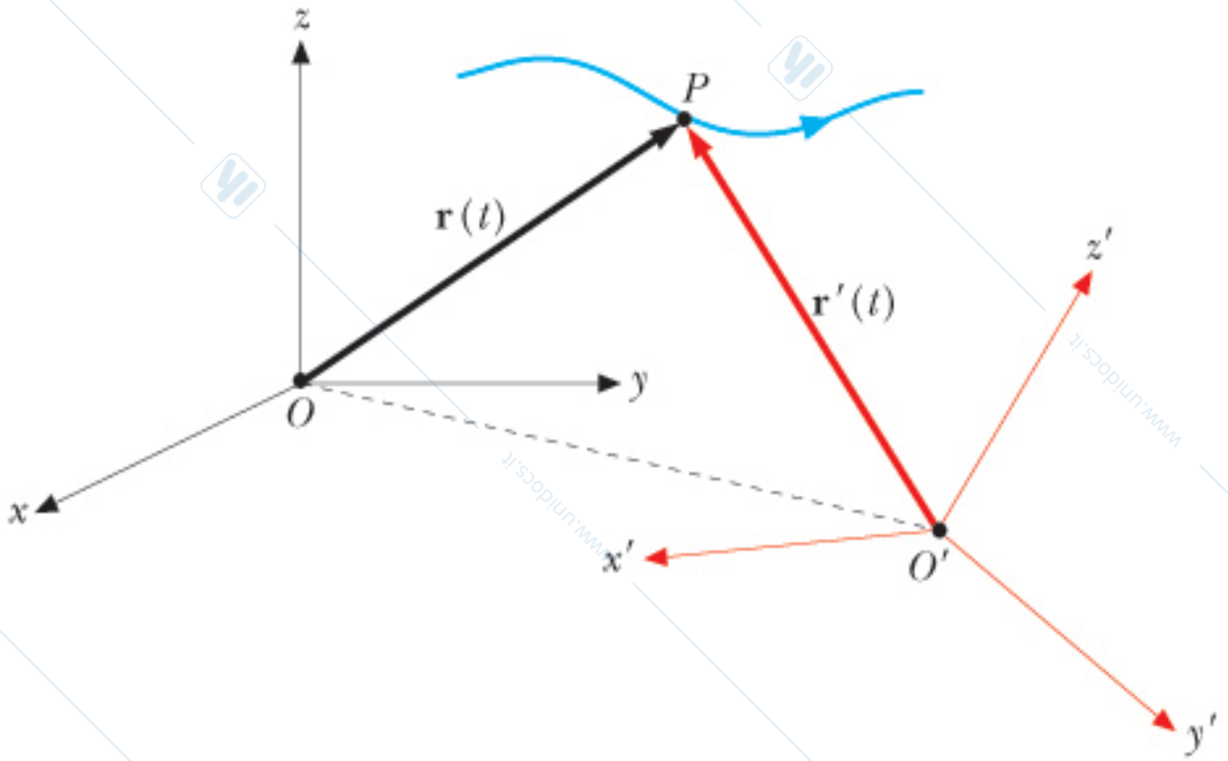
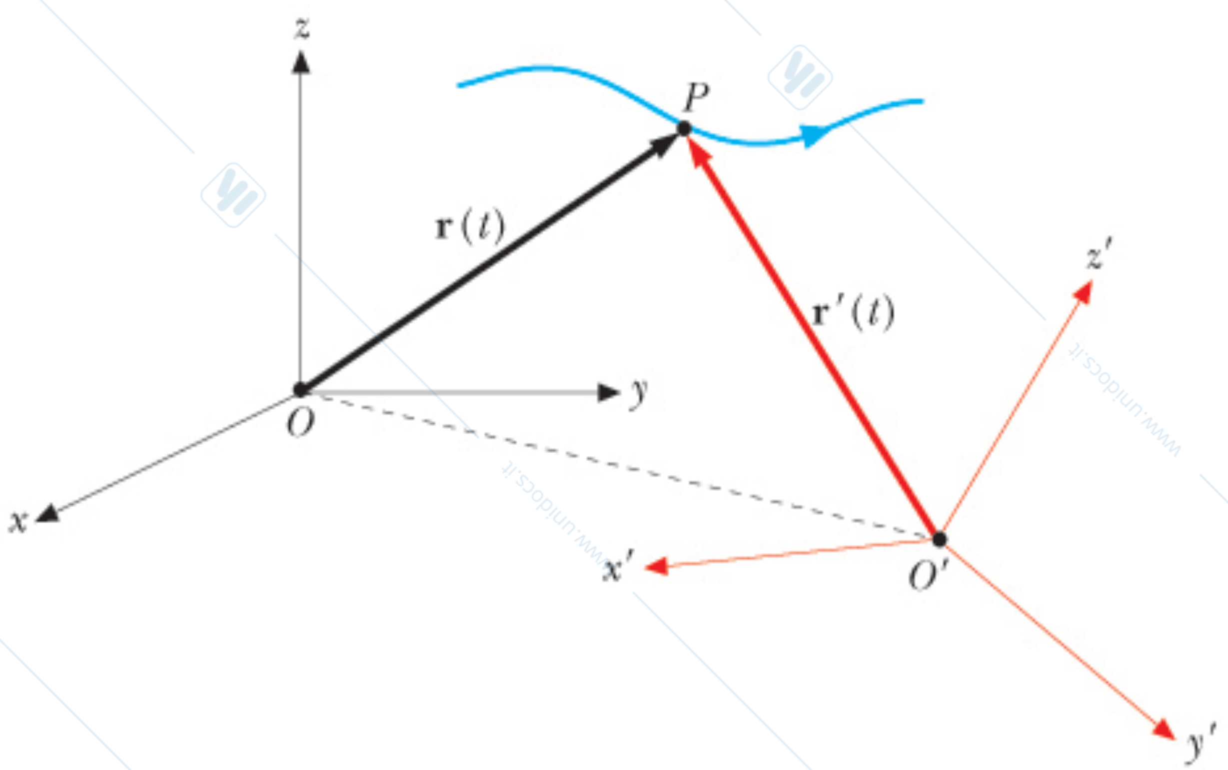
MOTI RELATIVI

1) Cinematica



Consideriamo un sistema di riferimento fisso (O, x, y, z), con i versori $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ e $\hat{u}_z$ indipendenti dal tempo, e un sistema di riferimento mobile (O', x', y', z'), con i versori $\hat{u}_{x'}$, $\hat{u}_{y'}$ e $\hat{u}_{z'}$ dipendenti dal tempo, che può traslare e/o ruotare rispetto al sistema fisso (O, x, y, z).
Si vuole determinare il <u>vettore posizione $\vec{r}$</u>, il <u>vettore velocità $\vec{v}$</u> e il <u>vettore accelerazione $\vec{a}$</u> di un punto materiale P rispetto ai due sistemi di riferimento.

Vettore posizione $\vec{r}$

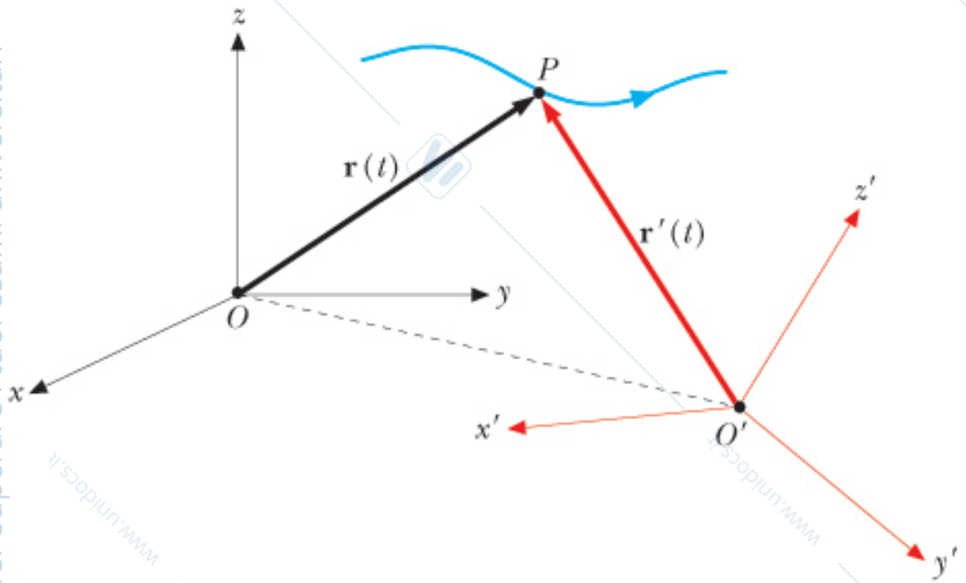


La relazione tra le posizioni del punto P, misurate rispetto ai due sistemi di riferimento risulta:

$$\boxed{\vec{r}_P = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'_P} \qquad [1]$$

dove O' ha coordinate $(x_{0'}, y_{0'}, z_{0'})$ rispetto al sistema fisso (O, x, y, z), $\vec{r}_P = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z$,
$\vec{r}\,'_P = x'\hat{u}_{x'} + y'\hat{u}_{y'} + z'\hat{u}_{z'}$ e $\overrightarrow{OO'} = x_{0'}\hat{u}_x + y_{0'}\hat{u}_y + z_{0'}\hat{u}_z$

Vettore velocità $\vec{v}$



La velocità $\vec{v}_P$ del punto P rispetto al sistema fisso (O, x, y, z) risulta:

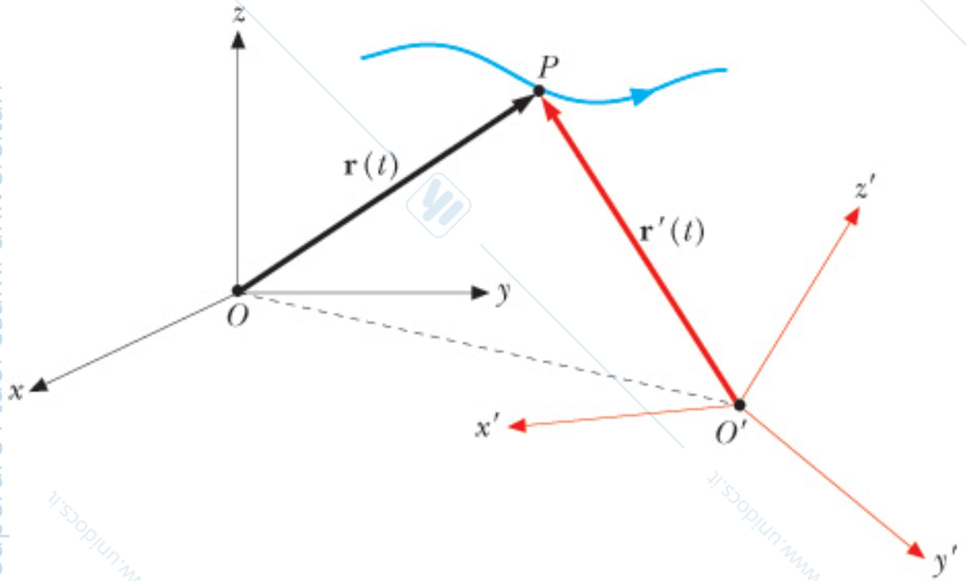
$$\vec{v}_P = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z$$

$$\frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z\right) = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z$$

essendo $x\frac{d\hat{u}_x}{dt} + y\frac{d\hat{u}_y}{dt} + z\frac{d\hat{u}_z}{dt} = 0$ perché i versori $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ e $\hat{u}_z$ sono invarianti nel tempo,

$$\Longrightarrow \qquad \vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt}$$

Vettore velocità $\vec{v}$



La velocità $\vec{v}'_P$ del punto P rispetto al sistema mobile (O', x', y', z') risulta:

$$\vec{v}'_P = \frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}$$

$$\frac{d\vec{r}'_P}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\hat{u}_{x'} + y'\hat{u}_{y'} + z'\hat{u}_{z'}\right) = \frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'} + x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}$$

essendo $x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} \neq 0$ poiché i versori $\hat{u}_{x'}$, $\hat{u}_{y'}$ e $\hat{u}_{z'}$ possono variare nel tempo in direzione, per cui:

$$\Longrightarrow \quad \vec{v}'_P \neq \frac{d\vec{r}'_P}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{r}'_P}{dt} = \vec{v}'_P + x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}$$

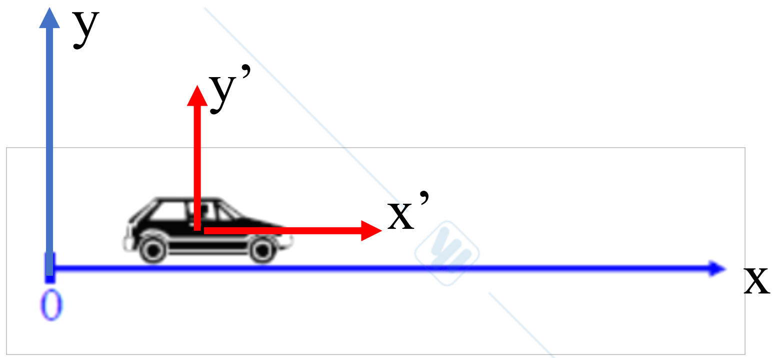
Esercizio 1

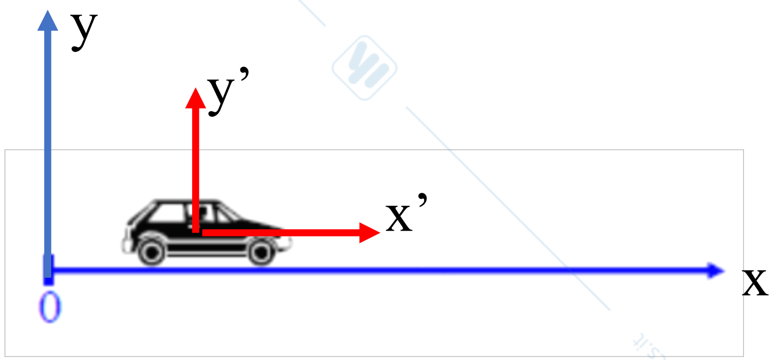
Qual è l'angolo massimo di cui può risultare inclinato, rispetto alla verticale, il vetro posteriore di una macchina che viaggia alla velocità costate v = 72 km/h per non essere bagnato dalla pioggia cadente verticalmente alla velocità v_p=10 m/s?

Esercizio 1

Qual è l'angolo massimo di cui può risultare inclinato, rispetto alla verticale, il vetro posteriore di una macchina che viaggia alla velocità costate v = 72 km/h per non essere bagnato dalla pioggia cadente verticalmente alla velocità v_p=10 m/s?

Consideriamo un sistema di riferimento fisso a terra (O, x, y) e un sistema di riferimento mobile solidale con la macchina (O', x', y') .



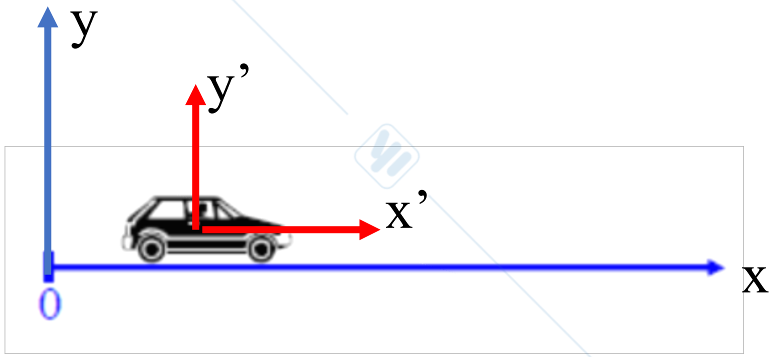


Il moto in questione è un moto di trascinamento traslatorio lungo l'asse x e l'oggetto osservato nei due sistemi di riferimento è la pioggia.

