 dt = dx \Rightarrow \int_0^t v_1 dt = \int_0^t a_1 t dt = \int_0^{x(t)} dx \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2$

$\Rightarrow x(t_1) = x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = 90\text{m}$ : spazio percorso dalla massa *m* soggetta alla forza $\vec{F}_1$.

<u>Determinazione di $x_2$</u>

Sulla massa *m* agiscono verticalmente la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione vincolare del piano orizzontale $\vec{N}$, e orizzontalmente la forza frenante $\vec{F}_2 = F_2\hat{u}_x = -|F_2|\hat{u}_x$




Dalla seconda legge di Newton: $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_2 = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_2 = ma_2\hat{u}_x$, poiché la massa non varia nel tempo. Se proiettiamo tale relazione vettoriale sull'asse x e sull'asse y otteniamo le seguenti due condizioni scalari: $\begin{cases} F_2 = -|F_2| = ma_2 < 0 \\ N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow a_2 = \frac{-|F_2|}{m} =$ costante negativa poiché il problema afferma che "la massa rallenta <u>uniformemente"</u> $\Rightarrow$ moto rettilineo uniformemente decelerato

Sapendo che $a_2 = \frac{dv_2}{dt} \Rightarrow a_2 dt = dv_2 \Rightarrow \int_{t_1}^{t} a_2 dt = \int_{v_1(t=t_1)}^{v_2(t)} dv_2 \Rightarrow \Rightarrow v_2(t) = v_1(t = t_1) + a_2(t - t_1)$

$\Rightarrow v_2(t_2) = 0 = v_1(t = t_1) + a_2(t_2 - t_1) \Rightarrow a_2 = -\frac{v_1(t=t_1)}{(t_2 - t_1)} = \frac{-a_1 t_1}{(t_2 - t_1)} = -10\ m/s^2$ (decelerazione)

Sapendo che $v_2 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_2 dt = dx \Rightarrow \int_{t_1}^{t} v_2 dt = \int_{t_1}^{t} (v_1(t = t_1) + a_2(t - t_1)dt = \int_{x_1}^{x(t)} dx \Big|$

$\Rightarrow x(t) = x_1 + v_1(t = t_1)(t - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t - t_1)^2$

$$\Big| \Rightarrow x_2 = x(t_2) - x_1 = v_1(t = t_1)(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}|a_2|(t_2 - t_1)^2 = 180\text{m} \Big|$$

$\Rightarrow x_{tot} = x_1 + x_2 = 90\text{ m} + 180\text{ m} = 270\text{ m}$

Da notare che gli ultimi due passaggi potevano essere evitati calcolando direttamente $x(t_2) = 270$ m

## Calcolo del modulo di $\vec{F}_2$ :

$F_2 = ma_2 < 0 \;\Rightarrow\; |F_2| = |ma_2| = 8\text{N}$


www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

**Metodo 2**

1) Calcolo del modulo di $\vec{F}_2$ :

Utilizziamo il *Teorema dell'impulso.*

Consideriamo l'azione della forza $\vec{F}_1$ :

$\vec{J}_1 = \int_0^{t_1} \vec{F}_1 dt = \vec{F}_1 t_1 = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_1 - 0$ , essendo $\vec{F}_1$ costante (in direzione, verso e modulo)

Consideriamo l'azione della forza $\vec{F}_2$ :

$\vec{J}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 dt = \vec{F}_2 (t_2 - t_1) = \Delta\vec{p} = 0 - m\vec{v}_1 = -m\vec{v}_1$ , essendo $\vec{F}_2$ costante (in direzione, verso e modulo)

$$\Rightarrow \vec{F}_2 (t_2 - t_1) = -m\vec{v}_1 = -\vec{F}_1 t_1 \Rightarrow \vec{F}_2 = \frac{-\vec{F}_1 t_1}{t_2 - t_1}$$

in modulo: $\left|\vec{F}_2\right| = \frac{\left|\vec{F}_1\right| t_1}{t_2 - t_1} = 8\ \text{N}$

2) <u>Calcolo dello spazio totale $x_{tot}$ percorso</u>

$\vec{F}_1 = m\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_1 = a_1\hat{u}_x = \frac{\vec{F}_1}{m} = \frac{F_1\hat{u}_x}{m} \rightarrow a_1 = \frac{F_1}{m} = 20\ m/s^2 \Rightarrow$ moto rettilineo uniformemente accelerato

sapendo che $a_1 = \frac{dv_1}{dt} \Rightarrow a_1 dt = dv_1 \Rightarrow \int_0^t a_1 dt = \int_0^{v_1(t)} dv_1 \Rightarrow v_1(t) = a_1 t$

sapendo che $v_1 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_1 dt = dx \Rightarrow \int_0^t v_1 dt = \int_0^t a_1 t dt = \int_0^{x(t)} dx \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2$

$\Rightarrow x(t_1) = x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 90m$ : spazio percorso dalla massa *m* soggetta alla forza $\vec{F}_1$.

$\vec{F}_2 = m\vec{a}_2 \rightarrow \vec{a}_2 = a_2\hat{u}_x = \frac{\vec{F}_2}{m} = \frac{-|F_2|\hat{u}_x}{m} \rightarrow a_2 = \frac{-|F_2|}{m} = -10 \text{ m/s}^2 \Rightarrow$ moto rettilineo uniformemente decelerato

sapendo che $a_2 = \frac{dv_2}{dt} \Rightarrow a_2 dt = dv_2 \Rightarrow \int_{t_1}^{t} a_2 dt = \int_{v_1(t=t_1)}^{v_2(t)} dv_2 \Rightarrow \Rightarrow v_2(t) = v_1(t_1) + a_2(t - t_1) \Rightarrow$

$v_2(t_2) = 0 = v_1(t_1) + a_2(t_2 - t_1)$

sapendo che $v_2 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_2 dt = dx \Rightarrow \int_{t_1}^{t} v_2 dt = \int_{t_1}^{t} (v_1(t_1) + a_2(t - t_1)dt = \int_{x_1}^{x(t)} dx$

$\Rightarrow x(t) = x_1 + v_1(t_1)(t - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t - t_1)^2 = x_1 + v_1(t_1)(t - t_1) - \frac{1}{2}|a_2|(t - t_1)^2$

$\Rightarrow x_2 = x(t_2) - x_1 = v_1(t_1)(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}|a_2|(t_2 - t_1)^2 = 180\text{m}$

$\Rightarrow x_{tot} = x_1 + x_2 = 90 \text{ m} + 180 \text{ m} = 270 \text{ m}$

Da notare che gli ultimi due passaggi potevano essere evitati calcolando direttamente $x(t_2) = 270$ m

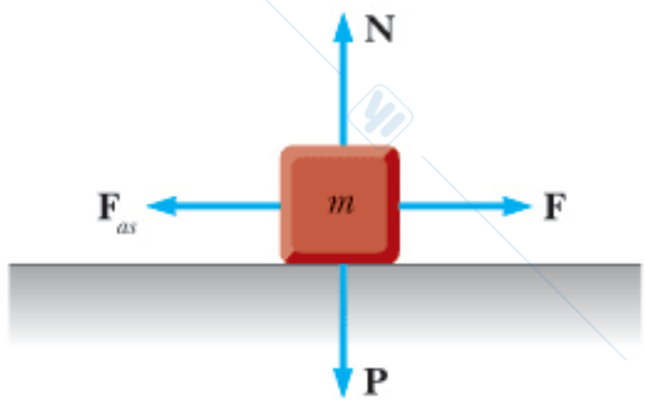
# Forza di attrito radente

## 1) Forza di attrito radente statico

Consideriamo un corpo fermo su di un piano orizzontale. Applichiamo una forza $\vec{F}$ parallela al piano di appoggio. Si osserva che il corpo non entra in movimento fino a che $|\vec{F}|$ non supera il valore $\mu_s N$, dove $\mu_s$ è il coefficiente di attrito statico e N è il modulo della componente normale al piano di appoggio della reazione vincolare del piano stesso.

$F \leq \mu_s N$ **Condizione di quiete**

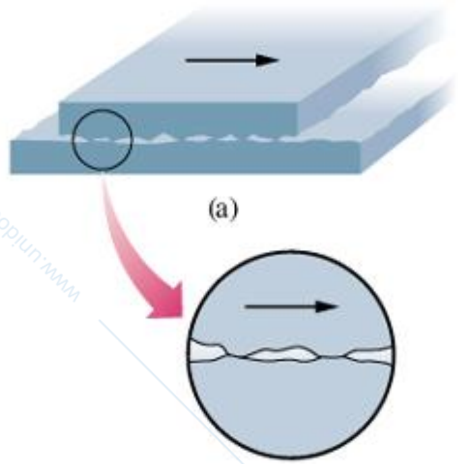
$F > \mu_s N$ **Condizione di moto**




Il vincolo è in grado di sviluppare una forza di attrito statico radente $\vec{f}_{as}$ uguale e contraria alla forza applicata $\vec{F}$ fino a quando $|\vec{F}|$ non supera il valore $\mu_s N$.

La forza di attrito statico $\vec{f}_{as}$ è sempre parallela al piano di appoggio e **non ha un valore prefissato, ma può variare fra zero e il valore massimo $\mu_s N$.** E' sempre tale da opporsi al moto.

# Forza di attrito radente



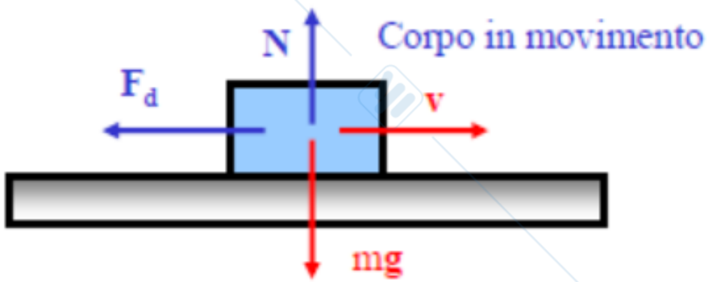

La forza di attrito statico è dovuta ai legami che si stabiliscono tra le molecole dell'oggetto e quelle del piano di appoggio nei punti in cui le superfici sono in contatto molto stretto.

# Forza di attrito radente

## 1) Forza di attrito radente dinamico

Quando $|\vec{F}| > \mu_s N$ il corpo entra in movimento lungo il piano di appoggio e si osserva una forza che si oppone al moto → la forza di attrito dinamico radente $\vec{f}_{ad}$ .
Questa forza ha sempre direzione uguale a quella della velocità dell'oggetto, verso contrario e modulo proporzionale alla reazione vincolare normale al piano su cui si muove l'oggetto:

$$\vec{f}_{ad} = \mu_d N \hat{u}_v \rightarrow |\vec{f}_{ad}| = \mu_d N$$




dove:
$\hat{u}_v$ versore con direzione e verso della velocità del corpo
$\mu_d$ coefficiente di attrito dinamico, con $\mu_d < \mu_s$

# Forza di attrito radente

N.B.

