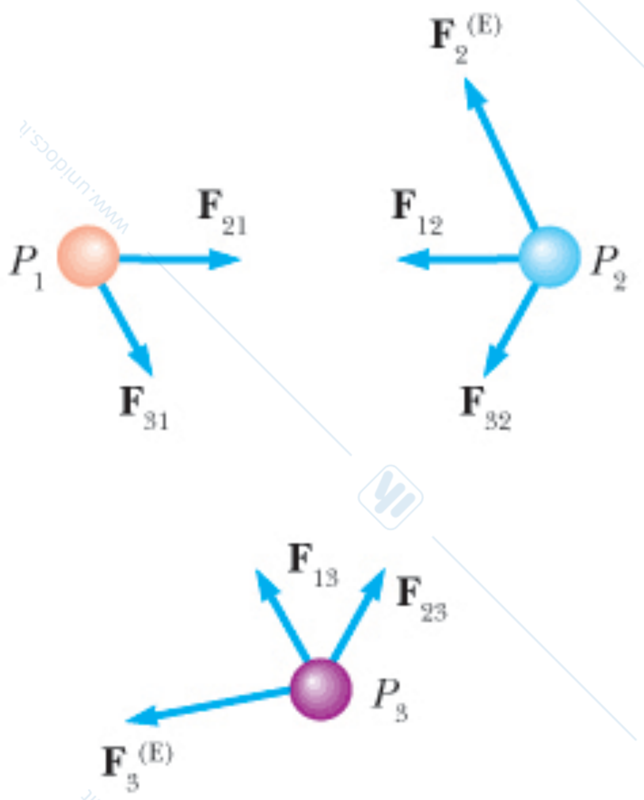
DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Sistemi di punti. Forze interne e forze esterne

Consideriamo *n* punti materiali interagenti tra di loro e con l'universo esterno.

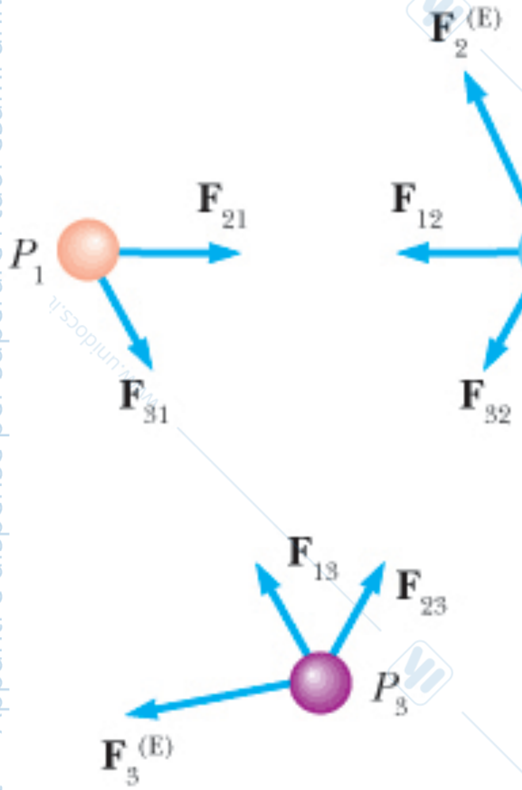
La forza $\vec{F}_i$ agente sull'i-esimo punto è data dalla risultante delle **forze esterne** $\vec{F}_i^{(E)}$ agenti sul punto e dalla risultante delle **forze interne** $\vec{F}_i^{(I)}$ esercitate dagli altri n-1 punti.



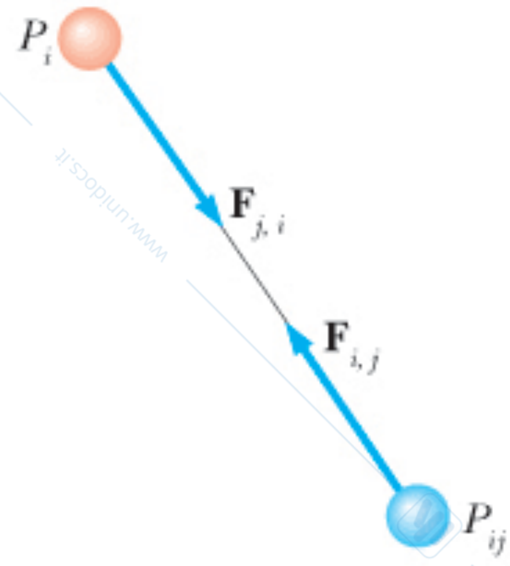
$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

Dovute all'interazione tra il sistema ed il mondo esterno.