Dal teorema delle velocità relative:

$$\boxed{\vec{v}_p = \vec{v}'_p + \vec{v}_{O'}}$$

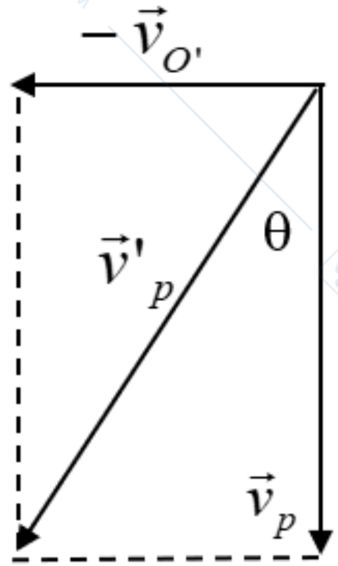
Velocità della pioggia rispetto a terra	Velocità della pioggia rispetto alla macchina	Velocità della macchina



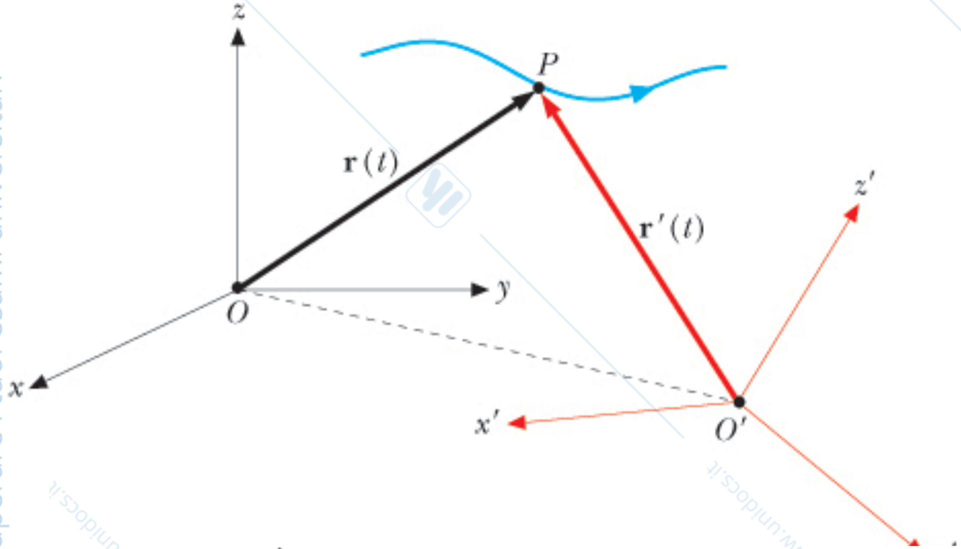
$$\vec{v}_p = \vec{v}'_p + \vec{v}_{O'}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}'_p = \vec{v}_p - \vec{v}_{O'}$$



$$tg(\theta) = \frac{|\vec{v}_{O'}|}{|\vec{v}_p|} = \frac{20}{10} = 2 \qquad \theta = arctg(2) = 63°$$



Vettore velocità $\vec{v}$

La velocità $\vec{v}_{O'}$ dell'origine O' del sistema di riferimento mobile (O', x', y', z') rispetto al sistema fisso (O, x, y, z) risulta:

$$\vec{v}_{O'} = \frac{dx_{O'}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{u}_z$$

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_{O'}\hat{u}_x + y_{O'}\hat{u}_y + z_{O'}\hat{u}_z\right) = \frac{dx_{O'}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{u}_z$$

essendo $x_{O'}\frac{d\hat{u}_x}{dt} + y_{O'}\frac{d\hat{u}_y}{dt} + z_{O'}\frac{d\hat{u}_z}{dt} = 0$ perché i versori $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ e $\hat{u}_z$ sono invarianti nel tempo,

$$\Longrightarrow \quad \vec{v}_{O'} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

Deriviamo la relazione [1] $\vec{r}_P = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'_P$ rispetto al tempo:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_P}{dt}$$

$$\vec{v}_P \qquad \vec{v}_{O'} \qquad \vec{v}'_P + x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_P}{dt} \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}$$

Rivediamo ora la derivata temporale di un versore:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\perp = \omega\hat{u}_\perp = \vec{\omega} \times \hat{u} \quad \text{[Formula di Poisson]}$$

essendo $\hat{u}_\perp$ un versore perpendicolare a $\hat{u}$ (nel piano di rotazione del versore $\hat{u}$) e $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare perpendicolare al piano di rotazione del versore $\hat{u}$ (e quindi perpendicolare a $\hat{u}_\perp$)

$$\Rightarrow x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} = x'(\vec{\omega} \times \hat{u}_{x'}) + y'(\vec{\omega} \times \hat{u}_{y'}) + z'(\vec{\omega} \times \hat{u}_{z'}) =$$

$$= (\vec{\omega} \times x'\hat{u}_{x'}) + (\vec{\omega} \times y'\hat{u}_{y'}) + (\vec{\omega} \times z'\hat{u}_{z'}) = \vec{\omega} \times (x'\hat{u}_{x'} + y'\hat{u}_{y'} + z'\hat{u}_{z'}) = \vec{\omega} \times \vec{r}'_P$$

Deriviamo la relazione [1] $\vec{r}_P = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'_P$ rispetto al tempo:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_P}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{d\vec{r}_P}{dt}}_{\vec{v}_P} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}_{\vec{v}_{O'}} + \underbrace{\frac{d\vec{r}'_P}{dt}}_{\vec{v}'_P + x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_P}{dt} \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}'_P}{dt} = \vec{v}'_P + x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} = \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P \quad [2]$$

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P$$

Teorema delle velocità relative:

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P} \qquad [3]$$

$\Rightarrow$ le velocità calcolate nei due sistemi di riferimento sono diverse, ma non scorrelate

La differenza vettoriale tra le velocità calcolate nei due sistemi di riferimento è detta *velocità di trascinamento* $\vec{v}_t$:

$$\vec{v}_t = \vec{v}_P - \vec{v}'_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P$$

Trascinamento traslatorio

Trascinamento rotatorio

Casi particolari:

1) moto relativo traslatorio: $\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'}$

$\Rightarrow$ Il sistema mobile NON ruota rispetto a quello fisso, ma trasla solo

per esempio, il punto P è fermo rispetto al sistema di riferimento fisso ($\vec{v}_P = 0$)$\Rightarrow$ rispetto al sistema di riferimento mobile il punto P si muove con $\vec{v}'_P = -\vec{v}_{O'}$, ossia con la velocità dell'origine del sistema di riferimento mobile ma con verso opposto

Casi particolari:

1) moto relativo traslatorio: $\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'}$

$\Rightarrow$ Il sistema mobile NON ruota rispetto a quello fisso, ma trasla solo

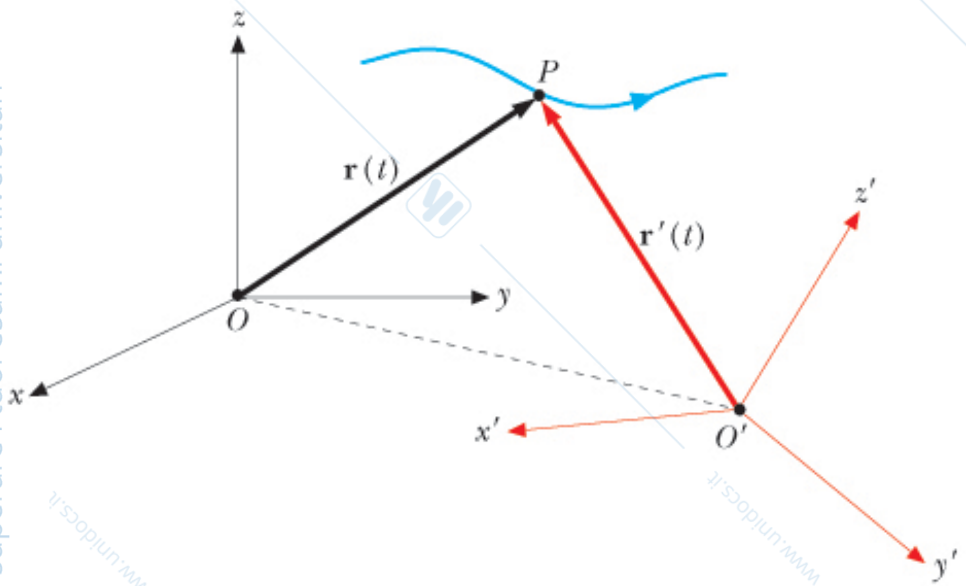
per esempio, il punto P è fermo rispetto al sistema di riferimento fisso ($\vec{v}_P = 0$)$\Rightarrow$ rispetto al sistema di riferimento mobile il punto P si muove con $\vec{v}'_P = -\vec{v}_{O'}$, ossia con la velocità dell'origine del sistema di riferimento mobile ma con verso opposto

2) moto relativo rotatorio: $\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P$

$\Rightarrow$ Il sistema mobile NON trasla rispetto a quello fisso, ma ruota solo

per esempio, il punto P è fermo rispetto al sistema di riferimento fisso ($\vec{v}_P = 0$)$\Rightarrow$ rispetto al sistema di riferimento mobile il punto P si muove con $\vec{v}'_P = -\vec{\omega} \times \vec{r}'_P$, ossia con la velocità di rotazione del sistema di riferimento mobile ma con verso opposto

Vettore accelerazione $\vec{a}$



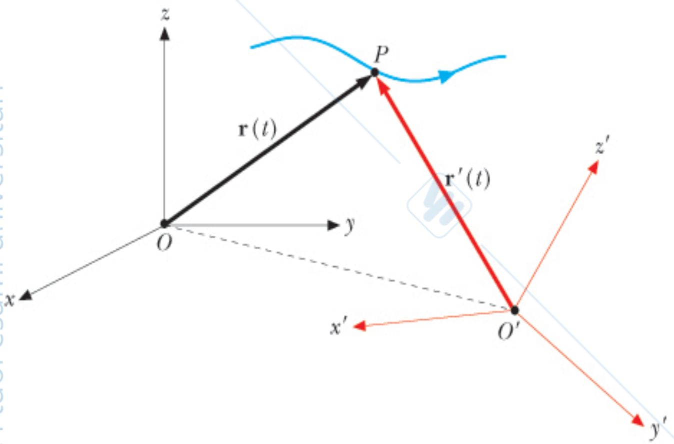
L'accelerazione $\vec{a}_P$ del punto P rispetto al sistema di riferimento fisso (O, x, y, z) è data da:

$$\vec{a}_P = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{u}_z$$

$$\frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{u}_z$$

essendo $\frac{dx}{dt}\frac{d\hat{u}_x}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\hat{u}_y}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\hat{u}_z}{dt} = 0$ perché i versori $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ e $\hat{u}_z$ sono invarianti nel tempo,

$$\Longrightarrow \vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt}$$



Vettore accelerazione $\vec{a}$

L'accelerazione $\vec{a}'_P$ del punto P rispetto al sistema di riferimento mobile (O, x', y', z') è data da:

$$\vec{a}'_P = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{u}_{z'}$$

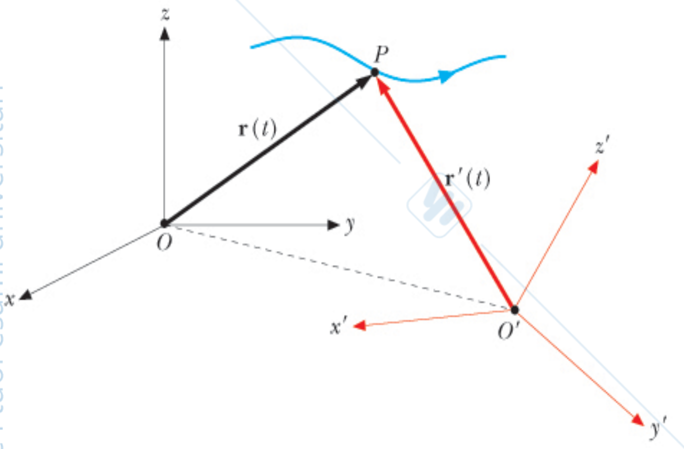
$$\frac{d\vec{v}'_P}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}\right) =$$

$$= \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{u}_{z'} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}$$

essendo $\frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} \neq 0$ poiché i versori $\hat{u}_{x'}$, $\hat{u}_{y'}$ e $\hat{u}_{z'}$ possono variare nel tempo in direzione, per cui:

$$\Rightarrow \quad \vec{a}'_P \neq \frac{d\vec{v}'_P}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}'_P}{dt} = \vec{a}'_P + \frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}$$

Vettore accelerazione $\vec{a}$



L'accelerazione $\vec{a}_{O'}$ dell'origine O' del sistema di riferimento mobile (O', x', y', z') rispetto al sistema fisso (O, x, y, z) è data da:

$$\vec{a}_{O'} = \frac{d^2 x_{O'}}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2 y_{O'}}{dt^2}\hat{u}_y + \frac{d^2 z_{O'}}{dt^2}\hat{u}_z$$

$$\frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_{O'}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{u}_z\right) = \frac{d^2 x_{O'}}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2 y_{O'}}{dt^2}\hat{u}_y + \frac{d^2 z_{O'}}{dt^2}\hat{u}_z$$

essendo $\frac{dx_{O'}}{dt}\frac{d\hat{u}_x}{dt} + \frac{dy_{O'}}{dt}\frac{d\hat{u}_y}{dt} + \frac{dz_{O'}}{dt}\frac{d\hat{u}_z}{dt} = 0$ perché i versori $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ e $\hat{u}_z$ sono invarianti nel tempo,

$$\Longrightarrow \quad \vec{a}_{O'} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt}$$

Deriviamo la relazione [3] $\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P$ rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'_P}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_P + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'_P}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P + \boxed{\frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_P + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'_P}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} = \frac{dx'}{dt}(\vec{\omega} \times \hat{u}_{x'}) + \frac{dy'}{dt}(\vec{\omega} \times \hat{u}_{y'}) + \frac{dz'}{dt}(\vec{\omega} \times \hat{u}_{z'}) =$$

$$= \left(\vec{\omega} \times \frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'}\right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'}\right) + \left(\vec{\omega} \times \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}\right) = \vec{\omega} \times \left(\frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{z'}\right)$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{v}'_P$$

$$\Rightarrow \vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P + \vec{\omega} \times \vec{v}'_P + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_P + \vec{\omega} \times \boxed{\frac{d\vec{r}'_P}{dx}}$$

$$\vec{v}'_P + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P$$

Teorema delle accelerazioni relative:

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_P + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P}$$

$\Rightarrow$ le accelerazioni calcolate nei due sistemi di riferimento sono diverse, ma non scorrelate

accelerazione di trascinamento $\vec{a}_t$: $\quad \vec{a}_t = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_P$

termine centrifugo

accelerazione di Coriolis $\vec{a}_C$: $\quad \vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P$

$\Rightarrow$ dipende dal moto del punto P rispetto al sistema di riferimento mobile: se il punto P è fermo rispetto al sistema di riferimento mobile tale accelerazione risulta nulla

$$\Rightarrow \vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_t + \vec{a}_C$$

Casi particolari:

1) moto relativo traslatorio: $\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_{O'}$

⇒ Il sistema mobile NON ruota rispetto a quello fisso, ma trasla solo per esempio, il punto P è fermo rispetto al sistema di riferimento fisso ($\vec{a}_P = 0$)⇒ rispetto al sistema di riferimento mobile il punto P si muove con $\vec{a}'_P = -\vec{a}_{O'}$, ossia con l'accelerazione dell'origine del sistema di riferimento mobile ma con verso opposto

Casi particolari:

1) moto relativo traslatorio: $\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_{O'}$

$\Rightarrow$ Il sistema mobile NON ruota rispetto a quello fisso, ma trasla solo
per esempio, il punto P è fermo rispetto al sistema di riferimento fisso ($\vec{a}_P = 0$)$\Rightarrow$ rispetto al sistema di riferimento mobile il punto P si muove con $\vec{a}'_P = -\vec{a}_{O'}$, ossia con l'accelerazione dell'origine del sistema di riferimento mobile ma con verso opposto

2) moto relativo rotatorio: $\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_P + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P$