**- Le forze di attrito radente sono forze che si esercitano solo in presenza di moto (o tentativo di moto nel caso di attrito statico)**

**- Le forze di attrito radente non sono in grado di generare moto, ma solo di opporvisi**

# Forza di attrito radente

$\mu_s$ e $\mu_d$ dipendono dalla natura delle superfici, ma sono indipendenti dall'area (macroscopica) di contatto

| Superfici | $\mu_s$ | $\mu_d$ |
|---|---|---|
| Legno su pietra | 0.7 | 0.3 |
| Gomma su cemento asciutto | 0.65 | 0.5 |
| Gomma su cemento bagnato | 0.4 | 0.35 |
| Gomma su ghiaccio | 0.2 | 0.15 |
| Acciaio su acciaio asciutto | 0.15 | 0.12 |


www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

**Esempio**

Su di un piano orizzontale è presente una massa *m* su cui viene applicata un forza $\mathbf{F}_1$ che forma un angolo $\theta$ con l'orizzontale. Tra il piano orizzontale e la massa *m* è presente attrito caratterizzato da un coefficiente di attrito statico $\mu_s$ e un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d$. Determinare:

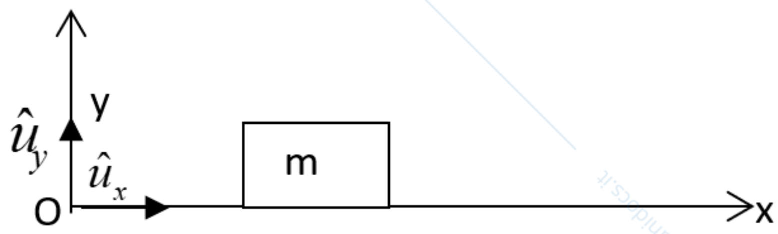
1) il massimo valore $F_{1,max}$ del modulo di $\mathbf{F}_1$ tale per cui la massa *m* non si muove;
2) il valore del modulo dell'accelerazione subita dalla massa *m* nel caso in cui $F_1>F_{1,max}$

**Esempio**

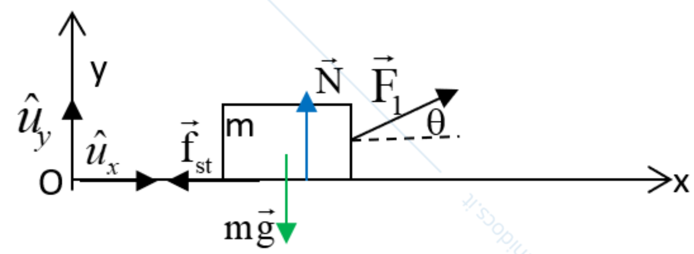
Su di un piano orizzontale è presente una massa *m* su cui viene applicata un forza $\mathbf{F}_1$ che forma un angolo $\theta$ con l'orizzontale. Tra il piano orizzontale e la massa *m* è presente attrito caratterizzato da un coefficiente di attrito statico $\mu_s$ e un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d$. Determinare:

1) il massimo valore $F_{1,max}$ del modulo di $\mathbf{F}_1$ tale per cui la massa *m* non si muove;
2) il valore del modulo dell'accelerazione subita dalla massa *m* nel caso in cui $F_1 > F_{1,max}$

Prendiamo un sistema di riferimento cartesiano (O, *x*, *y*) centrato nella posizione della massa *m* all'istante $t = 0$, con l'asse *x* sul piano orizzontale e verso che segue il moto della massa e l'asse *y* (perpendicolare) rivolto verso l'alto.



Al punto 1) siamo in condizioni statiche: la massa *m* è soggetta, oltre alla forza $\vec{F}_1$, alla forza peso $m\vec{g}$ verso il basso, la reazione vincolare $\vec{N}$ verso l'alto e la forza di attrito statico $\vec{f}_{st}$ verso sinistra.

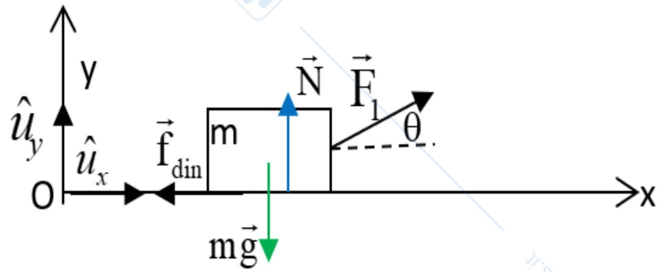



La condizione vettoriale di equilibrio statico è data da: $\vec{F}_1 + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_{st} = 0$. Se proiettiamo tale condizione vettoriale sull'asse x e sull'asse y otteniamo le seguenti due condizioni scalari:

$$\begin{cases} F_1 \cos\theta - f_{st} = 0 \\ F_1 \sin\theta + N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 \cos\theta = f_{st} \le \mu_s N = \mu_s (mg - F_1 \sin\theta) \\ N = mg - F_1 \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 (\cos\theta + \mu_s \sin\theta) \le \mu_s mg \\ N = mg - F_1 \sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1 \le \dfrac{\mu_s mg}{(\cos\theta + \mu_s \sin\theta)} \\ N = mg - F_1 \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad F_{1,max} = \frac{\mu_s mg}{(\cos\theta + \mu_s \sin\theta)}$$

Al punto 2) siamo in condizioni dinamiche: la massa *m* è soggetta, oltre alla forza $\vec{F}_1$, alla forza peso $m\vec{g}$ verso il basso, la reazione vincolare $\vec{N}$ verso l'alto e la forza di attrito dinamico $\vec{f}_{din}$ verso sinistra.



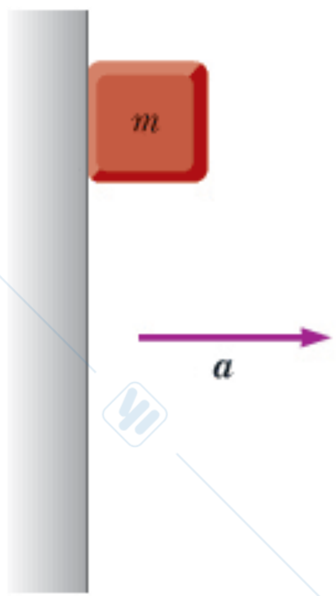

La seconda legge di Newton è data da: $\vec{F}_1 + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_{din} = m\vec{a}$. Se proiettiamo tale relazione vettoriale sull'asse x e sull'asse y otteniamo le seguenti due condizioni scalari:

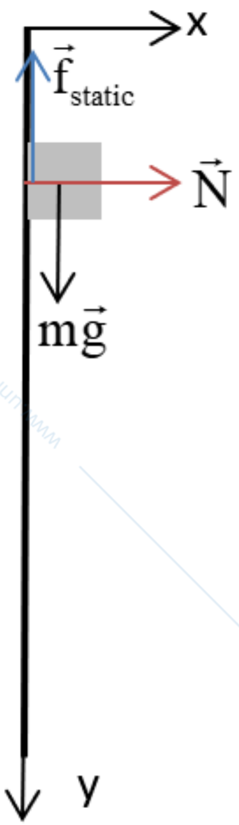
$$\begin{cases} F_1 \cos\theta - f_{din} = ma \\ F_1 \sin\theta + N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 \cos\theta - \mu_d N = ma \\ N = mg - F_1 \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 \cos\theta - \mu_d (mg - F_1 \sin\theta) = ma \\ N = mg - F_1 \sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{F_1(\cos\theta + \mu_d \sin\theta) - \mu_d mg}{m}$$

**Esempio– Blocco appoggiato ad una parete verticale**

Un blocco di massa $m$ è fermo rispetto ad una parete verticale che avanza con accelerazione nota $\vec{a}$. Determinare qual è il minimo valore del coefficiente di attrito statico, $\mu_{s,min}$, che permetta alla massa $m$ di restare ferma, rispetto alla parete verticale.






Prendiamo un sistema di riferimento cartesiano (x, y) con l'asse y parallelo alla parete ed orientato verso il basso e l'asse x orientato verso destra (concorde al movimento della parete).

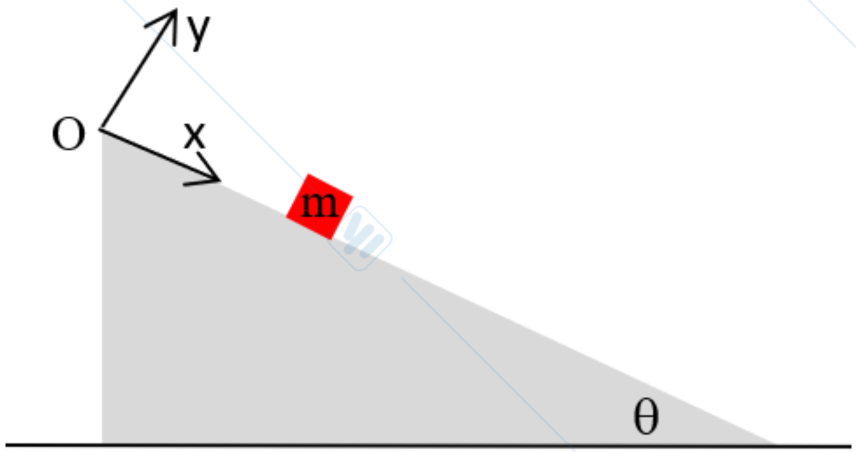
La parete verticale spinge il blocco verso destra $\Rightarrow$ il blocco ha la stessa accelerazione $\vec{a}$ della parete. Sul blocco agiscono le seguenti forze: la forza peso $m\vec{g}$ verso il basso, la forza di attrito statico $\vec{f}_{static}$ verso l'alto e la reazione vincolare della parete $\vec{N}$ verso destra $\Rightarrow$ $m\vec{g}+\vec{f}_{static}+\vec{N}=m\vec{a}=ma\,\hat{u}_x$

Proiettando tale relazione vettoriale lungo gli assi x e y si ottengono le seguenti relazioni scalari:

$$\begin{cases} mg - f_{static} = 0 \\ N = ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg = f_{static} \le \mu_s N = \mu_s ma \\ N = ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_s \ge \dfrac{g}{a} \\ N = ma \end{cases} \Rightarrow \mu_{s,min} = \frac{g}{a}$$

## Esempio: Piano inclinato

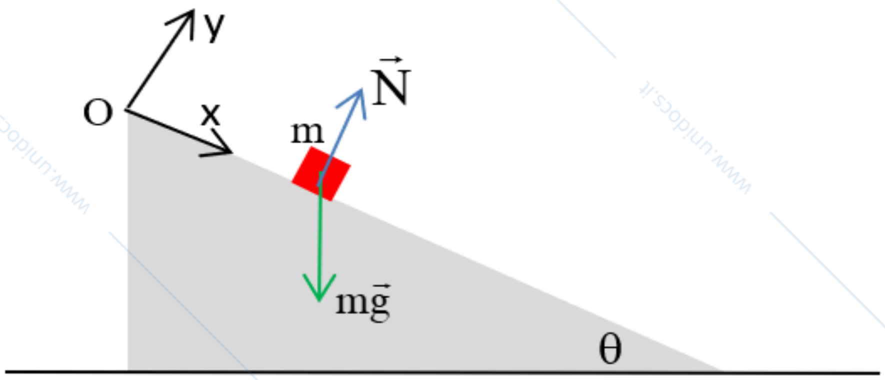
Un corpo puntiforme di massa $m$ si può muovere su piano inclinato di un angolo θ rispetto ad un piano orizzontale.
Prendiamo un sistema di riferimento cartesiano (O, x, y) centrato nello spigolo superiore del piano inclinato, con l'asse x parallelo al piano inclinato e orientato verso il basso e l'asse y orientato verso l'alto



**Esempio: Piano inclinato**

Caso 1) assenza di attrito tra la massa *m* e il piano inclinato

Sulla massa *m* agiscono la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione vincolare del piano inclinato di appoggio $\vec{N}$ (perpendicolare al piano inclinato e rivolta verso l'alto),




Dalla seconda legge di Newton: $m\vec{g} + \vec{N} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = ma\hat{u}_x$, poiché la massa non varia nel tempo.