Forze scambiate tra i punti del sistema.



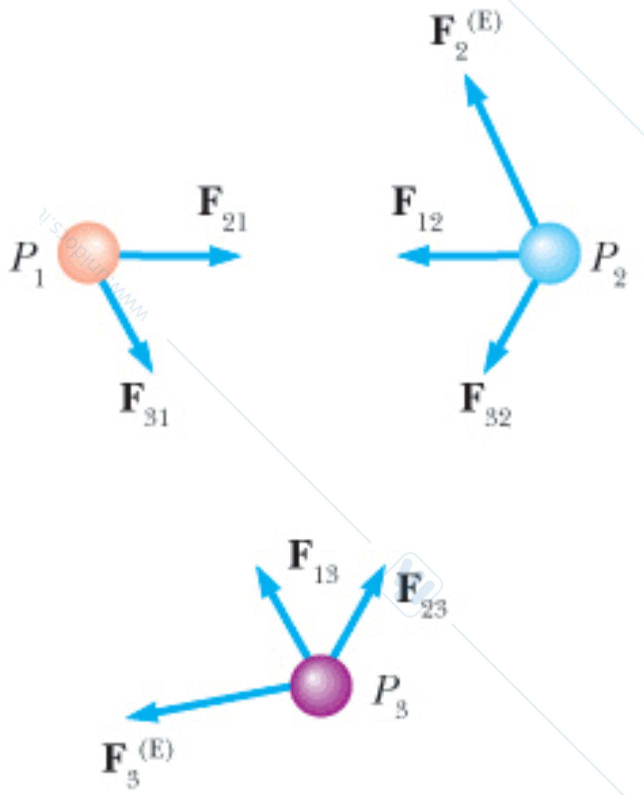
Alle forze interne si applica la III legge di Newton
(Principio di azione e reazione)



$$\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = 0$$

Se il punto i-esimo esercita sul punto j-esimo la forza (interna) $\vec{F}_{i,j}$ allora il punto j-esimo reagisce esercitando sul punto i-esimo la forza $\vec{F}_{j,i}$ e tali forze hanno la stessa retta d'azione, stesso modulo e verso opposto.

In generale, la risultante $\vec{F}_i^{(I)}$ delle forze interne agenti sull'i-esimo punto non è nulla, ma la risultante di tutte le forze interne del sistema:



$$\vec{R}^{(I)} = \sum_i \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i,j} \vec{F}_{i,j} = 0$$

perché le forze interne sono a due a due uguali e contrarie.

$$\Downarrow$$

Sommando vettorialmente tutte le forze interne ed esterne che agiscono sul sistema si ottiene:

$$\vec{R} = \vec{R}^{(I)} + \vec{R}^{(E)} = \vec{R}^{(E)} = \sum_i \vec{F}_i^{(E)}$$

Dato un sistema di n punti materiali in un sistema di riferimento inerziale (O,x,y,z), per ∀ punto i-esimo di massa m_i soggetto alla risultante delle forze $\vec{F}_i$ si può definire:

Vettore posizione	$\vec{r}_i$
Vettore velocità	$\vec{v}_i$
Vettore accelerazione	$\vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m_i}$
Vettore quantità di moto	$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$
Vettore momento angolare	$\vec{L}_{O_i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$
Energia cinetica	$E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Per il sistema complessivo di *n* punti materiali nel sistema di riferimento inerziale (O,x,y,z) si può definire:

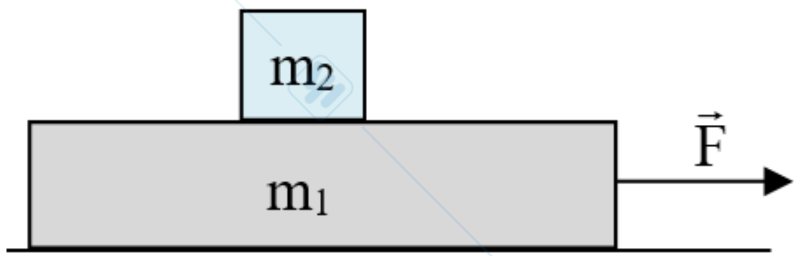
Massa totale	$m=\sum_i m_i$
Vettore quantità di moto totale	$\vec{P}=\sum_i \vec{p}_i=\sum_i m_i \vec{v}_i$
Vettore momento angolare totale	$\vec{L}_O=\sum_i \vec{L}_{O_i}=\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$
Energia cinetica totale	$E_k=\sum_i E_{k,i}=\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Esempio – Due corpi sovrapposti in moto su un piano orizzontale