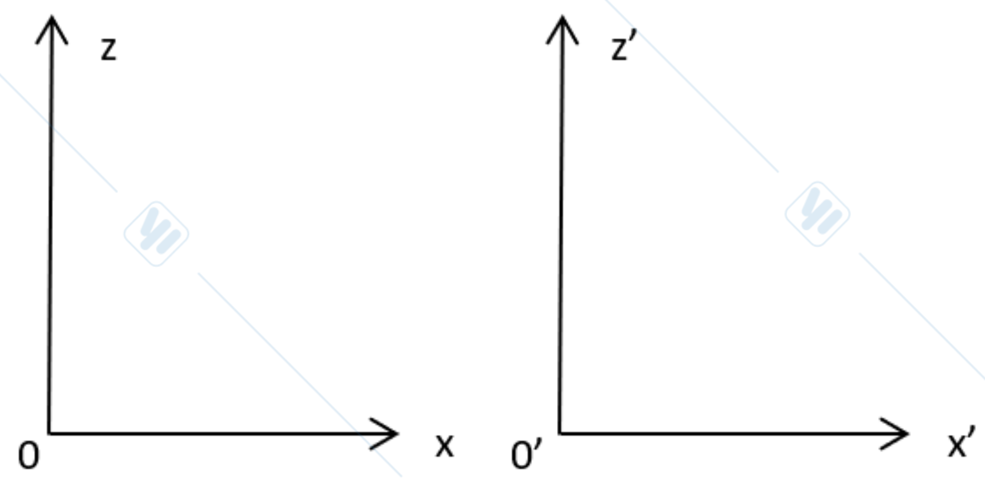
$\Rightarrow$ Il sistema mobile NON trasla rispetto a quello fisso, ma ruota solo
per esempio, il punto P è fermo rispetto al sistema di riferimento fisso ($\vec{a}_P = 0$)
$\Rightarrow$ rispetto al sistema di riferimento mobile il punto P si muove con
$\vec{a}'_P = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P) - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_P - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P.$

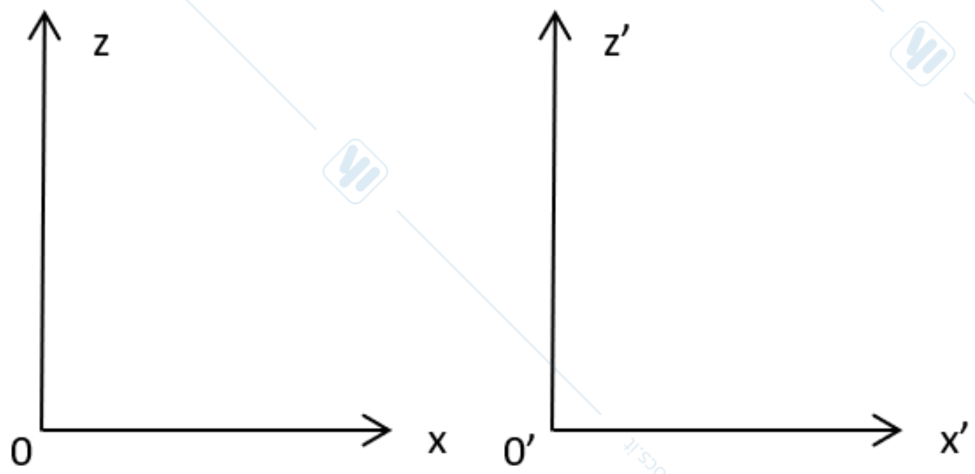
Esempio – moto di trascinamento traslatorio (ω= 0)

Considieriamo due sistemi di riferimento

- uno fisso a terra O(x, z)
- e l'altro mobile O'(x', z') solidale ad un carrello

con gli assi x e x' lungo la stessa retta e gli assi z e z' paralleli tra di loro.
Ipotizziamo che i due sistemi siano in moto relativo traslazionale tra di loro ed esso avvenga lungo la direzione dell'asse x e dell'asse x'.



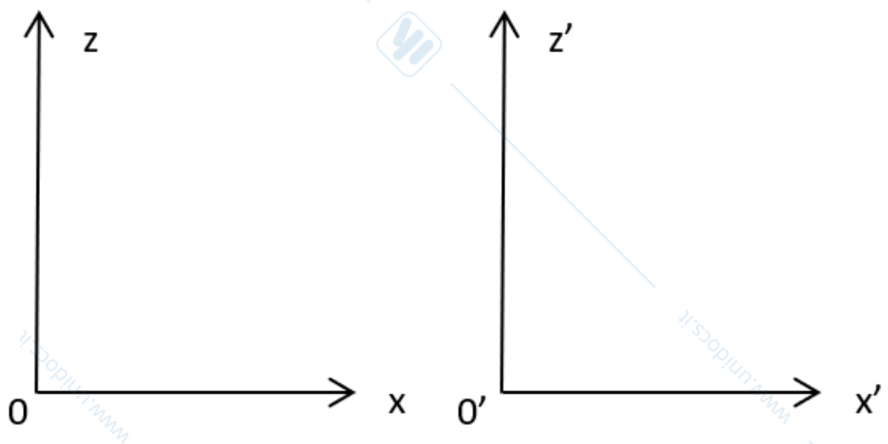


All'istante t=0, quando O e O' coincidono, una massa puntiforme viene lasciata cadere da una piattaforma alta *h* solidale al carrello.
Analizziamo cosa vede un osservatore solidale con O e un osservatore solidale con O' nelle seguenti situazioni:

1) O' è in moto di trascinamento rettilineo uniforme: $\vec{v}_{o'} \rightarrow$ costante

2) O' è in moto di trascinamento rettilineo uniformemente accelerato: $\vec{a}_{o'} \rightarrow$ costante

1) O' è in moto di trascinamento rettilineo uniforme: $\vec{v}_{O'} \rightarrow$ costante



Il sistema O' si muove lungo la direzione dell'asse x di moto rettilineo uniforme con $\vec{v} = \vec{v}_{O'}$.

Un osservatore solidale con O vede la massa cadere con velocità iniziale $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_{O'} = v_{O'}\hat{u}_x$, con $v_{O'} > 0$, soggetta all'accelerazione $\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{u}_z$, con g>0 e partendo dalla posizione iniziale $\vec{r}(t=0) = h\hat{u}_z$. Il moto è quindi di tipo parabolico, ossia rettilineo uniforme lungo l'asse x e rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse z:

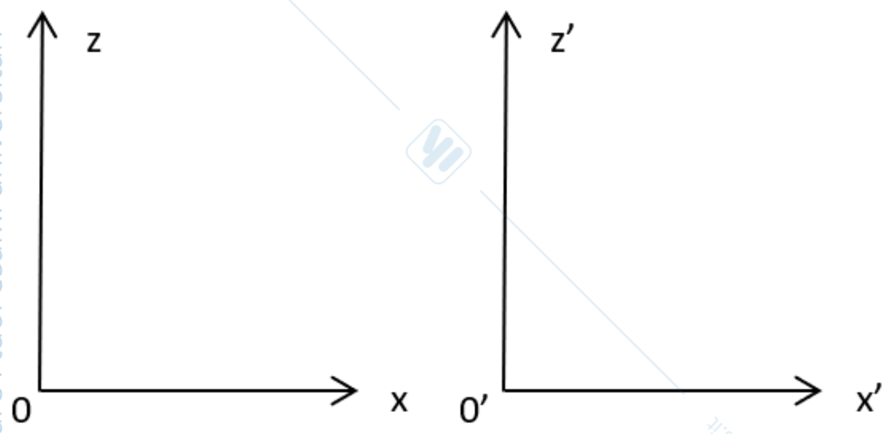
$$\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{u}_z$$

$$\vec{v} = v_x\hat{u}_x + v_z\hat{u}_z = v_{O'}\hat{u}_x - gt\hat{u}_z$$

$$\vec{r} = x\hat{u}_x + z\hat{u}_z = v_{O'}t \cdot \hat{u}_x + (h - \frac{1}{2}gt^2)\hat{u}_z$$

In particolare, il tempo di caduta t_c risulta: $z(t_c) = 0 \Rightarrow (h - \frac{1}{2}gt_c^2) = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

e la massa cade ad una distanza x_c da O: $x(t_c) = x_c = v_{O'}t_c = v_{O'}\sqrt{\frac{2h}{g}}$



Un osservatore solidale con O’ vede la massa cadere verticalmente lungo l’asse z’ con moto rettilineo uniformemente accelerato. Dal teorema delle accelerazioni relative, con $\vec{a}_{O'} = 0$ e $\vec{\omega} = 0$, si ottiene:

$$\vec{a} = \vec{a}' \Rightarrow \vec{a}' = \vec{g}$$

da cui, sapendo che $\vec{v}'(t=0) = 0$ e $\vec{r}'(t=0) = h\hat{u}_{z'}$

$$\vec{a}' = \vec{g} = -g\hat{u}_{z'}$$

$$\vec{v}' = v_{x'}\hat{u}_{x'} + v_{z'}\hat{u}_{z'} = 0 - gt\hat{u}_{z'}$$

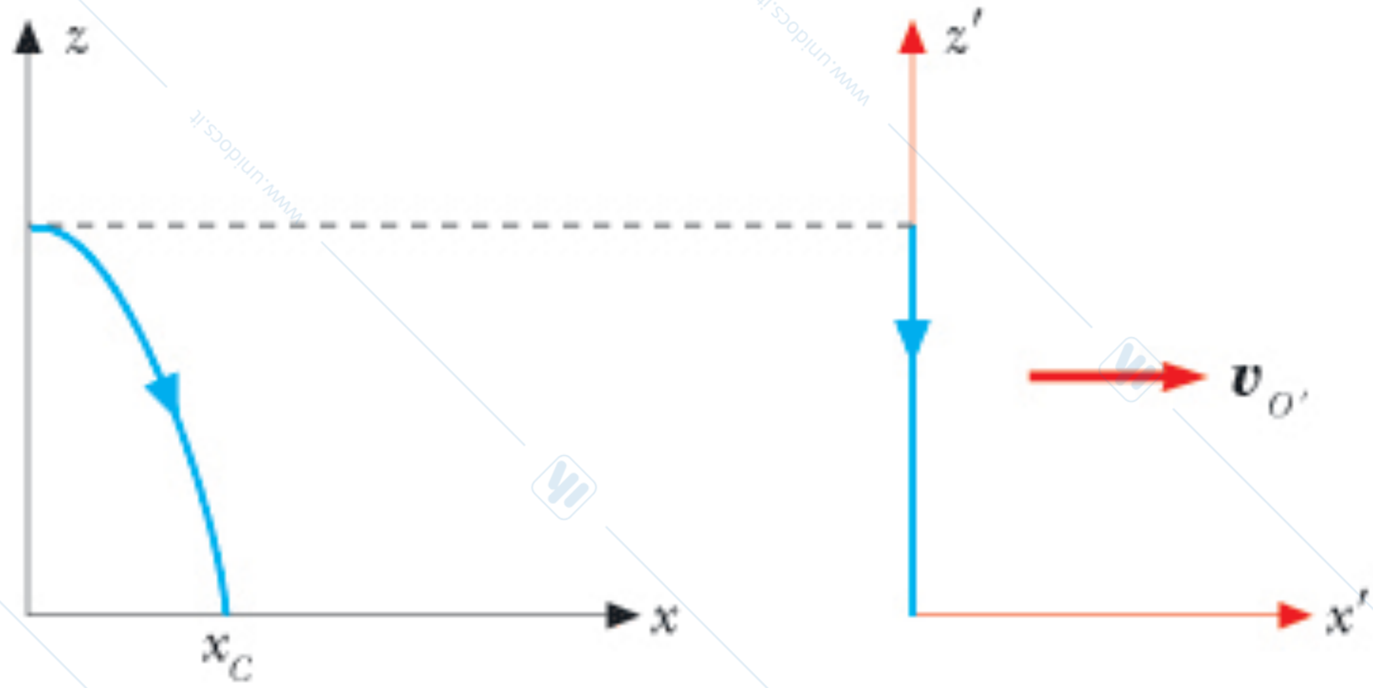
$$\vec{r}' = x'\hat{u}_{x'} + z'\hat{u}_{z'} = 0 + (h - \frac{1}{2}gt^2)\hat{u}_{z'}$$

In particolare, il tempo di caduta t_c risulta:

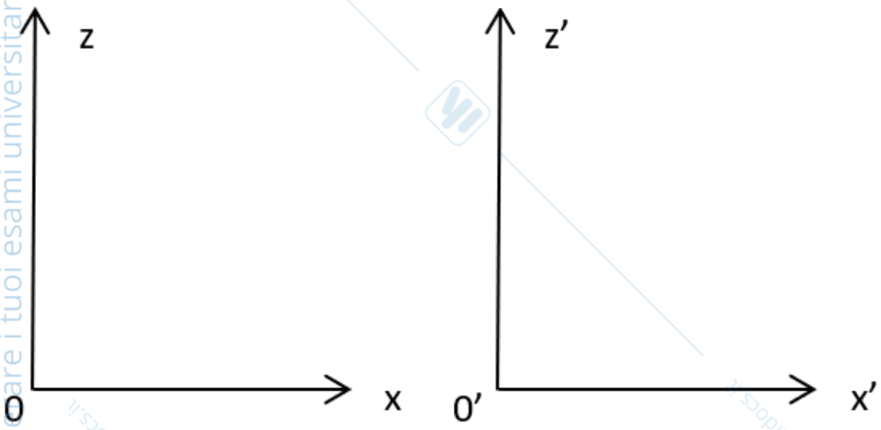
$$z'(t_c) = 0 \Rightarrow (h - \frac{1}{2}gt_c^2) = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\vec{r} = x\hat{u}_x + z\hat{u}_z = v_{o'}t \cdot \hat{u}_x + (h - \frac{1}{2}gt^2)\hat{u}_z$$

$$\vec{r}' = x'\hat{u}_{x'} + z'\hat{u}_{z'} = 0 + (h - \frac{1}{2}gt^2)\hat{u}_{z'}$$



2) O' è in moto di trascinamento rettilineo uniformemente accelerato: $\vec{a}_{O'} \rightarrow$ costante

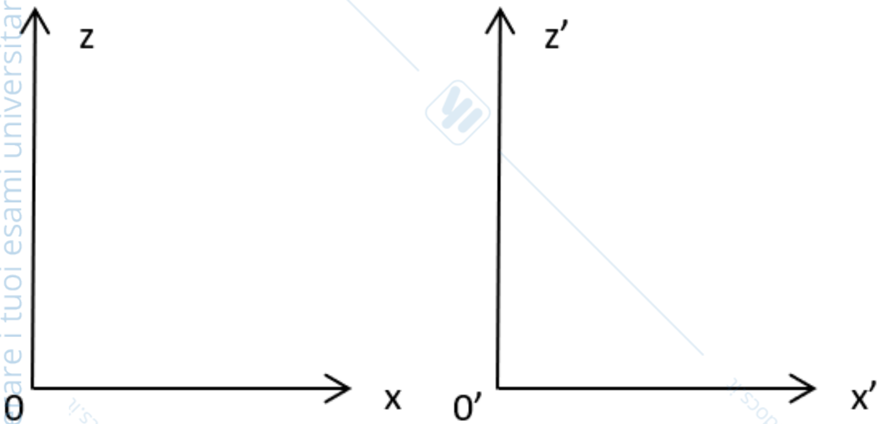


Il sistema O' si muove lungo la direzione dell'asse x di moto rettilineo uniformemente accelerato con $\vec{a} = \vec{a}_{O'} = a_{O'}\hat{u}_x$, con $a_{O'} > 0$. Indichiamo con $\vec{v} = v_{in}\hat{u}_x$ (con $v_{in} > 0$) la velocità del carrello nell'istante $t = 0$.

Un osservatore solidale con O vede la massa cadere con velocità iniziale $\vec{v} = v_{in}\hat{u}_x$ soggetta all'accelerazione $\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{u}_z$, con $g > 0$ e partendo dalla posizione iniziale $\vec{r}(t=0) = h\hat{u}_z$: il moto è quindi lo stesso visto nel caso 1).