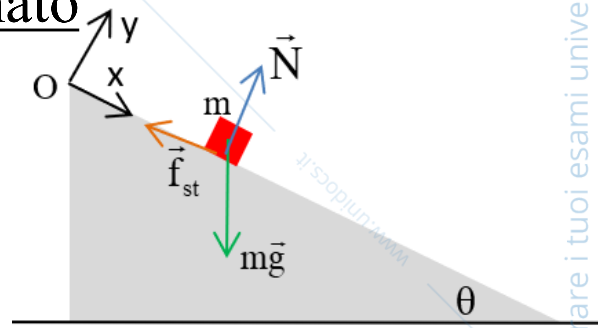
Se proiettiamo tale relazione vettoriale sull'asse x e sull'asse y otteniamo le seguenti due condizioni scalari:

$$\begin{cases} N - mg\cos\theta = 0 \\ mg\sin\theta = ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = mg\cos\theta \\ a = g\sin\theta = \cos\tan te \end{cases}$$

$\Rightarrow$ lungo l'asse x moto rettilineo uniformemente accelerato

**Esempio: Piano inclinato**

Caso 2) presenza di attrito statico tra la massa *m* e il piano inclinato



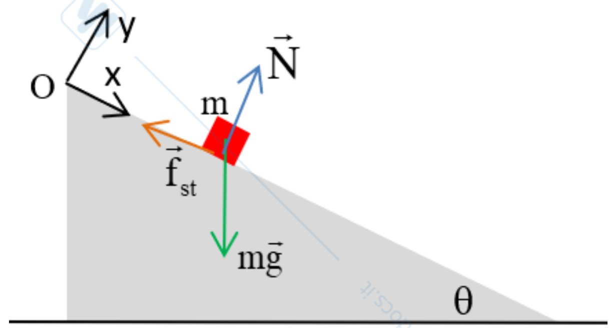

Sulla massa *m* agiscono la forza peso $m\vec{g}$, la reazione vincolare del piano inclinato di appoggio $\vec{N}$ (perpendicolare al piano inclinato e rivolta verso l'alto) e la forza di attrito statico $\vec{f}_{st}$ (parallela al piano inclinato e orientata verso l'alto)

Dalla seconda legge di Newton: $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_{st} = ma\hat{u}_x = 0$, poiché la massa non varia nel tempo.

Se proiettiamo tale relazione vettoriale sull'asse x e sull'asse y otteniamo le seguenti due condizioni scalari:

$$\begin{cases} N - mg\cos\theta = 0 \\ mg\sin\theta - f_{st} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = mg\cos\theta \\ f_{st} = mg\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = mg\cos\theta \\ f_{st} = mg\sin\theta \end{cases}$$




La massa *m* rimane ferma finché la forza di attrito statico non supera il suo limite massimo:

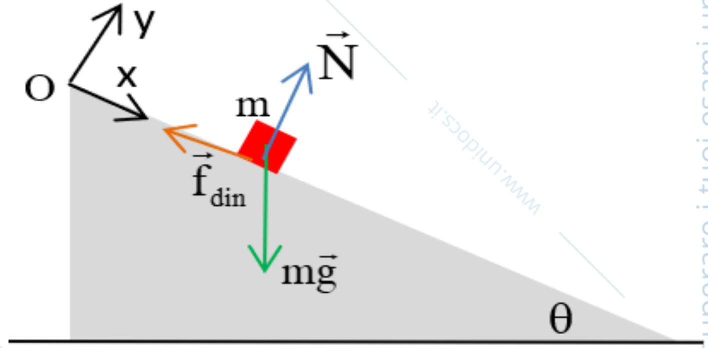
$f_{st,max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$

$\Rightarrow f_{st} = mg\sin\theta \leq f_{st,max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta \quad \Rightarrow \mu_s \geq tg\theta$

Questa risulta essere la condizione per l'equilibrio statico di un corpo appoggiato su di un piano inclinato in presenza di attrito

**Esempio: Piano inclinato**

Caso 3) presenza di attrito dinamico tra la massa *m* e il piano inclinato




Per avere moto occorre aumentare l'angolo di inclinazione θ in modo da non soddisfare più la condizione precedente.
Adesso sulla massa *m* agiscono la forza peso $m\vec{g}$, la reazione vincolare del piano inclinato di appoggio $\vec{N}$ (perpendicolare al piano inclinato e rivolta verso l'alto) e la forza di attrito dinamico $\vec{f}_{din}$ (parallela al piano inclinato e orientata verso l'alto).

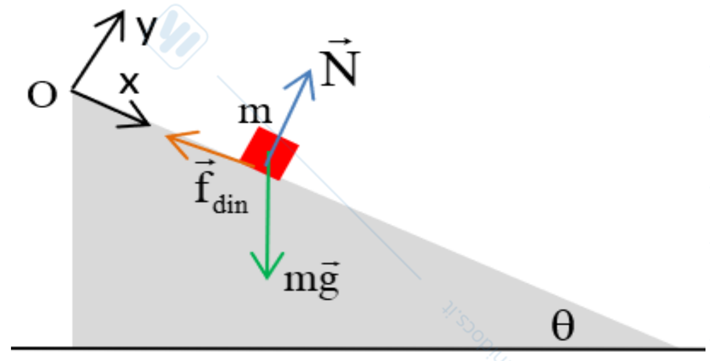
Dalla seconda legge di Newton: $m\vec{g}+\vec{N}+\vec{f}_{din}=ma\hat{u}_x$ , poiché la massa non varia nel tempo.

Se proiettiamo tale relazione vettoriale sull'asse x e sull'asse y otteniamo le seguenti due condizioni scalari:

$$\begin{cases} N-mg\cos\theta=0 \\ mg\sin\theta-f_{din}=mg\sin\theta-\mu_d N=mg\sin\theta-\mu_d mg\cos\theta=ma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N=mg\cos\theta \\ a=g\sin\theta-\mu_d g\cos\theta=g(\sin\theta-\mu_d\cos\theta)=\cos\tan te \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = mg\cos\theta \\ a = g\sin\theta - \mu_d g\cos\theta = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = \text{costante} \end{cases}$$




3a) Se la massa parte da ferma ($v_0 = 0$) $\Rightarrow$ $a = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) \geq 0$

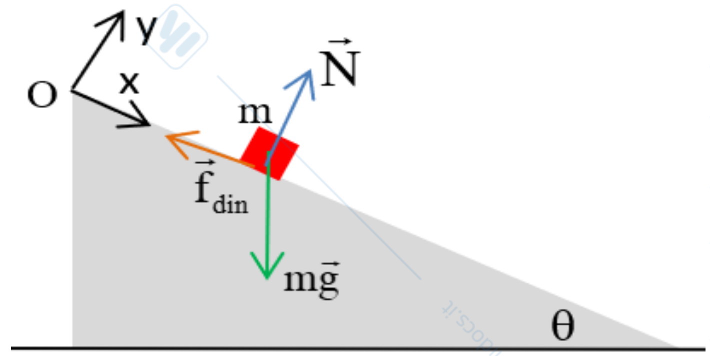
i) se $a = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = 0 \Rightarrow$ lungo l'asse x continua a non esserci moto

$\Rightarrow \mu_d = tg\theta$

ii) se $a = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) > 0 \Rightarrow$ lungo l'asse x moto rettilineo uniformemente accelerato

$\Rightarrow \mu_d < tg\theta$

$$\begin{cases} N = mg\cos\theta \\ a = g\sin\theta - \mu_d g\cos\theta = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = \text{costante} \end{cases}$$




3b) Se la massa all'istante iniziale sta scendendo lungo il piano con velocità $v_0$

i) se $a = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = 0 \Rightarrow$ lungo l'asse x moto rettilineo uniforme con velocità costante $v = v_0$

$\Rightarrow \mu_d = tg\theta$

ii) se $a = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) > 0 \Rightarrow$ lungo l'asse x moto rettilineo uniformemente accelerato

$\Rightarrow \mu_d < tg\theta$

iii) se $a = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) < 0 \Rightarrow$ lungo l'asse x moto rettilineo uniformemente decelerato

$\Rightarrow \mu_d > tg\theta$

# Forza elastica

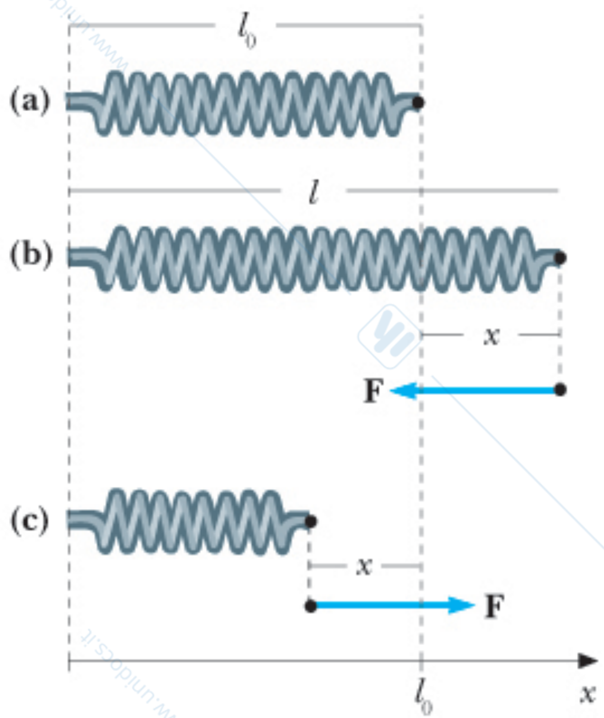
Si definisce **forza elastica** (unidimensionale) una forza di direzione costante (asse x), con verso sempre rivolto ad un punto O, chiamato centro, e con modulo proporzionale alla distanza da O.

$$\vec{F} = -k\Delta x \hat{u}_x \rightarrow |\vec{F}| = k|\Delta x|$$

k costante positiva detta costante elastica $\rightarrow [k]=[N/m]$

$\Delta x = x - x_O$

$\hat{u}_x$ versore dell'asse x, in cui avviene il moto




Si tratta di una forza di richiamo perché richiama la molla (in compressione o in estensione) verso la posizione di riposo e deve essere pensata come la reazione della molla alla forza che lo fa comprimere o estendere.

$l_0 \equiv x_0$ = lunghezza a riposo della molla

# Forza elastica

$$\vec{F}(t)=m\vec{a}(t) \Rightarrow \vec{a}(t)=\frac{\vec{F}(t)}{m}$$

$$\vec{F}(t)=-k\Delta x(t)\hat{u}_x \Rightarrow \vec{a}(t)=\frac{-k\Delta x(t)\hat{u}_x}{m}=-\frac{k}{m}\Delta x(t)\hat{u}_x$$

Se $x_0=0 \Rightarrow \vec{a}(t)==-\frac{k}{m}x(t)\hat{u}_x \Rightarrow$ **moto armonico semplice** $\Rightarrow \vec{a}(t)=-\omega^2 x(t)\hat{u}_x$

$$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\ [rad/m]\ ,\ T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ [s]\ ,\ \nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\ [Hz]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t)=A\mathrm{sen}(\omega t+\phi) \\ v(t)=\omega A\cos(\omega t+\phi) \\ a(t)=-\omega^2 A\mathrm{sen}(\omega t+\phi) \end{cases}$$

con le condizioni iniziali: $\begin{cases} x(t=0)=A\mathrm{sen}(\phi) \\ v(t=0)=\omega A\cos(\phi) \end{cases}$

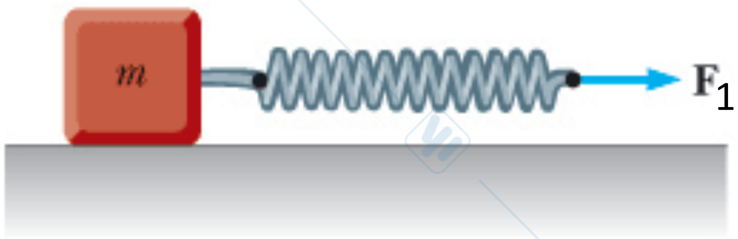
**Esempio**

Un corpo di massa $m$, posto su di un piano orizzontale, è attaccato all'estremo di una molla di costante elastica $k$. L'altro estremo della molla è soggetto ad una forza orizzontale $\mathbf{F}_1$ diretta verso destra e di modulo $F_1$ incognito. In tali condizioni la massa $m$ si muove a destra, senza oscillare, con accelerazione nota **a.**