In particolare, il tempo di caduta t_c risulta $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

e la massa cade ad una distanza x_c da O data da $x(t_c) = x_c = v_{in}t_c = v_{in}\sqrt{\frac{2h}{g}}$



Un osservatore solidale con O' vede la massa cadere seguendo le equazioni del moto ottenute in base al teorema delle accelerazioni relative, con $\vec{\omega} = 0$:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} \Rightarrow \vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}_{O'}$$

da cui sapendo che $\vec{v}'(t=0) = 0$ e $\vec{r}'(t=0) = h\hat{u}_{z'}$:

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}_{O'} = -a_{O'}\hat{u}_{x'} - g\hat{u}_{z'}$$

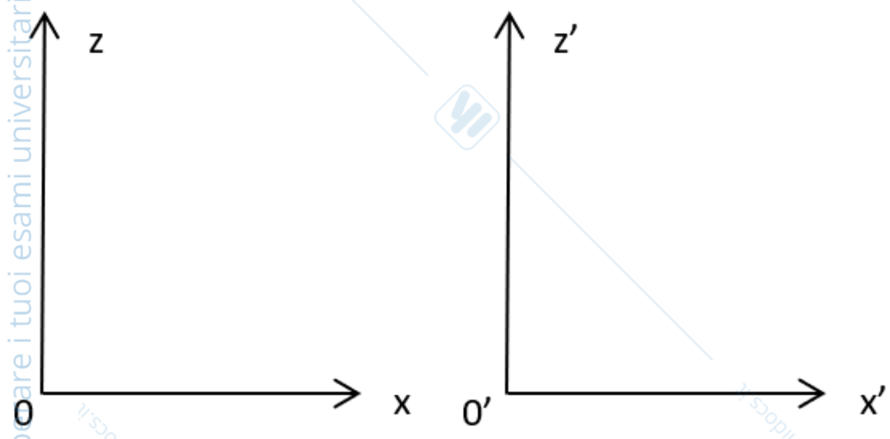
$$\vec{v}' = v_{x'}\hat{u}_{x'} + v_{z'}\hat{u}_{z'} = -a_{O'}t\hat{u}_{x'} - gt\hat{u}_{z'}$$

$$\vec{r}' = x'\hat{u}_{x'} + z'\hat{u}_{z'} = (-\frac{1}{2}a_{O'}t^2)\hat{u}_{x'} + (h - \frac{1}{2}gt^2)\hat{u}_{z'}$$

Il moto della massa risulta quindi rettilineo uniformemente accelerato lungo entrambi gli assi x' e z'. In particolare, il tempo di caduta t_c risulta:

$$z'(t_c) = 0 \Rightarrow (h - \frac{1}{2}gt_c^2) = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

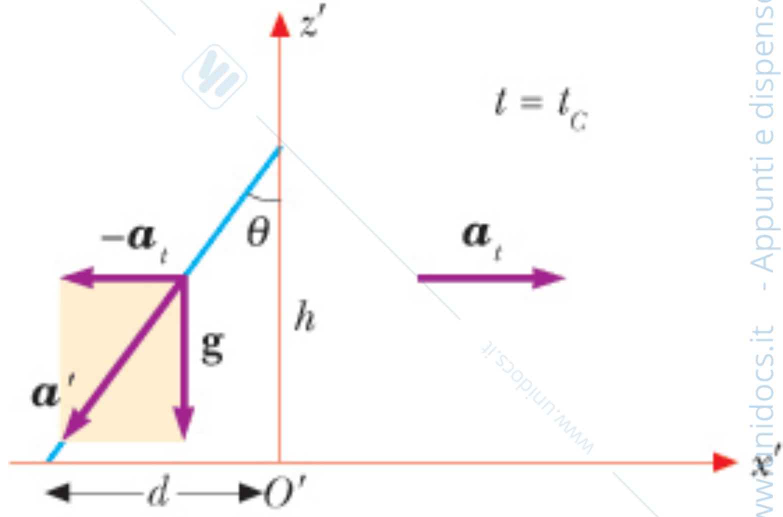
e la massa cade ad una distanza x'_c da O' data da $x'(t_c) = x'_c = -\frac{1}{2}a_{O'}t^2 = -\frac{a_{O'}h}{g}$



$$\vec{r}' = x'\hat{u}_{x'} + z'\hat{u}_{z'} = (-\frac{1}{2}a_{O'}t^2)\hat{u}_{x'} + (h - \frac{1}{2}gt^2)\hat{u}_{z'}$$

Vediamo ora che tipo di traiettoria segue la massa nella sua caduta:

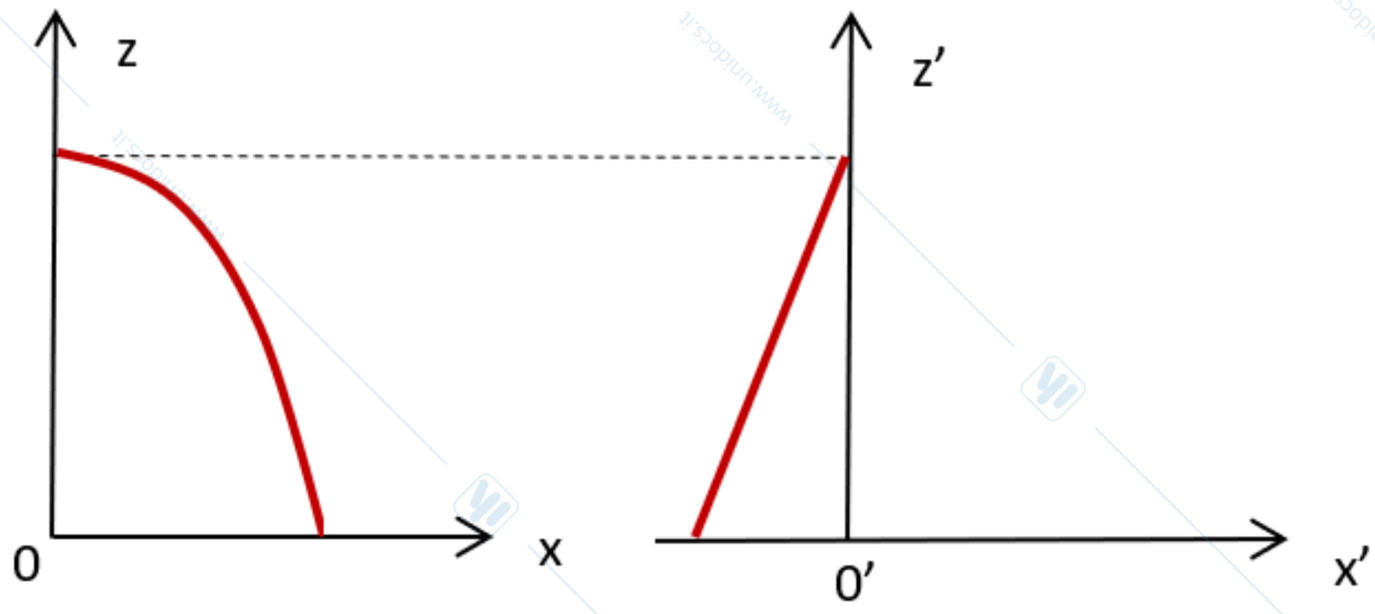
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}a_{O'}t^2 \\ z' = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 = -\frac{2}{a_{O'}}x' \\ z' = h + \frac{1}{2}g\frac{2}{a_{O'}}x' = h + \frac{g}{a_{O'}}x' \end{cases}$$



la traiettoria è quindi rettilinea con pendenza positiva $\frac{g}{a_{O'}}$.

$$\vec{r} = x\hat{u}_x + z\hat{u}_z = v_{iniz}t \cdot \hat{u}_x + (h - \frac{1}{2}gt^2)\hat{u}_z$$

$$\vec{r}' = x'\hat{u}_{x'} + z'\hat{u}_{z'} = (-\frac{1}{2}a_{O'}t^2)\hat{u}_{x'} + (h - \frac{1}{2}gt^2)\hat{u}_{z'}$$

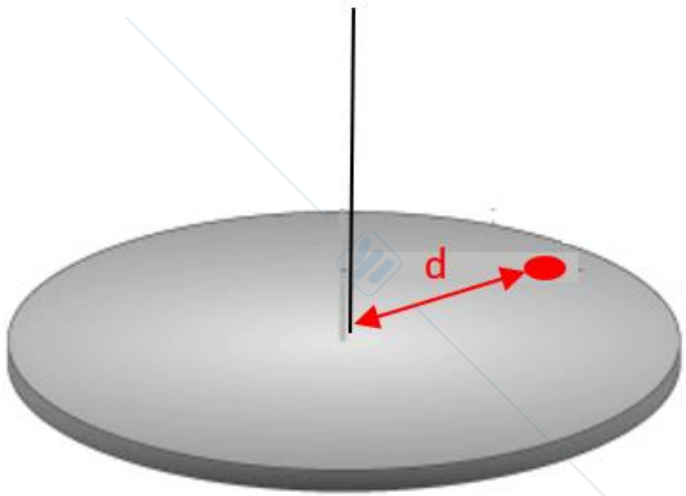


www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esempio – moto di trascinamento rotatorio uniforme (ω costante e $v_{0'}= 0$)

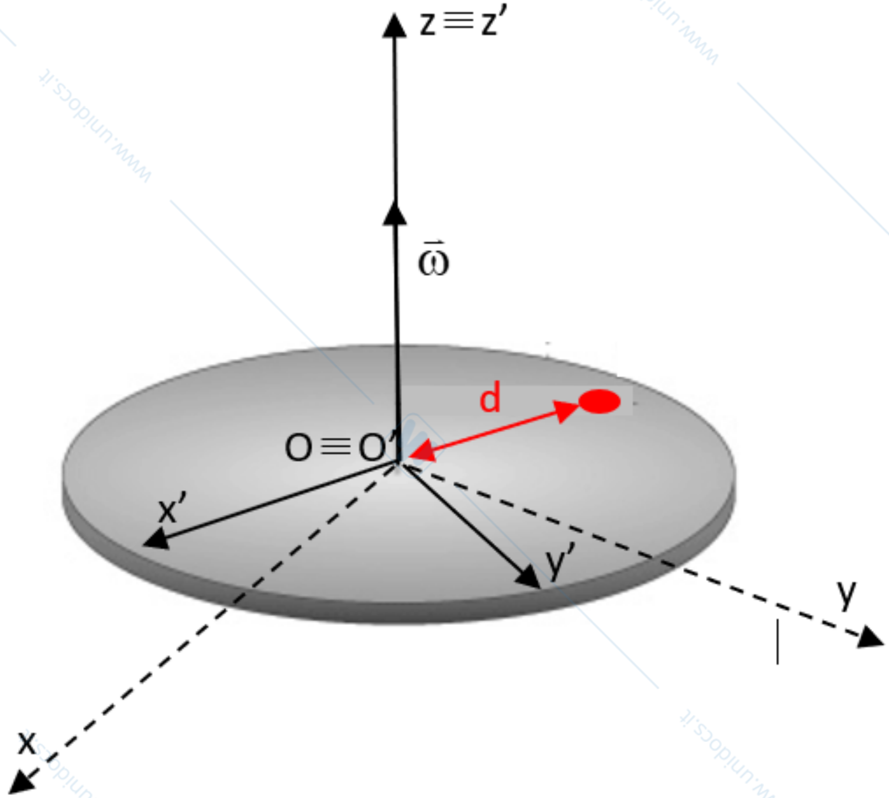
Una piattaforma ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante (in senso antiorario). Un dischetto posto sulla piattaforma si trova ad una distanza *d* dall'asse di rotazione della piattaforma stessa. Tra il dischetto e la piattaforma non c'è attrito.

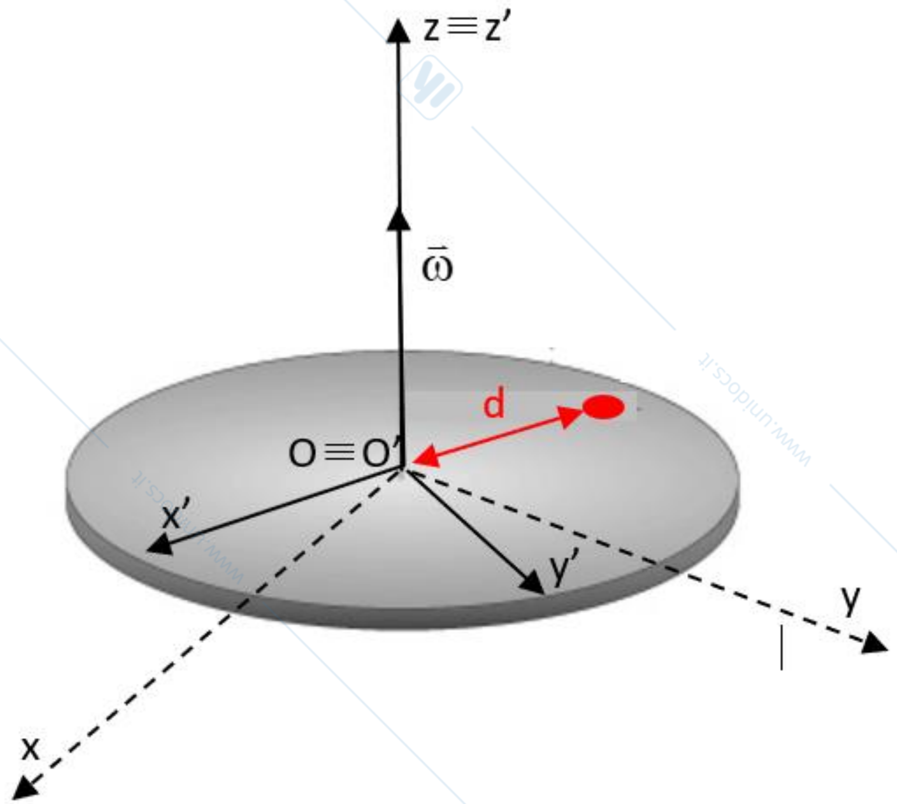
Determinare la velocità $\vec{v}'$ e l'accelerazione $\vec{a}'$ del dischetto rispetto alla piattaforma (in direzione, verso e modulo)



Consideriamo due sistemi di riferimento

1) un sistema di riferimento fisso a terra (O, x, y, z) con asse z coincidente con l'asse di rotazione della piattaforma, assi x e y sulla terra e con centro O sulla piattaforma stessa
2) un sistema mobile (O', x', y', z') con asse z' coincidente con l'asse di rotazione della piattaforma, con assi x' e y' sulla piattaforma e ruotanti con essa e con centro O' sulla piattaforma stessa

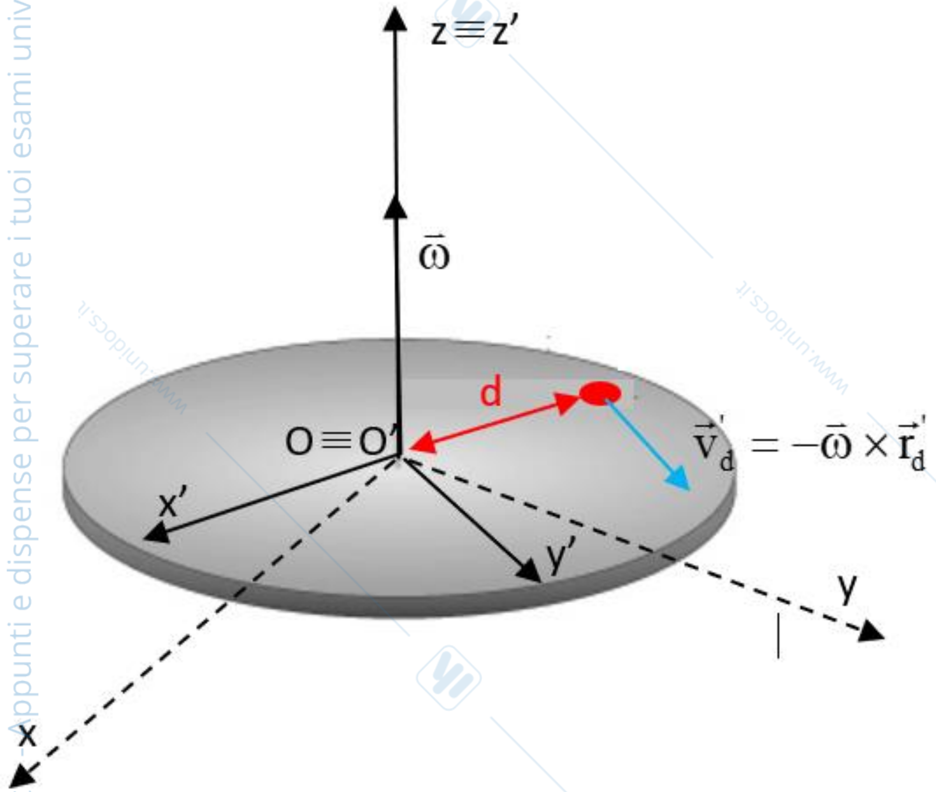




Se non c'è attrito tra il dischetto e la piattaforma allora,

- rispetto al sistema di riferimento fisso a terra, il dischetto rimane fermo.
- rispetto al sistema di riferimento mobile fissato alla piattaforma, il dischetto ruota con velocità angolare $-\vec{\omega}$ (in senso orario)

1) Calcolo della velocità $\vec{v}'$ del dischetto rispetto alla piattaforma



Utilizziamo il teorema delle velocità relative:

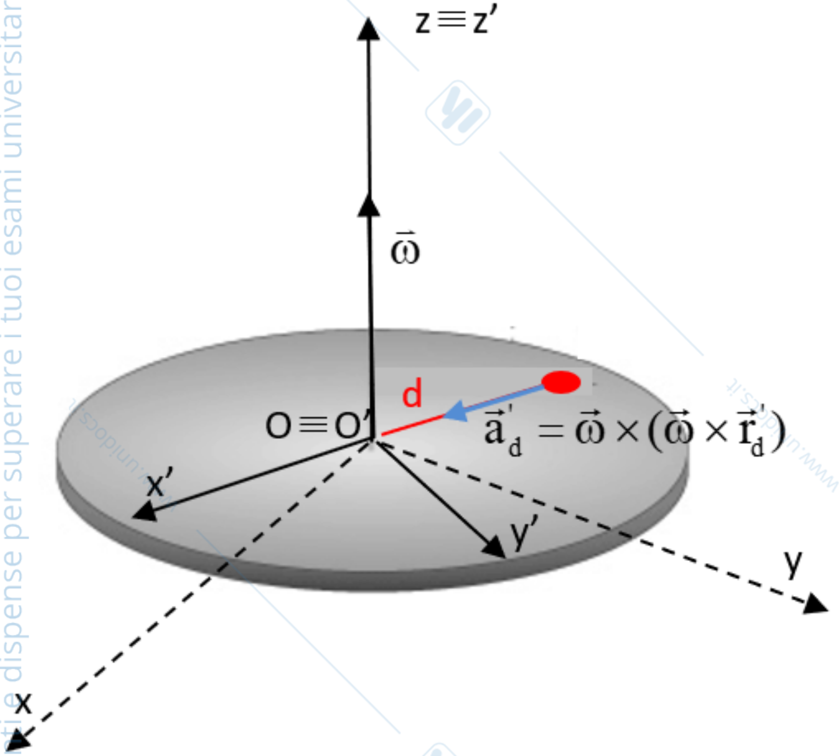
$$\vec{v}_d = \vec{v}_d' + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_d'$$

con $\vec{v}_d$ la velocità del dischetto rispetto al sistema fisso ($\vec{v}_d = 0$), $\vec{v}_d'$ la velocità del dischetto rispetto al sistema mobile, $\vec{v}_{O'}$ la velocità di O' rispetto a O ($\vec{v}_{O'} = 0$), $\vec{\omega}$ la velocità angolare del sistema di riferimento mobile (=velocità angolare della piattaforma) e $\vec{r}_d'$ il vettore posizione del dischetto (di modulo *d*) rispetto al sistema di riferimento mobile.

$\Rightarrow 0 = \vec{v}_d' + \vec{\omega} \times \vec{r}_d' \Rightarrow \vec{v}_d' = -\vec{\omega} \times \vec{r}_d' = (-\vec{\omega}) \times \vec{r}_d'$ con $|\vec{v}_d'|$ costante

ossia, nel sistema di riferimento mobile, il dischetto percorre un moto circolare uniforme (raggio = r_d') con velocità angolare $-\vec{\omega}$ (in senso orario).

2) Calcolo dell'accelerazione $\vec{a}'$ del dischetto rispetto alla piattaforma



Dal momento che il dischetto, rispetto al sistema di riferimento mobile, percorre una traiettoria circolare con moto circolare uniforme
$\Rightarrow$ ci deve essere una accelerazione normale o centripeta.
Per il calcolo dell'accelerazione $\vec{a}'_d$ del dischetto rispetto alla piattaforma utilizziamo il teorema delle accelerazioni relative:

$$\vec{a}_d = \vec{a}'_d + \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}'_d + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'_d) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_d$$

con $\vec{a}_d$ l'accelerazione del dischetto rispetto al sistema fisso ($\vec{a}_d = 0$), $\vec{a}'_d$ l'accelerazione del dischetto rispetto al sistema mobile, $\vec{a}_{O'}$ l'accelerazione di O' rispetto a O ($\vec{a}_{O'} = 0$), $\vec{\omega}$ la velocità angolare del sistema di riferimento mobile (essendo costante $\Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$), $\vec{r}'_d$ il vettore posizione (di modulo *d*) del dischetto rispetto al sistema di riferimento mobile e $\vec{v}'_d$ $(= -\vec{\omega}\times\vec{r}'_d)$ la velocità (costante in modulo) del dischetto rispetto al sistema mobile

$$0 = \vec{a}'_d + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'_d) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'_d = \vec{a}'_d + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'_d) + 2\vec{\omega}\times(-\vec{\omega}\times\vec{r}'_d) = \vec{a}'_d - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'_d) \Rightarrow \vec{a}'_d = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'_d)$$

2) Dinamica

Sistemi di riferimento inerziali e non inerziali

Sistema di riferimento inerziale: sistema di riferimento in cui valga rigorosamente il «Principio di inerzia» (I legge di Newton).

$\Downarrow$

In un sistema di riferimento inerziale le forze che compaiono nella II legge di Newton sono *forze vere*, ossia dovute alle interazioni fondamentali: $\vec{R}=\sum_i \vec{F}_i=\sum_i \vec{F}_{reali,i}=m\vec{a}$

(se m costante)

Dato un sistema di riferimento inerziale (O,x,y,z), consideriamo un altro sistema di riferimento che si muove di <u>moto rettilineo uniforme</u> rispetto al primo:

$$\vec{v}_{O'} = \text{costante}, \quad \vec{a}_{O'} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\omega} = 0$$

Dal teorema delle accelerazioni relative:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_P + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P$$

Definito un sistema di riferimento inerziale, tutti gli altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto a questo sono anch'essi inerziali

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P' \rightarrow m\vec{a}_P = m\vec{a}_P'$$

$$\Downarrow$$

La dinamica è la stessa

$$\Downarrow$$

Non è possibile stabilire se uno di essi è in quiete o in moto

$$\Downarrow$$

Relatività galileana

Dato un sistema di riferimento inerziale (O,x,y,z), consideriamo un altro sistema di riferimento (O',x',y',z') che si muove (trasla accelerando e ruota) rispetto al primo:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_P + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_P$$

$$\Downarrow$$

$$m\vec{a}_P = m\vec{a}_{O'} + m\vec{a}'_P + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P) + m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_P + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'_P$$

$$\Downarrow$$

$$m\vec{a}'_P = \boxed{m\vec{a}_P} \boxed{- m\vec{a}_{O'} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P) - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_P - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'_P}$$

$$= \sum_i \vec{F}_{reali,i} \qquad\qquad = \sum_i \vec{F}_{apparenti,i}$$

Le forze apparenti NON derivano dalle interazioni fondamentali e NON esistono in un sistema di riferimento inerziale.

In un sistema di riferimento NON inerziale

$$\sum_i \vec{F}_{reali,i} = m\vec{a}_P = 0 \quad \textbf{NON implica} \quad \vec{a}'_p = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m\vec{a}'_P = -m\vec{a}_{O'} \underbrace{- m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P)}_{\text{Forza centrifuga}} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'_P \underbrace{- 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'_P}_{\text{Forza di Coriolis}} = \sum_i \vec{F}_{apparenti,i}$$

$$\Downarrow$$

In un sistema di riferimento NON inerziale, una traiettoria curva NON presuppone necessariamente l'azione di una forza centripeta reale, ma può essere un effetto *apparente* dovuto al moto accelerato del sistema in cui l'osservatore si trova.

Esempio – moto di trascinamento traslatorio ($\omega = 0$)

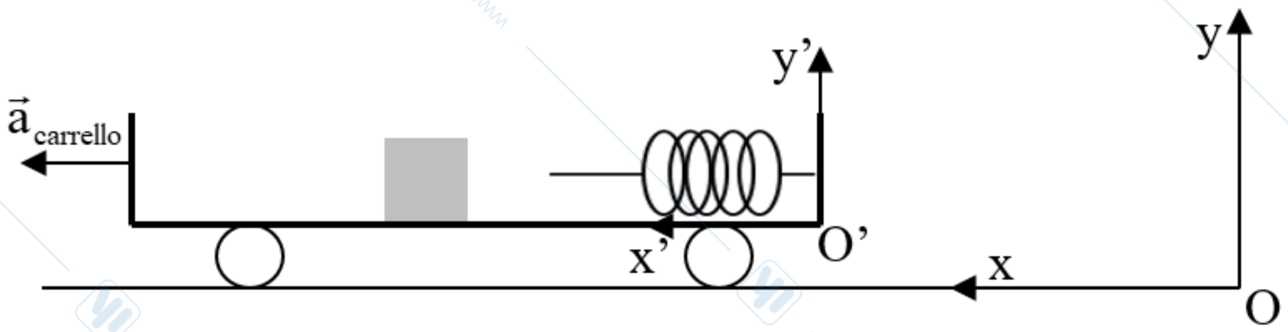
Un corpo puntiforme di massa nota m è posto sul pavimento <u>liscio</u> di un carrello che, partendo da fermo, si muove a sinistra lungo un piano orizzontale con accelerazione nota $\vec{a}_{carrello}$.

Determinare a regime la compressione Δx della molla di costante elastica k il cui estremo destro è vincolato alla parete destra del carrello.

Esempio – moto di trascinamento traslatorio ($\omega = 0$)

Un corpo puntiforme di massa nota m è posto sul pavimento <u>liscio</u> di un carrello che, partendo da fermo, si muove a sinistra lungo un piano orizzontale con accelerazione nota $\vec{a}_{carrello}$.

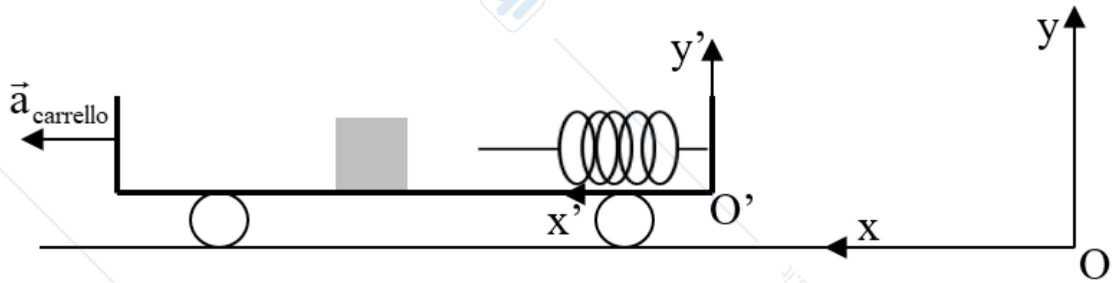
Determinare a regime la compressione Δx della molla di costante elastica k il cui estremo destro è vincolato alla parete destra del carrello.



Consideriamo due sistemi di riferimento:

1) sistema inerziale fisso a terra (O, x, y)
2) sistema NON inerziale ancorato sul bordo destro del carrello (O', x', y')

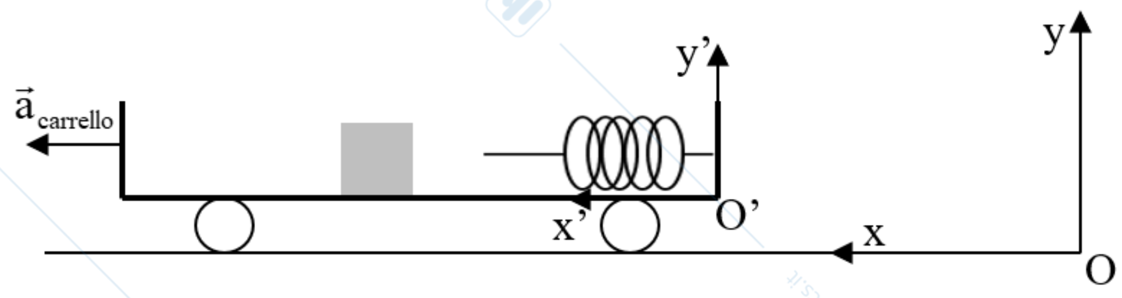
1) Risoluzione del problema rispetto al sistema di riferimento inerziale fisso a terra (O, x, y)

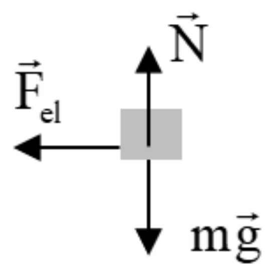


Il carrello si muove verso sinistra mentre la massa *m* resta ferma fino a quando essa non tocca la molla, che si sta nel frattempo muovendo verso sinistra con la stessa accelerazione $\vec{a}_{carrello}$ del carrello. Quando la massa *m* tocca la molla quest'ultima inizia a comprimersi e la forza elastica $\vec{F}_{el}$ che si genera comincia a spingere la massa *m* a sinistra.

A regime la massa *m* si muoverà a sinistra con la stessa accelerazione $\vec{a}_{carrello}$ del carrello e la molla risulterà compressa di Δx.

1) Risoluzione del problema rispetto al sistema di riferimento inerziale fisso a terra (O, x, y)

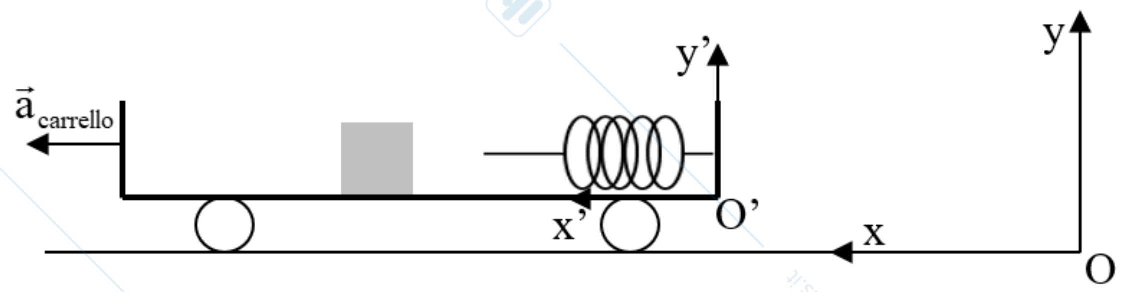




Dalla seconda legge di Newton, applicata alla massa $m \Rightarrow m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{el} = m\vec{a}_{carrello}$

proiettando su x e y $\Rightarrow \begin{cases} F_{el} = k\Delta x = ma_{carrello} \\ N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = \dfrac{m}{k} a_{carrello} \\ N = mg \end{cases}$

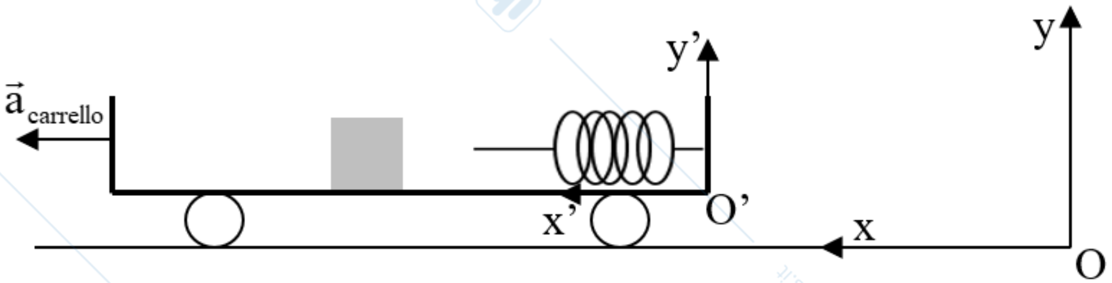
2) Risoluzione del problema rispetto al sistema di riferimento NON inerziale ancorato al carrello (O', x', y')



Rispetto al carrello la massa *m* si sposta a destra fino a quando essa non urta la molla che risulta ferma rispetto al carrello stesso. Quando la massa *m* tocca la molla quest'ultima inizia a comprimersi e la forza elastica $\vec{F}_{el}$ che si genera comincia a rallentare la massa *m*.