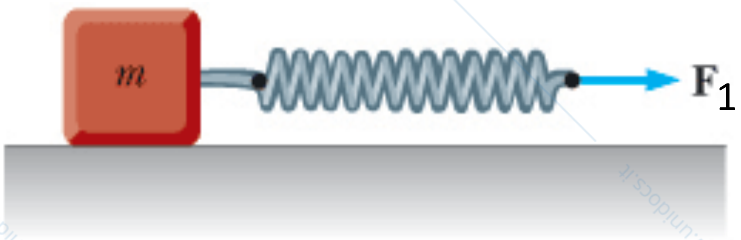
<u>Trascurando la massa della molla</u>, calcolare l'allungamento $\Delta x$ della molla e il valore del modulo $F_1$ della forza $\mathbf{F}_1$

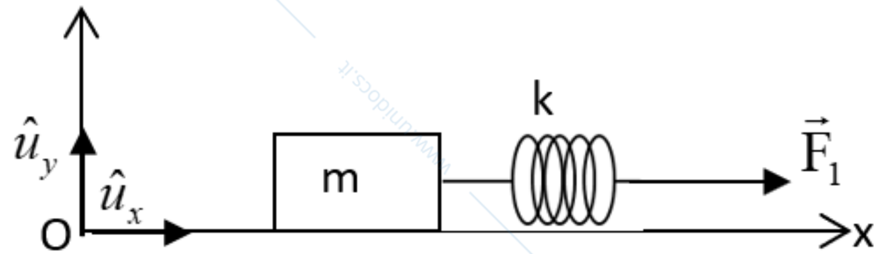
1) in assenza di attrito tra la massa $m$ e il piano di appoggio

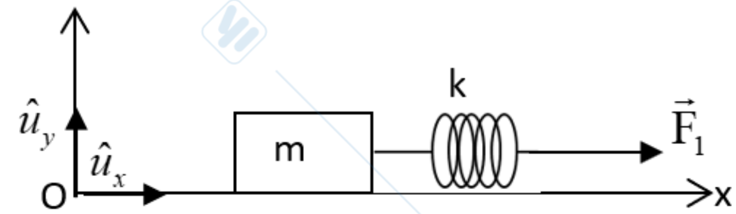
2) in presenza di attrito dinamico, caratterizzato dal coefficiente di attrito dinamico $\mu_d$.



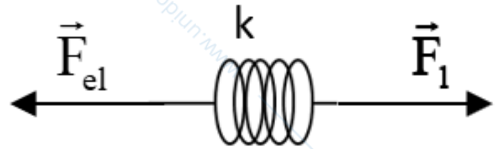
Prendiamo un sistema di riferimento cartesiano (O, $x$, $y$) centrato nella posizione della massa $m$ all'istante $t = 0$, con l'asse $x$ sul piano orizzontale e verso che segue il moto della massa e l'asse $y$ (perpendicolare) rivolto verso l'alto.





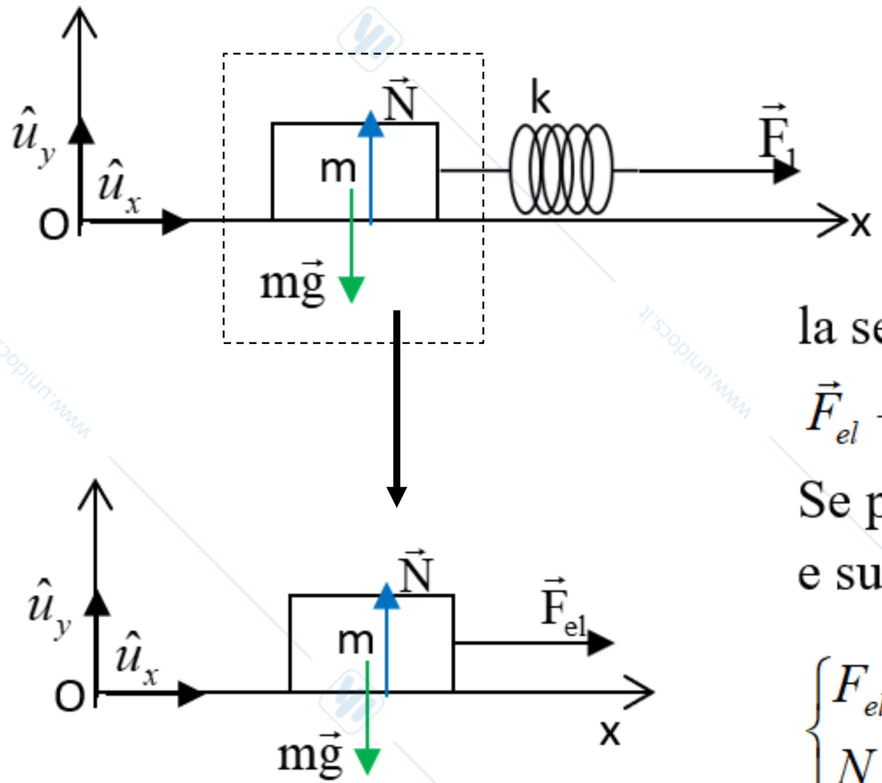

Sulla molla di costante elastica $k$ agisce la forza $\vec{F}_1 = F_1\hat{u}_x$ (verso destra) e la forza elastica $\vec{F}_{el} = -k\Delta x\hat{u}_x$ (verso sinistra).




Dalla seconda legge di Newton risulta: $\vec{F}_1 + \vec{F}_{el} = \vec{F}_1 - k\Delta x\hat{u}_x = m_{molla}\vec{a}_{molla}$, ma poiché la massa della molla risulta trascurabile $\Rightarrow$ $\vec{F}_1 - k\Delta x\hat{u}_x = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 = F_1\hat{u}_x = k\Delta x\hat{u}_x \Rightarrow F_1 = k\Delta x$

Sulla massa $m$ agisce la forza elastica della molla $\vec{F}_{el} = k\Delta x\hat{u}_x$ verso destra, la forza peso $m\vec{g}$ verso il basso, la reazione vincolare $\vec{N}$ verso l'alto e, nel caso di attrito, la forza di attrito dinamico $\vec{f}_{din}$ verso sinistra.

Caso 1) (in assenza di attrito tra la massa *m* e il piano di appoggio)



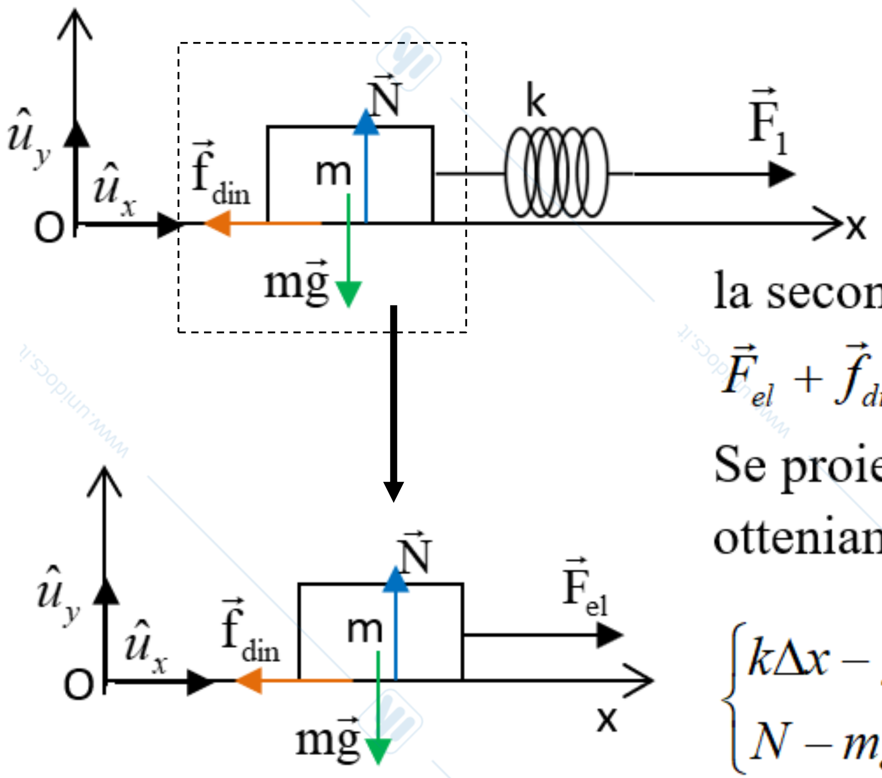

la seconda legge di Newton applicata alla massa *m* risulta:

$\vec{F}_{el} + m\vec{g} + \vec{N} = k\Delta x\hat{u}_x + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} = ma\hat{u}_x$ .

Se proiettiamo tale relazione vettoriale sull'asse x e sull'asse y otteniamo le seguenti due condizioni scalari:

$$\begin{cases} F_{el} = k\Delta x = ma \\ N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = \dfrac{ma}{k} \\ F_1 = k\Delta x = ma \end{cases}$$

Caso 2) (in presenza di attrito dinamico tra la massa *m* e il piano di appoggio)




la seconda legge di Newton applicata alla massa *m* risulta:

$$\vec{F}_{el} + \vec{f}_{din} + m\vec{g} + \vec{N} = k\Delta x\hat{u}_x - \mu_d N\hat{u}_x + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} = ma\hat{u}_x .$$

Se proiettiamo tale relazione vettoriale sull'asse x e sull'asse y otteniamo le seguenti due condizioni scalari:

$$\begin{cases} k\Delta x - \mu_d N = ma \\ N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\Delta x - \mu_d mg = ma \\ N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = \dfrac{ma + \mu_d mg}{k} \\ F_1 = k\Delta x = ma + \mu_d mg \end{cases}$$

Riassumendo, in presenza di attrito, per mantenere la stessa accelerazione **a** del caso senza attrito, la forza applicata deve essere maggiore e la molla risulta più allungata.

**Esempio**

Una piattaforma di massa $m = 10$ kg si muove lungo un piano orizzontale. Al tempo $t = 0$ essa inizia a comprimere una molla di costante elastica $k = 10$ N/m, inizialmente non compressa. Sapendo che la velocità della piattaforma al tempo $t = 0$ è (in modulo) $v_0 = 2$ m/s e trascurando la massa della molla, calcolare:

1) la massima compressione subita dalla molla
2) dopo quanto tempo, rispetto all'istante iniziale t = 0, la piattaforma si ferma e il suo moto si inverte

**Esempio**

Una piattaforma di massa $m = 10$ kg si muove lungo un piano orizzontale. Al tempo $t = 0$ essa inizia a comprimere una molla di costante elastica $k = 10$ N/m, inizialmente non compressa. Sapendo che la velocità della piattaforma al tempo $t = 0$ è (in modulo) $v_0 = 2$ m/s e trascurando la massa della molla, calcolare:

1) la massima compressione subita dalla molla
2) dopo quanto tempo, rispetto all'istante iniziale t = 0, la piattaforma si ferma e il suo moto si inverte


Consideriamo un asse x parallelo al piano orizzontale, centrato nella posizione iniziale a $t=0$ dell'estremo sinistra della molla, inizialmente non compressa, e con verso diretto a destra. Di conseguenza x rappresenta la compressione subita dalla molla mentre essa frena la piattaforma.

Durante la frenata, sulla piattaforma agisce orizzontalmente la forza elastica generata dalla molla compressa, per cui:

$$\vec{F}_{el} = m\vec{a} = ma\hat{u}_x = -kx\hat{u}_x \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{k}{m}x$$

Poiché l'accelerazione della piattaforma è del tipo $a = -\omega^2 x$ con $\omega^2 = \frac{k}{m}$ $\Rightarrow$ si tratta di un moto armonico semplice, per cui:

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \\ v(t) = \omega A\cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s, con le condizioni iniziali $\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases}$ da cui:

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 = A\sin(\phi) \\ v(t=0) = v_0 = \omega A\cos(\phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\phi) = 0 \\ v_0 = \omega A\cos(\phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ v_0 = \omega A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ A = \dfrac{v_0}{\omega} = \dfrac{v_0}{\sqrt{\dfrac{k}{m}}} = \dfrac{2}{1} = 2\,\text{m} \end{cases}$$

Di conseguenza l'ampiezza A corrisponde alla massima compressione della molla, e le equazioni del moto armonico semplice risultano:

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \\ v(t) = \omega A\cos(\omega t + \phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 2\sin(1\cdot t) \\ v(t) = 2\cos(1\cdot t) \end{cases}$$

Nel momento di massima compressione la velocità della massa deve essere = 0

$$v(t_{compressione}) = 0 = 2\cos(t_{compressione}) \Rightarrow \cos(t_{compressione}) = 0 \Rightarrow t_{compressione} = \frac{\pi}{2} = 1.57\ \text{s}$$

# Forza di attrito viscoso

La **forza di attrito viscoso** è una forza che si oppone al moto ed è proporzionale alla velocità del corpo soggetto a tale forza.

$$\vec{F}_{av} = -b\vec{v}$$

dove:

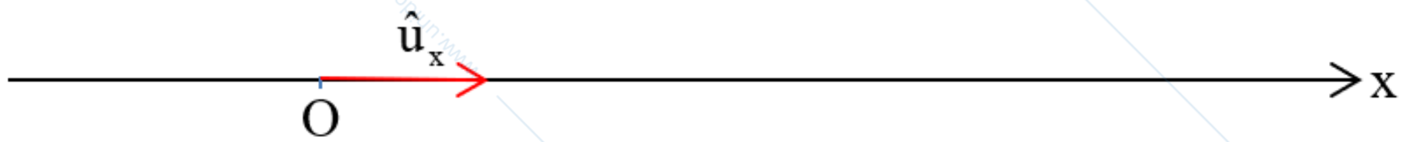
b costante positiva $\rightarrow [b]=[F_{av}]/[v]=([M][L][T]^{-2})/([L][T]^{-1}]=[M][T]^{-1} \rightarrow kg/s$

$$\vec{F}_{av} = -b\vec{v} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \boxed{-\frac{b}{m}\vec{v} = -k\vec{v}} \rightarrow b = mk \Rightarrow \vec{F}_{av} = -mk\vec{v}$$

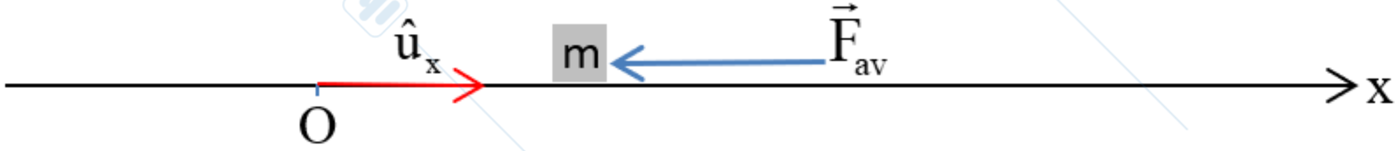
**moto rettilineo smorzato esponenzialmente**

# Forza di attrito viscoso

Caso 1) Un corpo di massa $m$, assimilabile ad un punto materiale, si muove di moto rettilineo lungo un asse x partendo con velocità iniziale $\vec{v}_0 = v_o \hat{u}_x$ ($v_0 > 0$) e soggetto ad una forza di attrito viscoso $\vec{F}_{av} = F_{av} \hat{u}_x$ ($F_{av} < 0$). Determinare l'equazione oraria del moto, sapendo che per $t = 0$ $x = 0$.



La forza di attrito viscoso si oppone al moto del corpo ed è proporzionale alla velocità del corpo stesso: $\vec{F}_{av} = F_{av}\hat{u}_x = -b\vec{v} = -bv\hat{u}_x = -mkv\hat{u}_x$




Dalla seconda legge di Newton si ha:

$$\vec{F}_{av} = -mkv\hat{u}_x = ma\hat{u}_x \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = a\hat{u}_x = -kv\hat{u}_x$$

Passando alla cinematica, si ha:

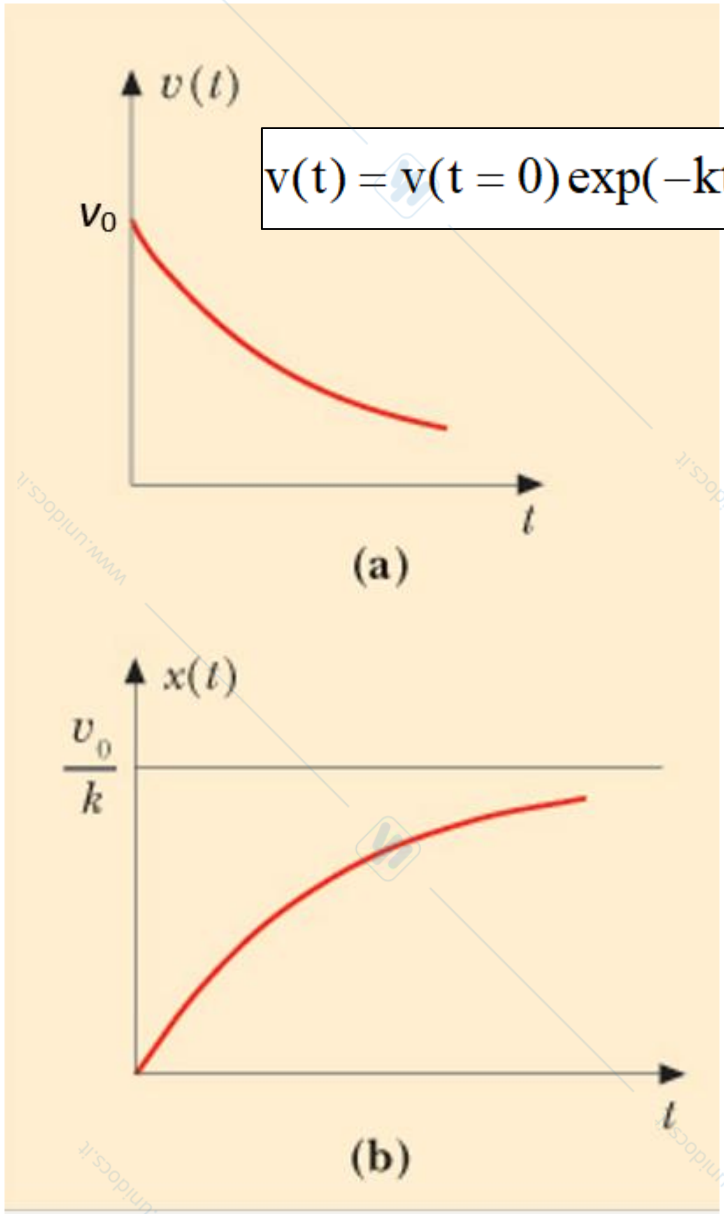
moto rettilineo lungo l'asse x: $\vec{a}(t) = a(t)\hat{u}_x = -kv\hat{u}_x$, $\vec{v}(t) = v(t)\hat{u}_x$ e $\vec{r}(t) = x(t)\hat{u}_x$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \int_0^t -k\,dt = \int_{v(t=0)}^{v(t)} \frac{1}{v}\,dv \Rightarrow -kt = \ln(v(t)) - \ln(v(t=0)) = \ln\left(\frac{v(t)}{v(t=0)}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v(t)}{v(t=0)}\right) = \exp(-kt) \Rightarrow v(t) = v(t=0)\exp(-kt) = v_0 \exp(-kt)$$

$$\Rightarrow a = -kv = -kv_0 \exp(-kt)$$

$$\boxed{v(t) = v(t=0)\exp(-kt) = v_0 \exp(-kt)}$$




L'equazione oraria si ottiene sapendo che

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \int_0^t v(t)dt = \int_0^{x(t)} dx \Rightarrow x(t) = 0 + \int_0^t v(t)dt$$

$$x(t) = \int_0^t v_0 \exp(-kt)dt = \frac{v_0}{-k}\exp(-kt)\Big|_0^t = \frac{v_0}{k}(1-\exp(-kt))$$

Per t che tende ad infinito x tende asintoticamente al valore $\Rightarrow \frac{v_0}{k}$

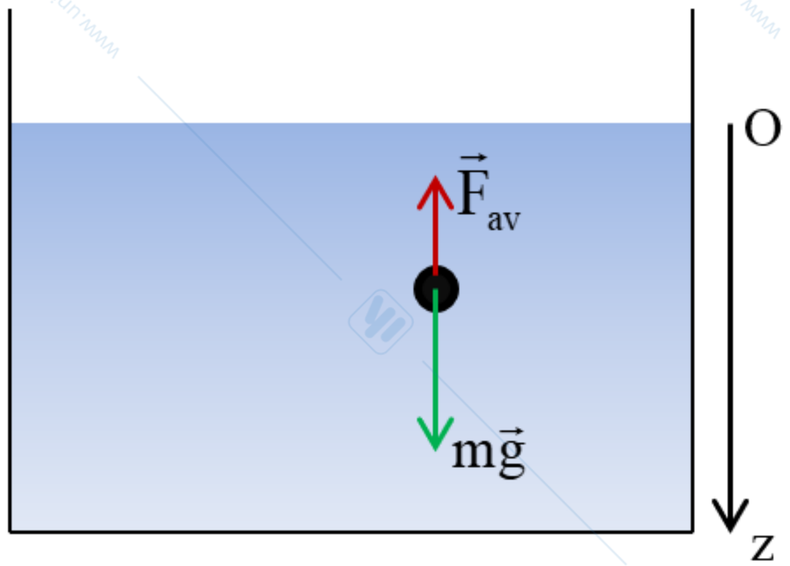
$$\Rightarrow \vec{r}(t) = x(t)\hat{u}_x = \frac{v_0}{k}(1-\exp(-kt))\hat{u}_x$$

# Forza di attrito viscoso

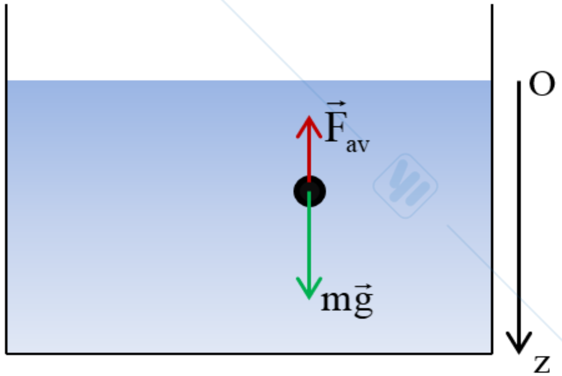
Caso 2) Un corpo di massa $m$, assimilabile ad un punto materiale, viene lasciato cadere da fermo in un liquido viscoso. Determinare l'equazione oraria del moto ipotizzando che al tempo $t = 0$ il corpo si trovi sulla superficie del liquido viscoso.

# Forza di attrito viscoso

Caso 2) Un corpo di massa *m*, assimilabile ad un punto materiale, viene lasciato cadere da fermo in un liquido viscoso. Determinare l'equazione oraria del moto ipotizzando che al tempo t = 0 il corpo si trovi sulla superficie del liquido viscoso.