A regime la massa *m* risulterà ferma rispetto al carrello e la molla risulterà compressa di Δx

2) Risoluzione del problema rispetto al sistema di riferimento NON inerziale ancorato al carrello (O', x', y')



Dal teorema delle accelerazioni relative, prendendo in esame il corpo di massa *m* si ha:

$$\vec{a}_m = \vec{a}'_m + \vec{a}_{O'}$$

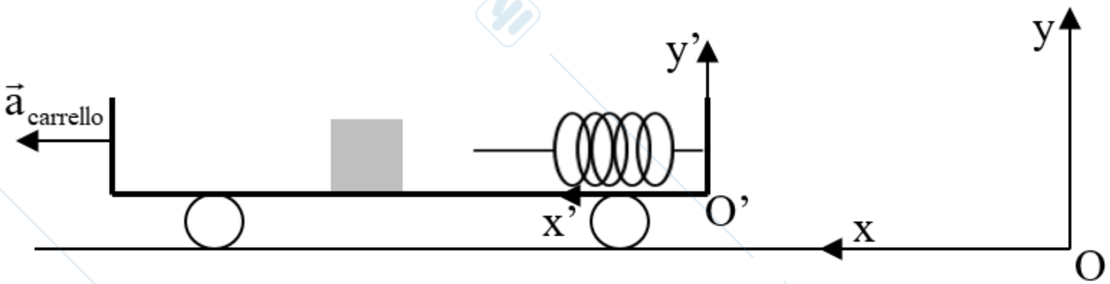
essendo $\vec{a}_m$ l'accelerazione del corpo di massa *m* rispetto al sistema di riferimento fisso inerziale (O, x, y), $\vec{a}'_m$ l'accelerazione del corpo di massa *m* rispetto al sistema di riferimento mobile non inerziale (O', x', y') e $\vec{a}_{O'}$ l'accelerazione di O' rispetto ad O.

Poiché $\vec{a}_{O'} = \vec{a}_{carrello}$, e, a regime, $\vec{a}'_m = 0 \Rightarrow \Rightarrow$

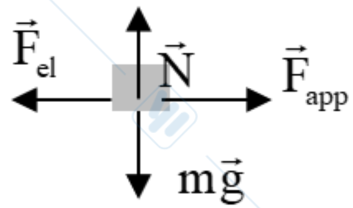
$$\vec{a}_m = 0 + \vec{a}_{carrello} \Rightarrow \vec{a}_m - \vec{a}_{carrello} = 0 \Rightarrow \boxed{m\vec{a}_m} - m\vec{a}_{carrello} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{el}} - m\vec{a}_{carrello} = 0 \Rightarrow \text{proiettando su x' e y'}: \begin{cases} F_{el} = k\Delta x = ma_{carrello} \\ N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = \dfrac{m}{k} a_{carrello} \\ N = mg \end{cases}$$

2) Risoluzione del problema rispetto al sistema di riferimento NON inerziale ancorato al carrello (O', x', y')



Dal punto di vista dell'osservatore sul carrello la massa *m* inizialmente viene spinta a destra da una forza costante (poiché il carrello si sposta a sinistra con accelerazione costante) **non** legata ad interazioni fondamentali (→forza apparente).
Una volta che la massa *m* si scontra con la molla la forza apparente viene contrastata dalla forza *reale* elastica $\vec{F}_{el}$ (diretta verso sinistra) che rallenta la massa *m* fino a farla fermare.



A questo punto (→equilibrio) le due forze si sono controbilanciate:

$$\vec{F}_{el} = \vec{F}_{app} \rightarrow \left|\vec{F}_{app}\right| = \left|\vec{F}_{el}\right| = k\Delta x$$

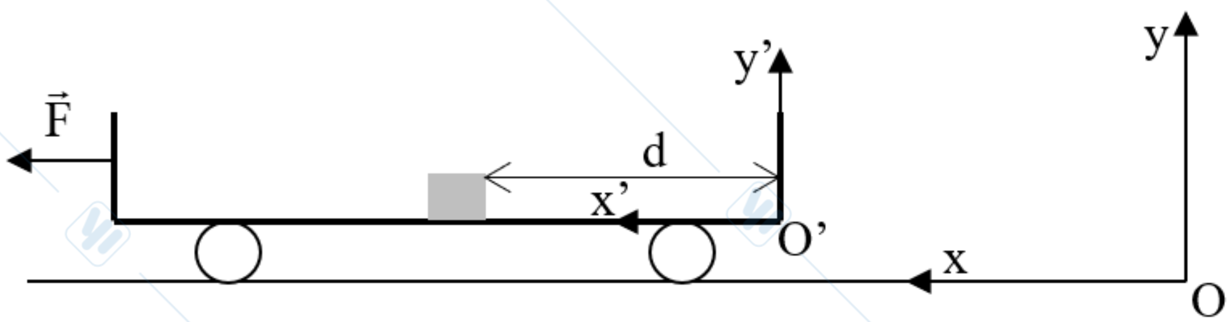
Dai risultati precedenti si sa che: $\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_{carrello}$

Esempio – moto di trascinamento traslatorio ($\omega = 0$)

Un corpo puntiforme di massa $m_A = 2$ kg è posto su di un carrello che può scorrere su di un piano orizzontale. Inizialmente il corpo è posto ad una distanza $d = 1$ m dal bordo destro del carrello, la cui massa è $m_B = 8$ kg. Tra il carrello e il corpo c'è attrito caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$. Il carrello viene messo in moto verso sinistra tramite l'applicazione di una forza orizzontale $\vec{F}$ di modulo $F = 30$ N e il corpo inizia a scivolare verso il bordo destro del carrello. Calcolare dopo quanto tempo, t_{urto}, il corpo urta la parete del carrello.

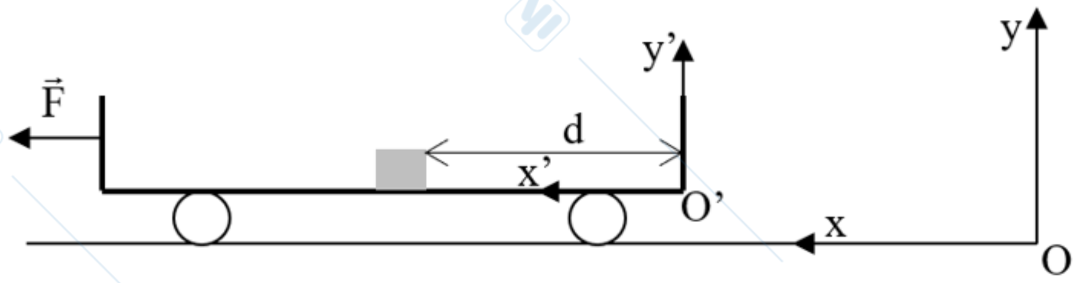
Esempio – moto di trascinamento traslatorio ($\omega = 0$)

Un corpo puntiforme di massa $m_A = 2$ kg è posto su di un carrello che può scorrere su di un piano orizzontale. Inizialmente il corpo è posto ad una distanza $d = 1$ m dal bordo destro del carrello, la cui massa è $m_B = 8$ kg. Tra il carrello e il corpo c'è attrito caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$. Il carrello viene messo in moto verso sinistra tramite l'applicazione di una forza orizzontale $\vec{F}$ di modulo F = 30 N e il corpo inizia a scivolare verso il bordo destro del carrello. Calcolare dopo quanto tempo, t_{urto}, il corpo urta la parete del carrello.

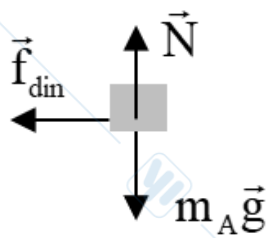


Consideriamo due sistemi di riferimento:

1) sistema inerziale fisso a terra (O, x, y)
2) sistema NON inerziale ancorato sul bordo destro del carrello (O', x', y')



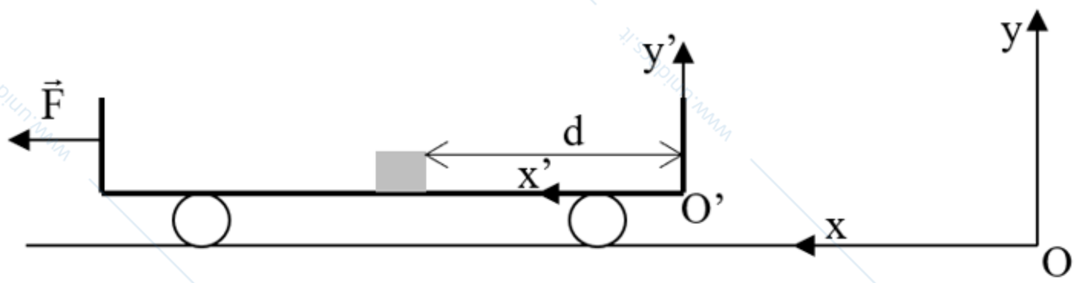
a) sul corpo di massa m_A agisce la forza peso $m_A\vec{g}$ (verso il basso), la reazione vincolare del carrello $\vec{N}$ (verso l'alto) e la forza di attrito dinamico $\vec{f}_{din}$ tra corpo e carrello (verso sinistra)

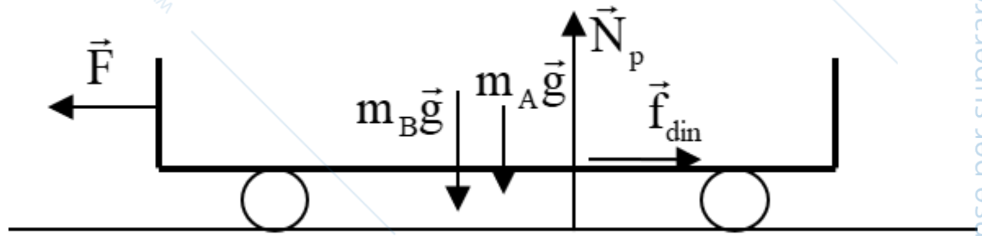


Dalla seconda legge di Newton, applicata alla massa $m_A \Rightarrow m_A\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_{din} = m_A\vec{a}_A$

proiettando su x e y $\Rightarrow \begin{cases} f_{din} = m_A a_A \\ N - m_A g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{din} = \mu_d N = \mu_d m_A g = m_A a_A \\ N = m_A g \end{cases} \Rightarrow a_A = \mu_d g = 1.96 ms^{-2}$

b) sul carrello di massa m_B agisce la forza $\vec{F}$ (verso sinistra), la forza peso $m_B\vec{g}$ (verso il basso), la forza peso $m_A\vec{g}$ (verso il basso), la reazione vincolare del piano orizzontale $\vec{N}_P$ (verso l'alto) e la forza di attrito dinamico $\vec{f}_{din}$ tra corpo e carrello (verso destra)





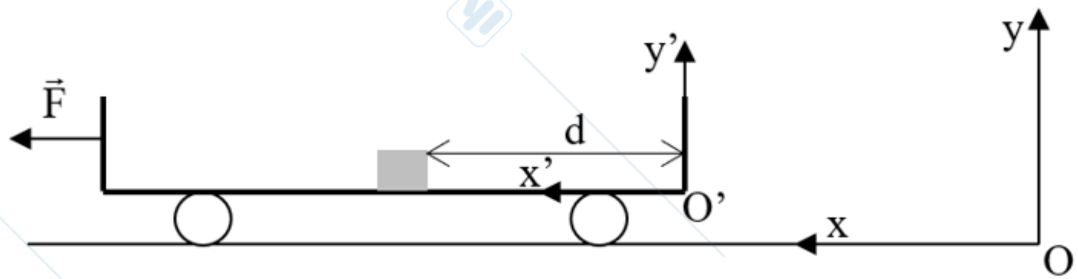
Dalla seconda legge di Newton, applicata al carrello di massa m_B

$$\Rightarrow m_B\vec{g} + m_A\vec{g} + \vec{N}_p + \vec{F} + \vec{f}_{din} = m_B\vec{a}_B$$

proiettando su x e y $\Rightarrow$

$$\begin{cases} F - f_{din} = m_B a_B \\ N_p - m_A g - m_B g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - \mu_d m_A g = m_B a_B \\ N_p = m_A g + m_B g \end{cases} \Rightarrow a_B = \frac{F - \mu_d m_A g}{m_B} = 3.26\,ms^{-2}$$

1) Risoluzione del problema rispetto al sistema di riferimento inerziale fisso a terra (O, x, y)



Il corpo di massa m_A urterà il bordo destro del carrello quando la coordinata x_A del corpo coinciderà con la coordinata x_B del bordo destro del carrello.

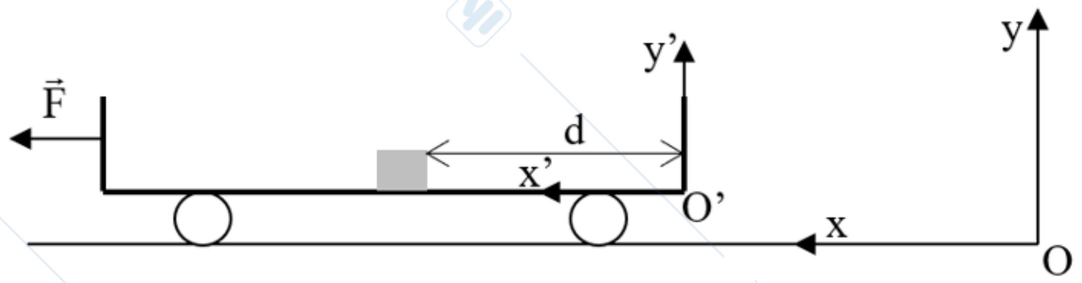
Conoscendo a_A e a_B (entrambe costanti), scriviamo le equazioni scalari del moto ($\Rightarrow$ rettilineo uniformemente accelerato) del corpo di massa m_A e del bordo destro del carrello:

$$\begin{cases} a_A = \dfrac{dv_A}{dt} \Rightarrow v_A = 0 + a_A t \Rightarrow v_A = \dfrac{dx_A}{dt} \Rightarrow x_A = x_A(t=0) + \dfrac{1}{2}a_A t^2 \\ a_B = \dfrac{dv_B}{dt} \Rightarrow v_B = 0 + a_B t \Rightarrow v_B = \dfrac{dx_B}{dt} \Rightarrow x_B = x_B(t=0) + \dfrac{1}{2}a_B t^2 \end{cases} \Rightarrow x_A(t=t_{urto}) = x_B(t=t_{urto}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_A(t=0) + \frac{1}{2}a_A t_{urto}^2 = x_B(t=0) + \frac{1}{2}a_B t_{urto}^2 \Rightarrow x_A(t=0) - x_B(t=0) = d = \frac{1}{2}a_B t_{urto}^2 - \frac{1}{2}a_A t_{urto}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2}(a_B - a_A)t_{urto}^2 \Rightarrow t_{urto} = \sqrt{\frac{2d}{a_B - a_A}} = 1.24s$$

2) Risoluzione del problema rispetto al sistema di riferimento NON inerziale ancorato al carrello (O', x', y')



Dal teorema delle accelerazioni relative, prendendo in esame il corpo di massa m_A si ha:

$$\vec{a}_A = \vec{a}'_A + \vec{a}_{O'}$$

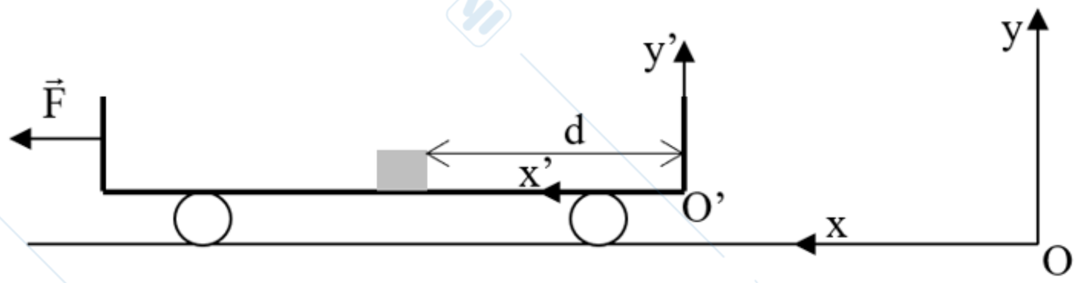
essendo $\vec{a}_A$ l'accelerazione del corpo di massa m_A rispetto al sistema di riferimento fisso inerziale (O, x, y), $\vec{a}'_A$ l'accelerazione del corpo di massa m_A rispetto al sistema di riferimento mobile non inerziale (O', x', y') e $\vec{a}_{O'}$ l'accelerazione di O' rispetto ad O.