Prendiamo un sistema di riferimento uniassiale z rivolto verso il basso con l'origine coincidente con la posizione del corpo al tempo t = 0.




Sulla massa *m* agiscono la forza peso $m\vec{g}$ (verso il basso) e la forza di attrito viscoso $\vec{F}_{av}$ (verso l'alto).

Dalla seconda legge di Newton si ha:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{av} = mg\hat{u}_z - mkv\hat{u}_z = m\vec{a} = ma\hat{u}_z \quad \Rightarrow \quad a\hat{u}_z = g\hat{u}_z - kv\hat{u}_z \quad \Rightarrow \quad a = g - kv$$

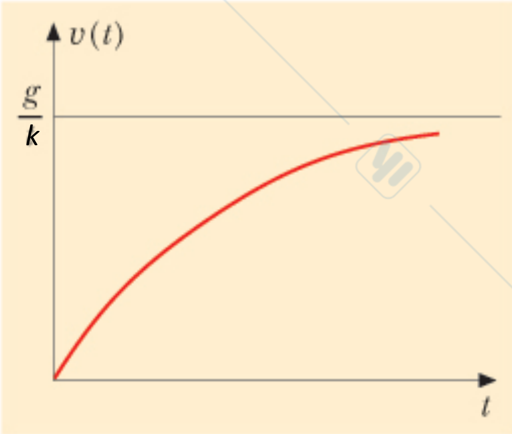
Passando alla cinematica, si ha:

moto rettilineo lungo l'asse z: $\quad \vec{a}(t) = a(t)\hat{u}_z = g\hat{u}_z - kv\hat{u}_z, \quad \vec{v}(t) = v(t)\hat{u}_z \quad$ e $\quad \vec{r}(t) = z(t)\hat{u}_z$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = g - kv \Rightarrow \int_o^t dt = \int_0^{v(t)} \frac{dv}{g - kv} \Rightarrow t = -\frac{1}{k}\ln(g - kv)\Big|_0^{v(t)}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{g - kv}{g}\right) = -kt \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{g - kv}{g}\right) = \exp(-kt) \quad \Rightarrow \quad \frac{kv}{g} = 1 - \exp(-kt)$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{g}{k}(1 - \exp(-kt))$$




$$v(t)=\frac{g}{k}(1-\exp(-kt))$$

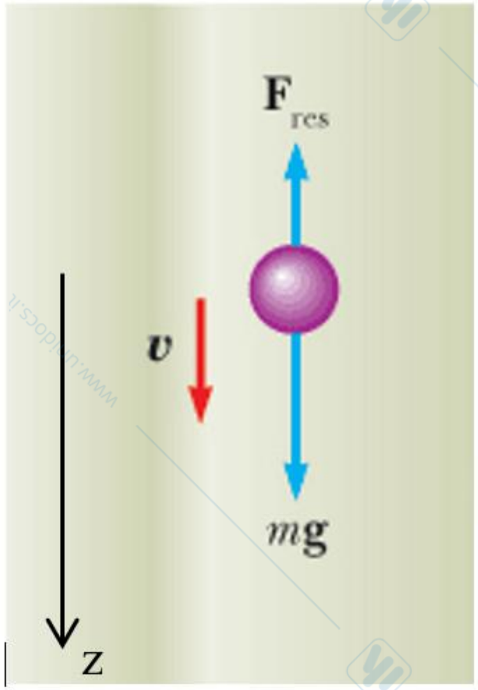
Partendo il corpo da fermo, la velocità cresce, però sempre più lentamente tendendo al valore v = g/k a cui corrisponde una forza di attrito viscoso costante in modulo $|F_{av}| = mkv = mg$.
In altre parole dopo un tempo sufficientemente grande il moto diventa rettilineo uniforme con velocità costante v = g/k in quanto la forza peso è controbilanciata dalla forza di attrito viscoso

$$v(t)=\frac{dz(t)}{dt}\Rightarrow\int_o^t v(t)dt=\int_0^{z(t)} dz\Rightarrow z(t)=0+\int_o^t v(t)dt \qquad \Rightarrow \quad z(t)=\int_o^t \frac{g}{k}(1-\exp(-kt)dt$$

$$\Rightarrow \quad z(t)=\frac{g}{k}(t-(\frac{1}{-k}\exp(-kt)\Big|_0^t))=\frac{g}{k}(t-(\frac{1}{k}(1-\exp(-kt)))$$

**Esempio: Caduta di un corpo in aria**

Una massa $m$ <u>non</u> puntiforme in presenza di aria non cade con accelerazione costante $\vec{g}$ e velocità in modulo crescente linearmente con il tempo, come in assenza d'aria, ma cade con velocità costante, dipendente dalla forma e dalla massa del corpo.




La massa *m* in caduta libera in presenza d'aria è soggetta alla forza peso $m\vec{g}$ verso il basso e alla <u>forza resistente di attrito non viscoso</u> $\vec{F}_{res}$ verso l'alto, di modulo:

$$F_{res} = kv^2$$

dove $k = \frac{1}{2}c\rho S$, c è il coefficiente di resistenza aerodinamica, $\rho = 1.3\ kg/m^3$ è la densità dell'aria, S è l'area della sezione dell'oggetto ortogonale alla direzione del moto.

Dalla seconda legge di Newton si ha:

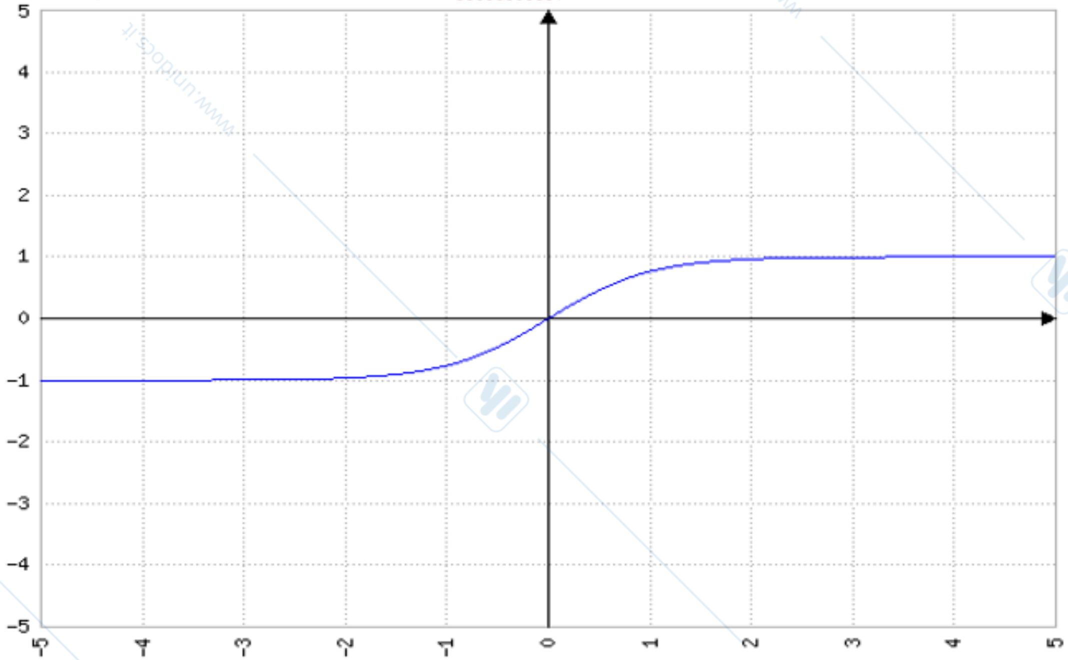
$$m\vec{g} + \vec{F}_{res} = mg\hat{u}_z - F_{res}\hat{u}_z = mg\hat{u}_z - kv^2\hat{u}_z = m\vec{a} = ma\hat{u}_z$$

$$\Rightarrow mg - kv^2 = ma$$

Attraverso una serie di passaggi matematici, si ricava che la velocità del corpo lungo l'asse z varia secondo la seguente relazione:

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)$$

Tanh(x)



Dopo un tempo sufficientemente grande la velocità tende al valore costante limite:

$$v_{limite} = \sqrt{\frac{mg}{k}} = \sqrt{\frac{2mg}{c\rho S}}$$

a cui corrisponde una forza resistente dell'aria $F_{res} = kv^2 = k\frac{mg}{k} = mg$ che controbilancia la forza peso $\Rightarrow$ il moto diventa rettilineo uniforme.

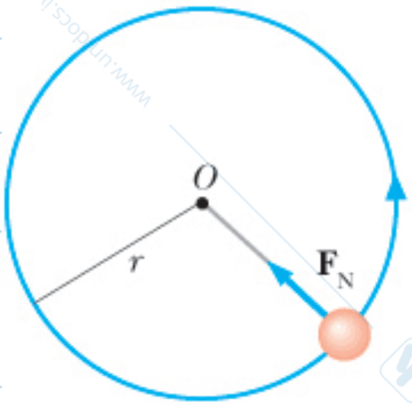
A titolo di esempio, un paracadutista di massa $m$ = 75 kg con un paracadute di diametro 2 m scende con velocità limite costante = 27 m/s

## Forza centripete

Supponiamo che la risultante $\vec{R}$ delle forze agenti su un punto materiale presenti una componente $\vec{F}_N$ normale (o centripeta) alla traiettoria, che risulta pertanto curvilinea.

$\vec{F}_N$ causa l'accelerazione centripeta dell'oggetto

$$\vec{F}_N = m\vec{a}_N = m\frac{v^2}{r}\hat{u}_N$$

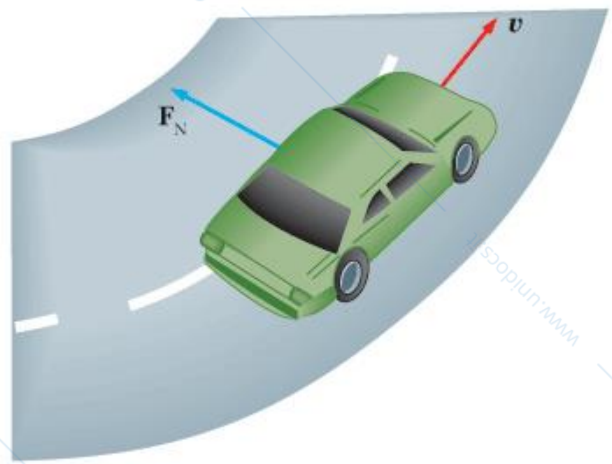



dove:
$\vec{a}_N$ è l'accelerazione centripeta
r è il raggio di curvatura della traiettoria

In generale le forze centripete sono prodotte da rotaie, pneumatici, fili,…, ossia vincoli che consentono di incurvare la traiettoria oppure da forze a distanza come la forza gravitazionale o la forza elettrostatica.

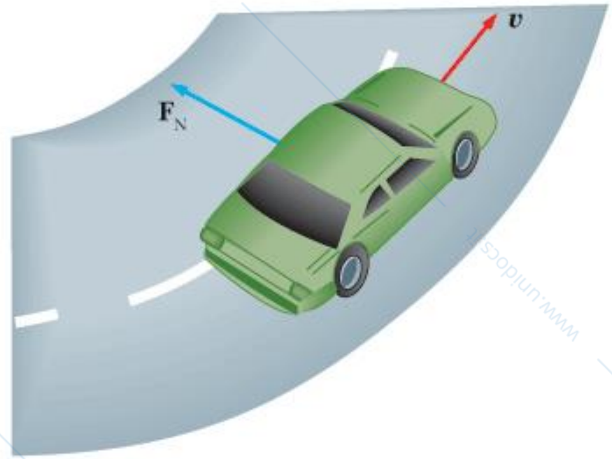
## Esempio – Curva su strada piana

Determinare la massima velocità $v_{max}$ con cui un'auto di massa *m* può percorrere in una strada piana una curva di raggio fisso R. Si indichi con $\mu_s$ il coefficiente di attrito statico e con $\mu_d$ il coefficiente di attrito dinamico tra gli pneumatici dell'auto e il manto stradale.