Poiché $\vec{a}_{O'}$ coincide con l'accelerazione del carrello rispetto ad O $\Rightarrow \vec{a}_{O'} = \vec{a}_B \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}'_A + \vec{a}_B$

da cui $\Rightarrow \vec{a}'_A = \vec{a}_A - \vec{a}_B = a_A\hat{u}_x - a_B\hat{u}_x = (a_A - a_B)\hat{u}_x$, con $a_A>0$ e $a_B>0$.

N.B. $\Rightarrow a'_A = (a_A - a_B) < 0 \Rightarrow \vec{a}'_A$ risulta costante e diretta orizzontalmente <u>verso destra</u> e di modulo $|a'_A| = |a_A - a_B| = 1.30 ms^{-2}$

2) Risoluzione del problema rispetto al sistema di riferimento NON inerziale ancorato al carrello (O’, x’, y’)

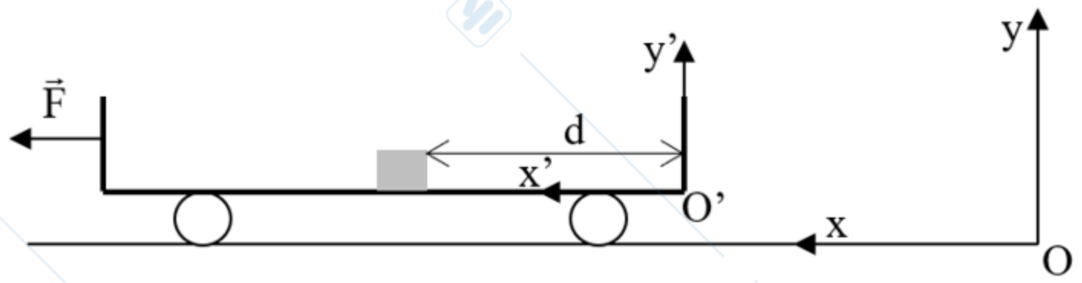


Nel sistema di riferimento non inerziale (O’, x’, y’) l’equazione del moto del corpo di massa m_A è:

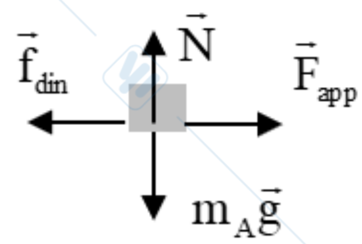
$$a'_A = \frac{dv'_A}{dt} \Rightarrow v'_A = 0 + a'_A t \Rightarrow v'_A = \frac{dx'_A}{dt} \Rightarrow x'_A = x'_A(t=0) + \frac{1}{2}a'_A t^2 = d + \frac{1}{2}a'_A t^2$$

Per $t = t_{urto} \Rightarrow x'_A(t = t_{urto}) = 0 \Rightarrow d + \frac{1}{2}a'_A t^2_{urto} = 0 \Rightarrow t_{urto} = \sqrt{\frac{-2d}{a'_A}} = \sqrt{\frac{2d}{|a'_A|}} = 1.24s$

2) Risoluzione del problema rispetto al sistema di riferimento NON inerziale ancorato al carrello (O', x', y')



Dal punto di vista di un osservatore posto al fondo del carrello, sul corpo di massa m_A agisce la forza peso $m_A\vec{g}$ (verso il basso), la reazione vincolare del carrello $\vec{N}$ (verso l'alto), una forza apparente $\vec{F}_{app}$ che spinge la massa m_A verso il fondo del carrello e la forza di attrito dinamico $\vec{f}_{din}$ tra corpo e carrello (verso sinistra)

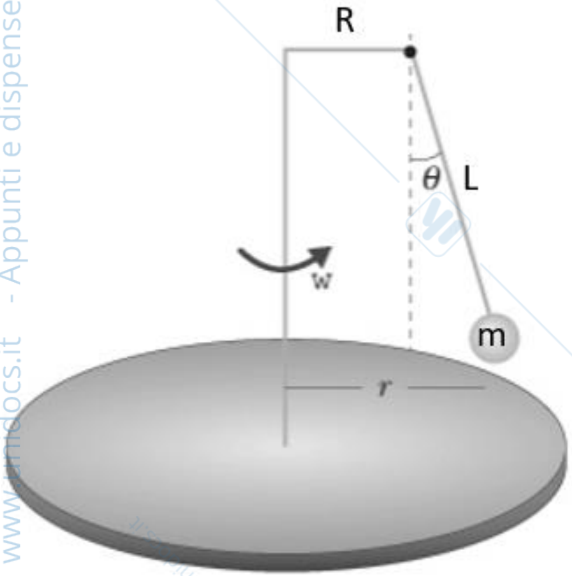


Dai risultati precedenti si sa che: $\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_{carrello}$

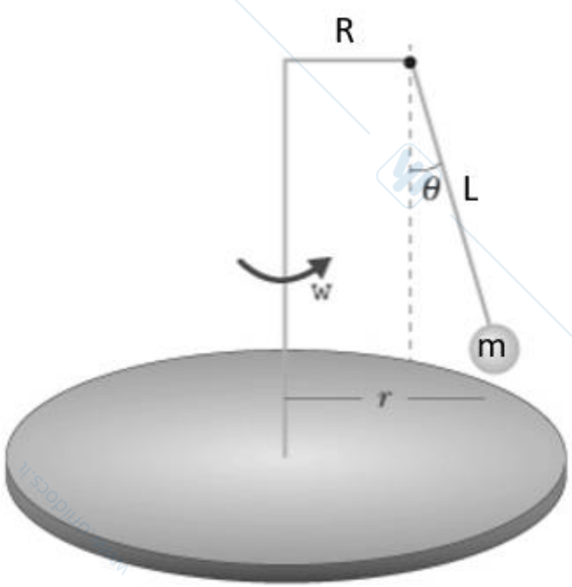
Esempio – moto di trascinamento rotatorio uniforme (ω costante e v_0,= 0)

La giostra in figura può essere idealizzata come una piattaforma circolare orizzontale ruotante attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. La fune con il seggiolino può essere idealizzata come un filo a piombo con punto di sospensione fuori dall'asse di rotazione, al suo estremo libero è agganciata un corpo di volume trascurabile e massa m. Il filo a piombo si dispone secondo una direzione inclinata di un angolo θ rispetto alla verticale e la massa m ruota ad una distanza r dall'asse di rotazione. Se indichiamo con L la lunghezza del filo a piombo e con R la distanza tra l'asse di rotazione e il punto di sospensione del filo a piombo, in base al valore misurato di θ determinare la velocità angolare ω della giostra, supposta costante. Dati: $\theta = \pi/4$, $L = 3$ m, $R = 1$ m

Esempio – moto di trascinamento rotatorio uniforme (ω costante e v_0,= 0)



La giostra in figura può essere idealizzata come una piattaforma circolare orizzontale ruotante attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. La fune con il seggiolino può essere idealizzata come un filo a piombo con punto di sospensione fuori dall'asse di rotazione, al suo estremo libero è agganciata un corpo di volume trascurabile e massa m. Il filo a piombo si dispone secondo una direzione inclinata di un angolo θ rispetto alla verticale e la massa m ruota ad una distanza r dall'asse di rotazione. Se indichiamo con L la lunghezza del filo a piombo e con R la distanza tra l'asse di rotazione e il punto di sospensione del filo a piombo, in base al valore misurato di θ determinare la velocità angolare ω della giostra, supposta costante. Dati: $\theta = \pi/4$, $L = 3$ m, $R = 1$ m

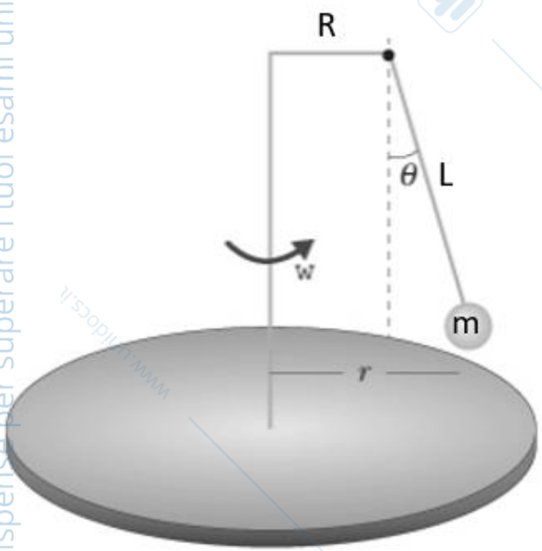


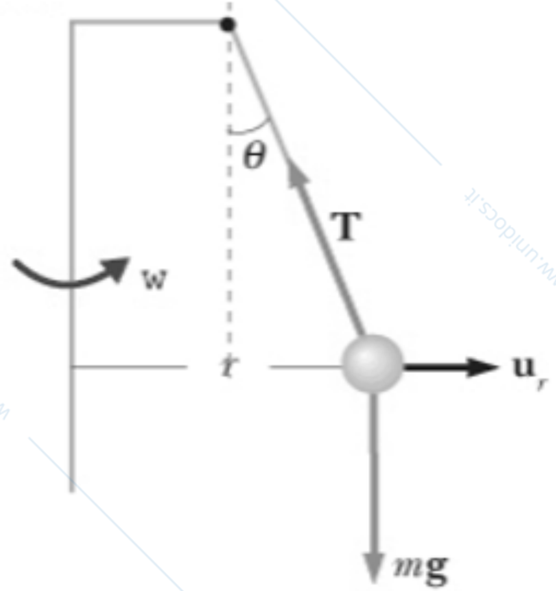
Prendiamo in considerazione due sistemi di riferimento:

- un sistema di riferimento fisso inerziale O(x, y, z) posto a terra, con z coincidente con l'asse di rotazione della piattaforma girevole
- un sistema di riferimento mobile non inerziale O'(x', y', z') solidale alla piattaforma girevole con O'≡ O e z'≡ z

e ipotizziamo che la piattaforma ruoti i senso antioraio attorno ad un asse verticale (asse z') passante per il centro con velocità angolare ω costante.

Per l'osservatore solidale con il sistema di riferimento inerziale il moto di rotazione del corpo di massa *m* attorno all'asse z risulta determinato dalla forza peso $m\vec{g}$ e dalla tensione del filo $\vec{T}$:



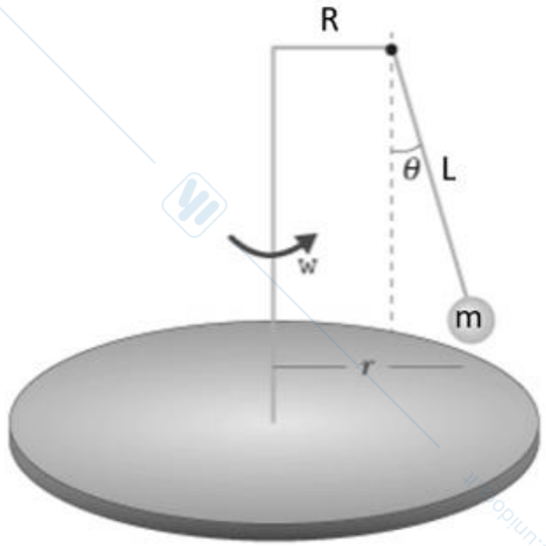


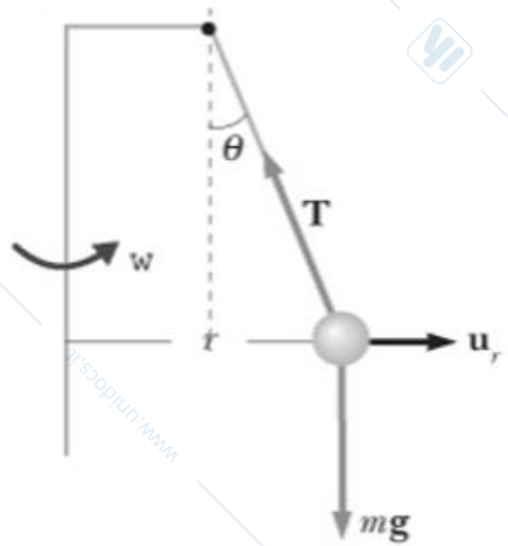
$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

ma essendo la velocità angolare ω della giostra costante $\Rightarrow$ la sua accelerazione angolare α sarà nulla; da cui $\alpha = a_T/r = 0 \Rightarrow a_T = 0$ (con a_T l'accelerazione tangenziale).

Quindi $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C = \vec{a}_C$ (con $\vec{a}_C$ l'accelerazione centripeta

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} = m\vec{a}_c = -m\frac{v^2}{r}\hat{u}_r = -m\omega^2 r\hat{u}_r$$





$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} = m\vec{a}_c = -m\frac{v^2}{r}\hat{u}_r = -m\omega^2 r\hat{u}_r$$

Proiettando tale relazione vettoriale lungo l'asse z e l'asse radiale (di versore $\hat{u}_r$), otteniamo le due relazioni scalari:

$$\begin{cases} -T\sin\theta = -m\omega^2 r \\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{m\omega^2 r}{\sin\theta} \\ \dfrac{m\omega^2 r}{\sin\theta}\cos\theta = mg \end{cases} \Rightarrow \frac{\omega^2 r}{tg\theta} = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g\cdot tg\theta}{r}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g\cdot tg\theta}{R + L\sin\theta}} = 1.77 \text{ rad/s}$$

Per l'osservatore solidale con la piattaforma girevole (sistema di riferimento non inerziale) il corpo di massa *m* risulta fermo. Dal teorema delle accelerazioni relative risulta:

$$\vec{a}(\text{rif.fisso\_inerziale}) = \vec{a}'(\text{rif.mobile\_non-inerziale}) + \vec{\omega}x(\vec{\omega}x\vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt}x\vec{r}' + 2(\vec{\omega}x\vec{v}')$$

poiché $\vec{a}'=0$, $\vec{v}'=0$ e $\vec{\omega}=$ costante e $\vec{r}' \equiv r$, si ha

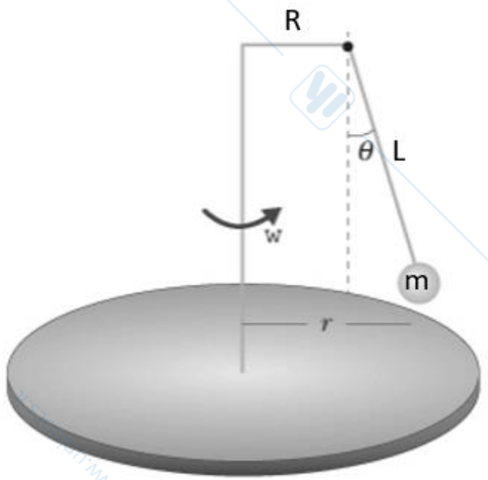
$$\vec{a}(\text{rif.fisso\_inerziale}) = 0 + \vec{\omega}x(\vec{\omega}x\vec{r})$$

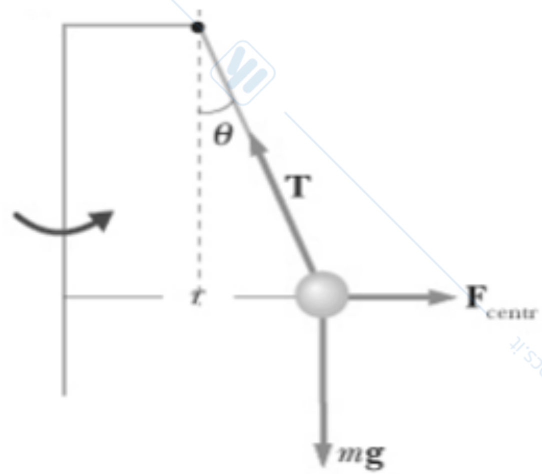
da cui:

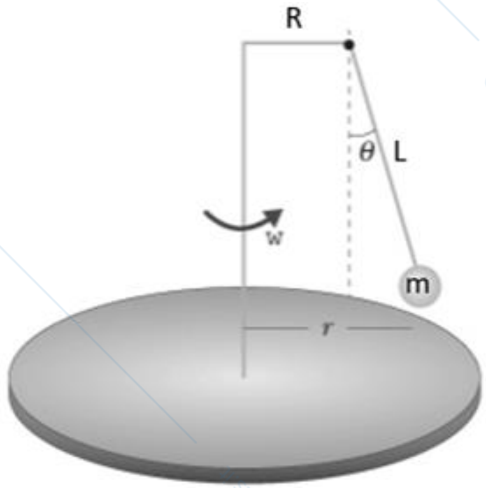
$$m\vec{a}(\text{forze\_reali}) - m\vec{\omega}x(\vec{\omega}x\vec{r}) = 0$$

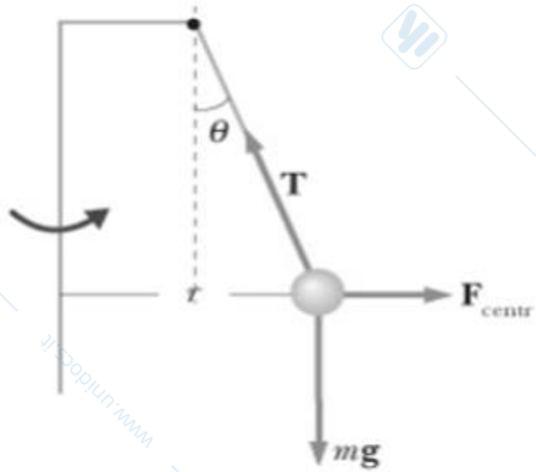
$$\vec{T} + m\vec{g} - m\vec{\omega}x(\vec{\omega}x\vec{r}) = 0$$

dove $-m\vec{\omega}x(\vec{\omega}x\vec{r})$ risulta essere la forza apparente che equilibra le due forze reali (forza peso $m\vec{g}$ e tensione del filo $\vec{T}$). In particolare $-m\vec{\omega}x(\vec{\omega}x\vec{r})$ risulta essere orientata radialmente nel verso positivo di $\hat{u}_r$ e di modulo $m\omega^2 r$, ossia risulta essere la forza centrifuga $\vec{F}_{centr} = m\omega^2 r\hat{u}_r$









Proiettando la relazione vettoriale $\vec{T} + m\vec{g} - m\vec{\omega}x(\vec{\omega}x\vec{r}) = 0$ l'asse z'≡ z e l'asse radiale (di versore $\hat{u}_r$), otteniamo le due relazioni scalari:

$$\begin{cases} -T\sin\theta + m\omega^2 r = 0 \\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{m\omega^2 r}{\sin\theta} \\ \dfrac{m\omega^2 r}{\sin\theta}\cos\theta = mg \end{cases} \Rightarrow \frac{\omega^2 r}{tg\theta} = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \cdot tg\theta}{r}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \cdot tg\theta}{R + L\sin\theta}} = 1.77\,\frac{rad}{s}$$

Il moto rispetto alla Terra vista come un sistema di riferimento non inerziale

Poiché la Terra ruota attorno al proprio asse e ruota attorno al Sole (rivoluzione) seguendo una traiettoria curvilinea, qualsiasi sistema di riferimento solidale alla Terra ruota insieme alla Terra stessa e quindi non è inerziale.

Il moto rispetto alla Terra vista come un sistema di riferimento non inerziale

Poiché la Terra ruota attorno al proprio asse e ruota attorno al Sole (rivoluzione) seguendo una traiettoria curvilinea, qualsiasi sistema di riferimento solidale alla Terra ruota insieme alla Terra stessa e quindi non è inerziale.

1) la Terra ruota su sé stessa con una velocità angolare di rotazione di modulo costante $\omega = \frac{2\pi}{T}$ dove T è il periodo di rotazione = 24 ore = 86400 s $\Rightarrow \omega = 7.29 \cdot 10^{-5}$ rad/s. In particolare, la velocità di rotazione al 45° parallelo risulta $v = \omega R_T cos(\frac{\pi}{4})$ = $3.28 \cdot 10^{2}$ m/s (= 1.180 km/h), essendo R_T il raggio della Terra;
2) la Terra ruota attorno al Sole (rivoluzione) con una velocità angolare media di rivoluzione di modulo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ dove T_0 è il periodo di rivoluzione = 365,256 giorni (anno siderale) = $3.16 \cdot 10^{6}$ s $\Rightarrow \omega_0 = 1.99 \cdot 10^{-7}$ rad/s. Considerando un raggio medio R_0 di $1.49 \cdot 10^{11}$ m si ottiene un'accelerazione centripeta media di rivoluzione di modulo $a_c = \omega_0^2 R_0 = 5.9 \cdot 10^{-3} m/s^2$ e una velocità media di rivoluzione (in modulo) v_0 di circa $3 \cdot 10^{4}$ m/s = 108.000 km/h

Il moto rispetto alla Terra vista come un sistema di riferimento non inerziale

Poiché la Terra ruota attorno al proprio asse e ruota attorno al Sole (rivoluzione) seguendo una traiettoria curvilinea, qualsiasi sistema di riferimento solidale alla Terra ruota insieme alla Terra stessa e quindi non è inerziale.

1) la Terra ruota su sé stessa con una velocità angolare di rotazione di modulo costante $\omega = \frac{2\pi}{T}$ dove T è il periodo di rotazione = 24 ore = 86400 s $\Rightarrow \omega = 7.29 \cdot 10^{-5}$ rad/s. In particolare, la velocità di rotazione al 45° parallelo risulta $v = \omega R_T cos(\frac{\pi}{4}) = 3.28 \cdot 10^2$ m/s (= 1.180 km/h), essendo R_T il raggio della Terra;
2) la Terra ruota attorno al Sole (rivoluzione) con una velocità angolare media di rivoluzione di modulo $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ dove T_0 è il periodo di rivoluzione = 365,256 giorni (anno siderale) = $3.16 \cdot 10^6$ s $\Rightarrow \omega_0 = 1.99 \cdot 10^{-7}$ rad/s. Considerando un raggio medio R_0 di $1.49 \cdot 10^{11}$ m si ottiene un'accelerazione centripeta media di rivoluzione di modulo $a_c = \omega_0^2 R_0 = 5.9 \cdot 10^{-3} m/s^2$ e una velocità media di rivoluzione (in modulo) v_0 di circa $3 \cdot 10^4$ m/s = 108.000 km/h

Di conseguenza nelle misure terrestri devono comparire necessariamente dei termini correttivi per tenere conto della non inerzialità dei sistemi di riferimento ancorati alla Terra stessa.

Caduta di un corpo in vicinanza della superficie terrestre

i) in un sistema di riferimento non inerziale solidale alla Terra centrato nel centro della Terra e

ii) in un sistema di riferimento inerziale quale, per esempio, un sistema di riferimento centrato nel centro di massa del sistema solare e con gli assi diretti verso le cosiddette “stelle fisse”.

Dal teorema delle accelerazioni relative:

$$\boxed{\vec{g}_0 = \vec{g}_T + \vec{a}_C + \vec{\omega} \text{x} (\vec{\omega} \text{x} \vec{R}_T) + 2\vec{\omega} \text{x} \vec{v}_T}$$

dove:

$\vec{\omega}$ è la velocità angolare della Terra diretta lungo l'asse di rotazione e verso diretto al Polo Nord,
$\vec{g}_0$ è l'accelerazione del corpo rispetto al sistema di riferimento inerziale,
$\vec{g}_T$ e $\vec{v}_T$ sono rispettivamente l'accelerazione e la velocità del corpo rispetto al sistema di riferimento ancorato alla Terra,
$\vec{R}_T$ è il raggio vettore riferito al centro della Terra avente come modulo il raggio della Terra e
$\vec{a}_C$ è l'accelerazione centripeta media di rivoluzione.

Trascurando $\vec{a}_C$ si ha:

$$\boxed{\vec{g}_0 = \vec{g}_T + \vec{\omega}\text{x}(\vec{\omega}\text{x}\vec{R}_T) + 2\vec{\omega}\text{x}\vec{v}_T}$$

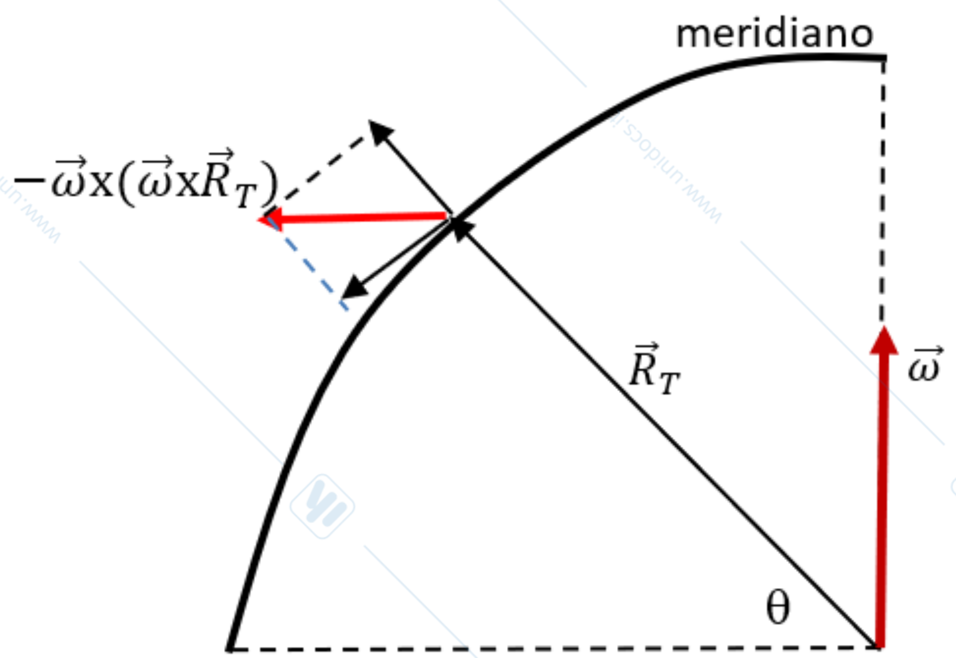
Pertanto, l'accelerazione di gravità rispetto al sistema di riferimento della Terra risulta dato da:

$$\vec{g}_T = \vec{g}_0 \underbrace{- \vec{\omega}\text{x}(\vec{\omega}\text{x}\vec{R}_T)}_{\text{Termine centrifugo}} \underbrace{- 2\vec{\omega}\text{x}\vec{v}_T}_{\text{Accelerazione di Coriolis}}$$

A) Termine centrifugo $-\vec{\omega}\text{x}(\vec{\omega}\text{x}\vec{R}_T)$.

Il termine centrifugo porta:

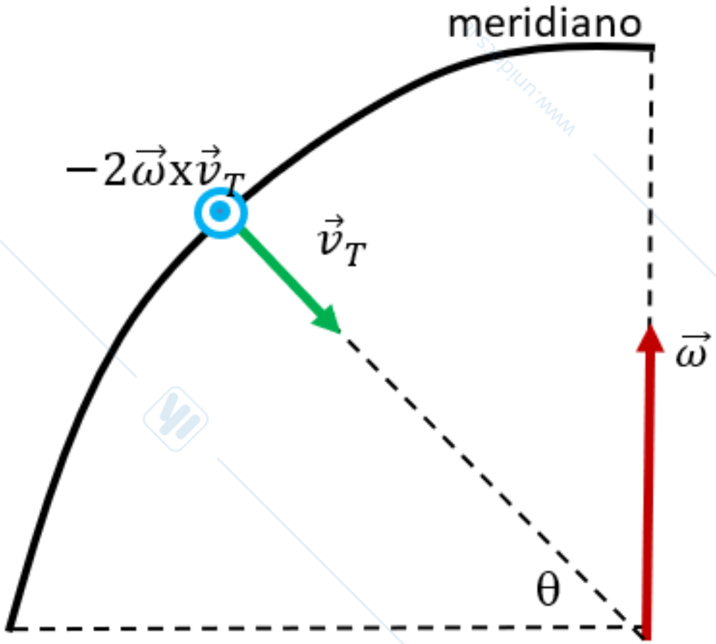
1) ad una diminuzione (piccola) del modulo di $\vec{g}_0$ e
2) uno spostamento di caduta del corpo verso l'equatore lungo un meridiano



Il termine centrifugo risulto nullo ai poli dove $\vec{\omega}||\vec{R}_T$ ed è massimo all'equatore dove $\vec{\omega} \perp \vec{R}_T$.

B) Accelerazione di Coriolis $-2\vec{\omega}x\vec{v}_T$.

L'accelerazione di Coriolis porta ad uno spostamento di caduta del corpo verso Est lungo un parallelo. Risulta nulla quando l'oggetto è fermo rispetto alla Terra e quando $\vec{\omega}||\vec{v}_T$, ossia quando l'oggetto, rispetto alla Terra, scende in direzione parallela all'asse di rotazione $\Rightarrow$ è nulla quando l'oggetto scende verso i poli.



$\perp$ al meridiano $\Rightarrow$ spostamento segue un parallelo da Ovest a Est

Trascurando $\vec{a}_C$ si ha: $$\boxed{\vec{g}_0 = \vec{g}_T + \vec{\omega}\text{x}(\vec{\omega}\text{x}\vec{R}_T) + 2\vec{\omega}\text{x}\vec{v}_T}$$

Pertanto, l'accelerazione di gravità rispetto al sistema di riferimento della Terra risulta dato da:

$$\vec{g}_T = \vec{g}_0 \underbrace{- \vec{\omega}\text{x}(\vec{\omega}\text{x}\vec{R}_T)}_{\text{Termine centrifugo}} \underbrace{- 2\vec{\omega}\text{x}\vec{v}_T}_{\text{Accelerazione di Coriolis}}$$

L'effetto complessivo è la combinazione dei due: l'oggetto contemporaneamente tende a spostarsi verso l'equatore seguendo un meridiano e verso Est seguendo un parallelo

Esempio: cadendo da un'altezza *h* di 100 m rispetto alla superficie terrestre, il termine centrifugo porta ad uno spostamento verso l'equatore di 17.3 cm mentre l'accelerazione di Coriolis porta ad uno spostamento verso Est di 1.6 cm