**Esempio – Curva su strada piana**

Determinare la massima velocità $v_{max}$ con cui un'auto di massa *m* può percorrere in una strada piana una curva di raggio fisso R. Si indichi con $\mu_s$ il coefficiente di attrito statico e con $\mu_d$ il coefficiente di attrito dinamico tra gli pneumatici dell'auto e il manto stradale.




Poiché l'auto deve percorrere una traiettoria circolare, è necessaria la presenza di una forza centripeta (radiale) che permetta tale moto. La forza centripeta necessaria è fornita dall'attrito tra gli pneumatici e il manto stradale. Poiché la traiettoria è circolare e quindi non c'è spostamento radiale, l'attrito in questione è di tipo statico.

Applicando la seconda legge di Newton lungo la direzione radiale, si ottiene:

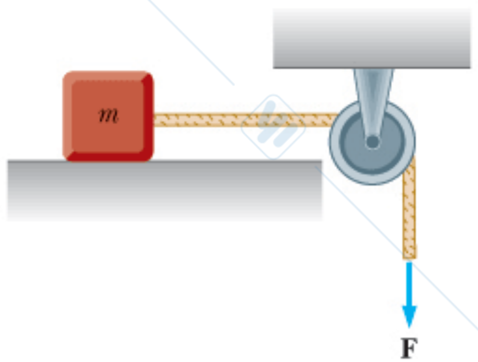
$$\sum \vec{F}_{centripete} = \vec{f}_{st} = m\vec{a}_{centripeta} = m\frac{v^2}{R}\hat{u}_n \Rightarrow \text{ in modulo } f_{st} = m\frac{v^2}{R} \le \mu_s N = \mu_s mg \Rightarrow v \le \sqrt{\mu_s gR}$$

da cui: $v_{max} = \sqrt{\mu_s gR}$

# Tensione dei fili e delle funi

Un filo teso esercita ai suoi estremi una tensione $\vec{T}$ il cui valore dipende dalle forza applicate e che deve essere pensata come la reazione del filo alla forza che lo fa tendere.

In un filo reale la tensione non può superare un valore massimo $T_{max}$ oltre il quale il filo si spezza.

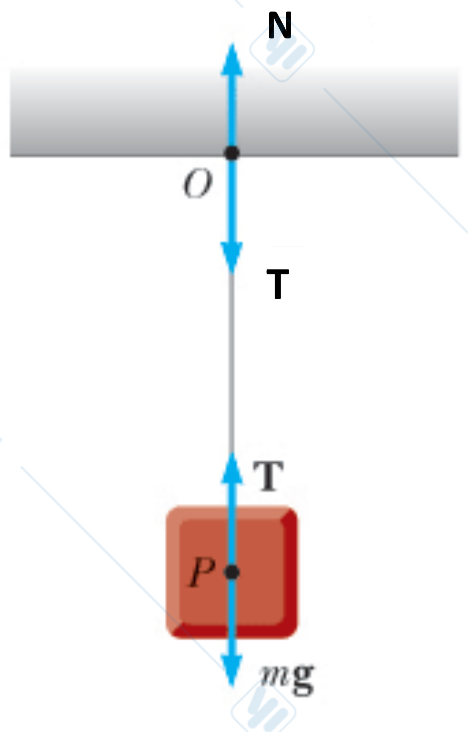



Se ad un estremo del filo è collegato un oggetto, la tensione $\vec{T}$ va inserita nella II legge di Newton come le altre forze agenti sull'oggetto stesso.

Non è necessario che il filo sia completamente rettilineo, esso può essere parzialmente avvolto attorno ad una carrucola, allo scopo di cambiare la direzione della forza.

**Esempio – Massa appesa in quiete**

Una massa $m$ in quiete è appesa tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile al soffitto tramite un punto di aggancio. Se il massimo sforzo che può reggere il punto di aggancio è $N = N_{max}$, determinare qual è il valore massimo della massa $m$.




Le forze applicate al filo sono la forza peso $m\vec{g}$ del corpo appeso e la reazione vincolare $\vec{N}$ del punto di appoggio. Il filo teso sviluppa ai suoi estremi la tensione $\vec{T}$

Sulla massa *m* sono applicate verticalmente la forza peso $m\vec{g}$ e la tensione $\vec{T}$ del filo.
Essendo la massa m in quiete: $m\vec{g}+\vec{T}=0 \rightarrow T=mg$

Sul punto di appoggio agisce la tensione $\vec{T}$ ed esso risponde con la reazione vincolare $\vec{N}$,
per cui: $\vec{N}+\vec{T}=0 \rightarrow N=T$

Riassumendo, N=T=mg, se N=Nmax→m=Nmax/g

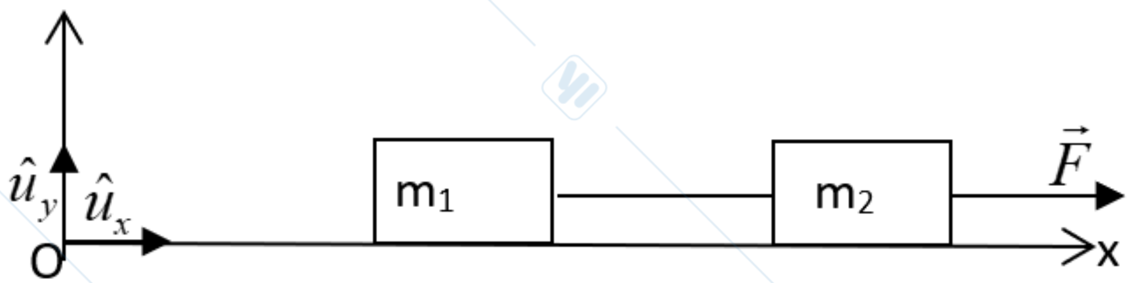
**Esempio**

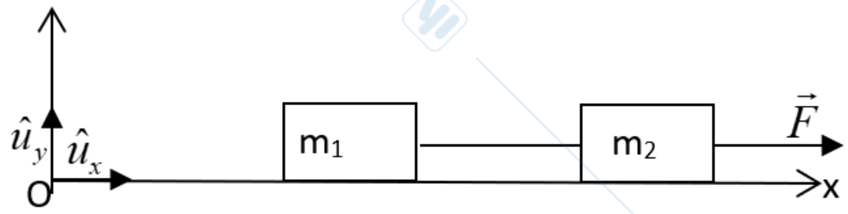
Due masse $m_1$ e $m_2$ sono poste su di un piano orizzontale e sono tra di loro collegate tramite un filo inestensibile. Tali masse sono in movimento per effetto di una forza nota **F** applicata alla massa $m_2$.

Trascurando la massa del filo, determinare il valore del modulo dell'accelerazione **a** delle due masse e il modulo della tensione **T** del filo:

1) in assenza di attrito tra le due masse e il piano di appoggio

2) in presenza di attrito dinamico, caratterizzato dai due coefficienti di attrito dinamico $\mu_{d,1}$ e $\mu_{d,2}$

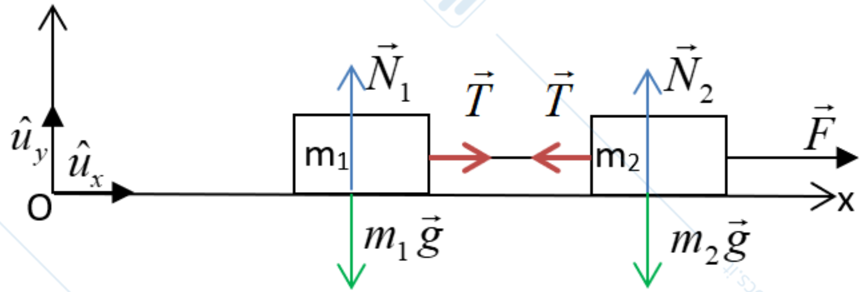





Sul filo agisce la forza $\vec{F}_1 = F_1\hat{u}_x$ con $F_1 < 0$ (verso sinistra) e la forza $\vec{F}_2 = F_2\hat{u}_x$ con $F_2 > 0$ (verso destra).


Dalla seconda legge di Newton risulta: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_{filo}\vec{a}_{filo}$, ma poiché la massa della molla risulta trascurabile $\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \Rightarrow F_1\hat{u}_x + F_2\hat{u}_x = 0 \Rightarrow F_1 = -F_2 \Rightarrow |F_1| = |F_2| = T$

1) in assenza di attrito tra le due masse e il piano di appoggio




Consideriamo separatamente le due masse e scriviamo le loro equazioni del moto:

$$\begin{cases} \vec{T} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 = m_1\vec{a}_1 = m_1 a_1 \hat{u}_x \\ \vec{F} + \vec{T} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 = m_2\vec{a}_2 = m_2 a_2 \hat{u}_x \end{cases}$$

se il filo è teso le accelerazioni delle due masse devono essere uguali: $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 = \vec{a}$

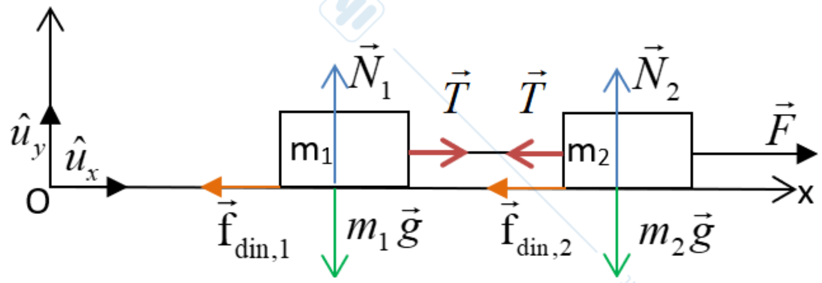
$$\begin{cases} \vec{T} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 = m_1\vec{a} = m_1 a \hat{u}_x \\ \vec{F} + \vec{T} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 = m_2\vec{a} = m_2 a \hat{u}_x \end{cases}$$

che proiettate sugli assi x e y danno luogo alle seguenti 4 relazioni scalari:

$$\begin{cases} T = m_1 a \\ N_1 - m_1 g = 0 \\ F - T = m_2 a \\ N_2 - m_2 g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = m_1 a \\ F - m_1 a = m_2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = m_1 a \\ a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} F < F \\ a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la forza applicata alla massa $m_1$ non è $\vec{F}$ ma risulta di intensità minore di $\vec{F}$

2) in presenza di attrito dinamico, caratterizzato dai due coefficienti di attrito dinamico $\mu_{d,1}$ e $\mu_{d,2}$




Consideriamo separatamente le due masse e scriviamo le loro equazioni del moto:

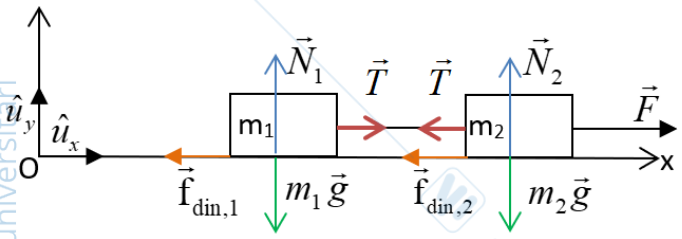
$$\begin{cases} \vec{T} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{f}_{din,1} = m_1\vec{a}_1 = m_1 a_1 \hat{u}_x \\ \vec{F} + \vec{T} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{f}_{din,2} = m_2\vec{a}_2 = m_2 a_2 \hat{u}_x \end{cases}$$

se il filo è teso le accelerazioni delle due masse devono essere uguali: $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 = \vec{a}$

$$\begin{cases} \vec{T} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{f}_{din,1} = m_1\vec{a} = m_1 a\hat{u}_x \\ \vec{F} + \vec{T} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{f}_{din,2} = m_2\vec{a} = m_2 a\hat{u}_x \end{cases}$$

che proiettate sugli assi x e y danno luogo alle seguenti quattro relazioni scalari:

$$\begin{cases} T - f_{din,1} = m_1 a \\ N_1 - m_1 g = 0 \\ F - T - f_{din,2} = m_2 a \\ N_1 - m_2 g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - \mu_{d,1} N_1 = m_1 a \\ N_1 - m_1 g = 0 \\ F - T - \mu_{d,2} N_2 = m_2 a \\ N_2 - m_2 g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - \mu_{d,1} m_1 g = m_1 a \\ N_1 = m_1 g \\ F - T - \mu_{d,2} m_2 g = m_2 a \\ N_2 = m_2 g \end{cases} \Rightarrow$$




$$\Rightarrow \begin{cases} T = m_1 a + \mu_{d,1} m_1 g \\ F - (m_1 a + \mu_{d,1} m_1 g) - \mu_{d,2} m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = m_1 a + \mu_{d,1} m_1 g = m_1 \dfrac{F - (\mu_{d,1} m_1 + \mu_{d,2} m_2) g}{m_1 + m_2} + \mu_{d,1} m_1 g \\ a = \dfrac{F - (\mu_{d,1} m_1 + \mu_{d,2} m_2) g}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

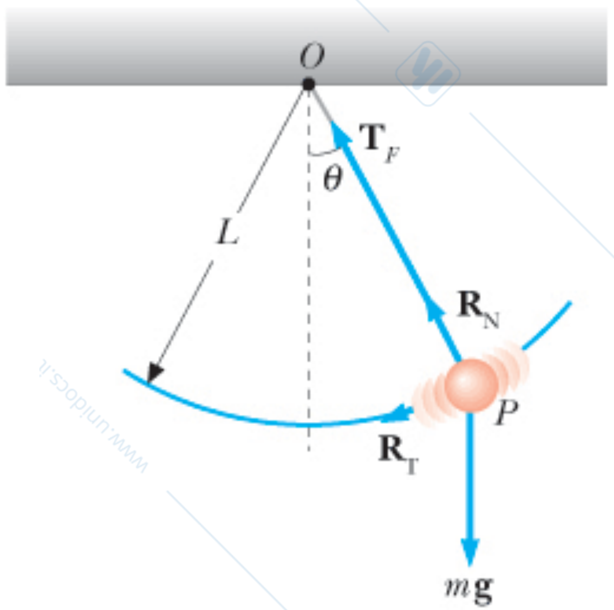
$$\Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} (F - (\mu_{d,1} m_1 + \mu_{d,2} m_2) g + (m_1 + m_2) \mu_{d,1} g) \\ a = \dfrac{F - (\mu_{d,1} m_1 + \mu_{d,2} m_2) g}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} (F + (\mu_{d,1} - \mu_{d,2}) m_2 g) \\ a = \dfrac{F - (\mu_{d,1} m_1 + \mu_{d,2} m_2) g}{m_1 + m_2} < \dfrac{F}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

⇒ l'accelerazione $a$ risulta minore che nel caso senza attrito

⇒ la forza applicata alla massa $m_1$ risulta maggiore che nel caso senza attrito se $\mu_{d,1} > \mu_{d,2}$, mentre risulta minore se $\mu_{d,1} < \mu_{d,2}$

# Pendolo semplice

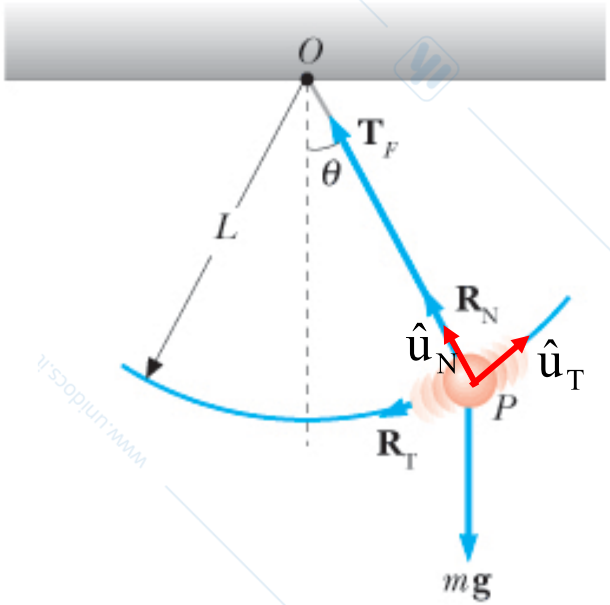



Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale (massa=$m$) appeso tramite un filo inestensibile (lunghezza=$L$) e di massa trascurabile.

La posizione di equilibrio statico è quella verticale, con il punto materiale fermo ed il filo teso. In questo caso la forza esercitata dal filo (la tensione del filo) vale in modulo quanto la forza peso del punto materiale T=mg.

Spostando il punto materiale dalla verticale, esso inizia ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio lungo un arco di circonferenza di lunghezza $L$, in un piano verticale.

# Pendolo semplice




Forze agenti sul punto P: forza peso $m\vec{g}$ e tensione del filo $\vec{T}$

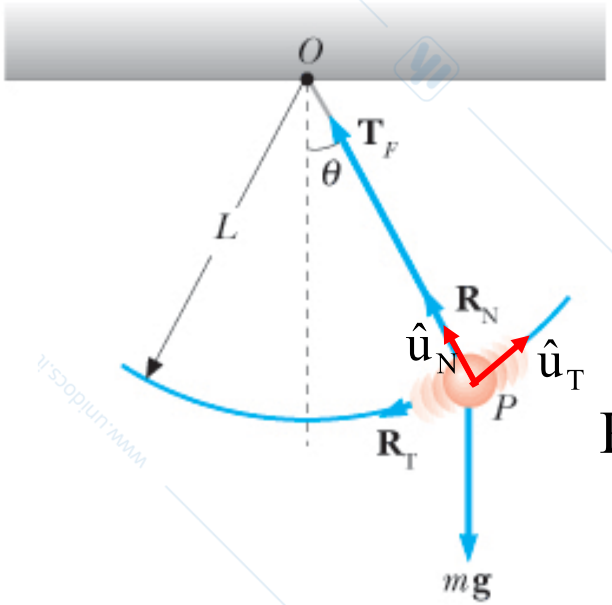
$$\Rightarrow m\vec{g}+\vec{T}=m\vec{a}=m\left(\vec{a}_T+\vec{a}_N\right)$$

Proiettiamo tale equazione lungo l'asse tangente alla traiettoria $\hat{u}_T$ e lungo l'asse ortogonale ad esso $\hat{u}_N$ :

Componente tangenziale: $R_T = -mg\,\text{sen}\theta = ma_T \Rightarrow a_T = -g\,\text{sen}\theta$

Componente ortogonale: $R_N = T - mg\cos\theta = ma_N \Rightarrow a_N = (T/m) - g\cos\theta = v^2/L$

# Pendolo semplice




Componente tangenziale:

$R_T = -mg\ sen\theta\ = ma_T \Rightarrow a_T = -g\ sen\theta$

$$a_T = -g\sin\theta = L\alpha = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta(t) = 0$$

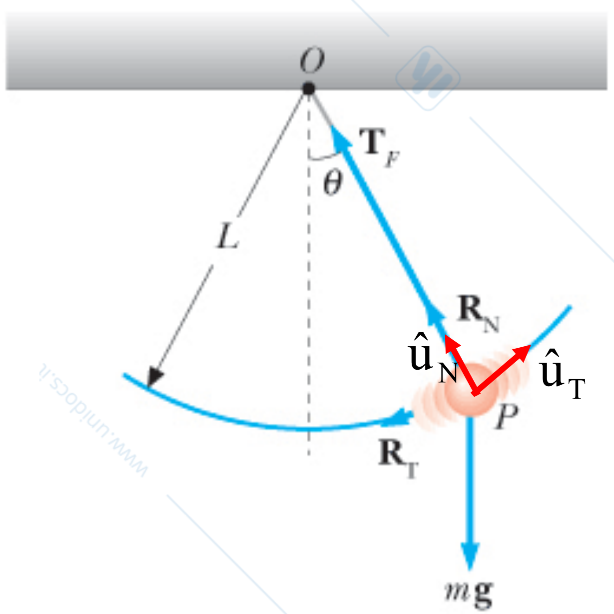
Per piccole oscillazioni ($\theta<7°$) si può approssimare $sen\theta(t) \sim \theta(t)$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta(t) = 0 \rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0}$$

Equazione del moto armonico semplice

con $\omega^2 = g/L$ e $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\theta(t) = \theta_0 sen(\omega t + \phi)$$




# Pendolo semplice

$$\theta(t)=\theta_0 \mathrm{sen}(\omega t+\phi)$$

Legge oraria dello spostamento lungo l'arco di circonferenza:

$$s=L\theta=L\theta_0 \mathrm{sen}(\omega t+\phi)$$

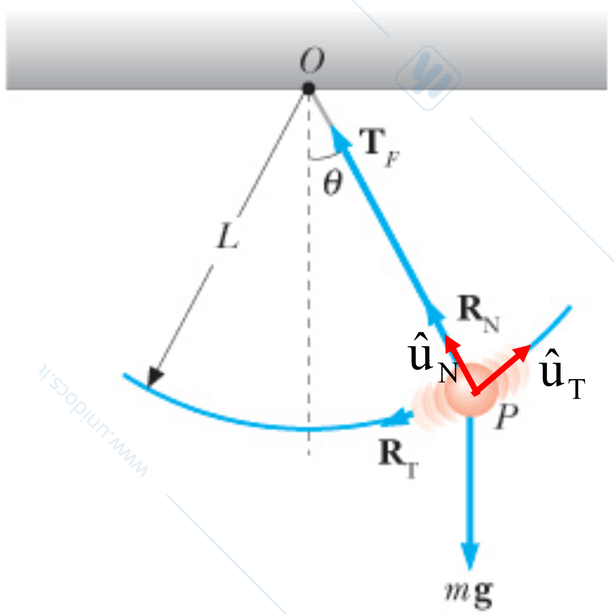
$$\Downarrow$$

$$v=\frac{ds}{dt}=L\omega\theta_0 \cos(\omega t+\phi)$$

La velocità è massima quando il punto passa per la verticale ($\theta = 0 \rightarrow \mathrm{sen}(\omega t+\phi)=0 \rightarrow \cos(\omega t+\phi)=1 \rightarrow v=L\omega\theta_0$)

ed è nulla agli estremi ($\theta = \theta_0 \rightarrow \mathrm{sen}(\omega t+\phi)=1$ $\rightarrow \cos(\omega t+\phi)=0 \rightarrow v=0$) dove il verso del moto si inverte

# Pendolo semplice




Componente ortogonale:

$R_N = T - mg\cos\theta = ma_N \Rightarrow a_N = (T/m) - g\cos\theta = v^2/L$

$$\Downarrow$$

$$T = m(g\cos\theta + v^2/L)$$

T è massima nella posizione verticale ($\theta = 0$) dove sia $\cos\theta$ che $v(t)$ assumono i valori massimi:

$T_{max} = m(g + (v_{max})^2/L) = mg + mL(\omega\theta_0)^2 = mg + mg(\theta_0)^2$

T è minima agli estremi ($\theta = \theta_0$) dove sia $\cos\theta$ che $v(t)$ assumono i valori minimi:

$T_{max} = m(g\cos\theta_0 + (v_{min})^2/L) = mg\cos\theta_0$