Una piastra di massa m_1 scivola senza attrito lungo un piano orizzontale sotto l'azione di una forza esterna orizzontale $\vec{F}$. Su tale piastra è poggiata una massa m_2. Tra m_1 e m_2 c'è attrito caratterizzato da un coefficiente di attrito statico μ_s e un coefficiente di attrito dinamico μ_d.

Calcolare:

1) l'accelerazione dei due corpi e il valore massimo del modulo di $\vec{F}$, F_{max}, per avere ancora attrito statico tra loro due;
2) le accelerazioni dei due corpi nel caso di attrito dinamico tra loro due.



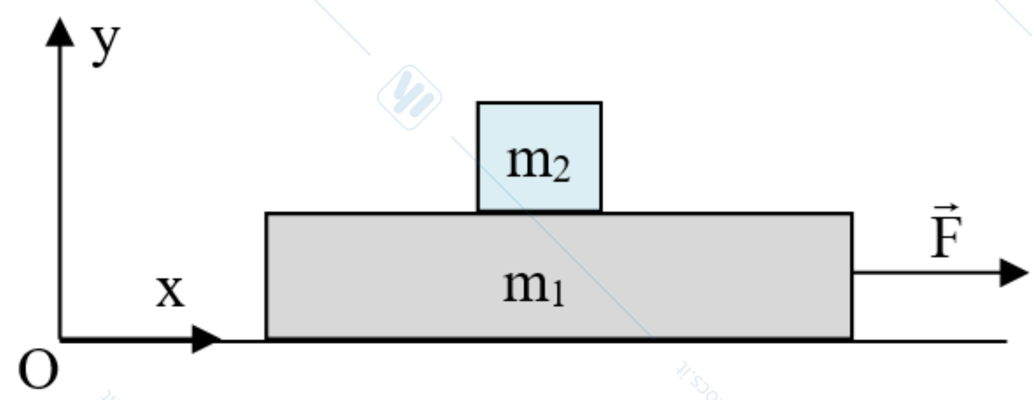
Esempio – Due corpi sovrapposti in moto su un piano orizzontale

Una piastra di massa m_1 scivola senza attrito lungo un piano orizzontale sotto l'azione di una forza esterna orizzontale $\vec{F}$. Su tale piastra è poggiata una massa m_2. Tra m_1 e m_2 c'è attrito caratterizzato da un coefficiente di attrito statico μ_s e un coefficiente di attrito dinamico μ_d.

Calcolare:

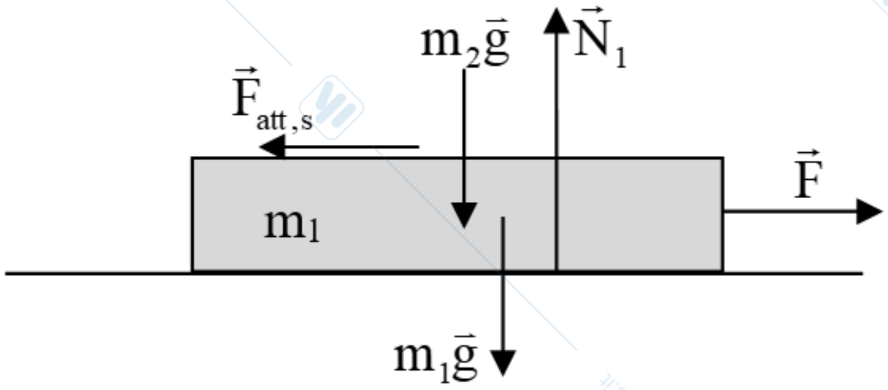
1) l'accelerazione dei due corpi e il valore massimo del modulo di $\vec{F}$, F_{max}, per avere ancora attrito statico tra loro due;

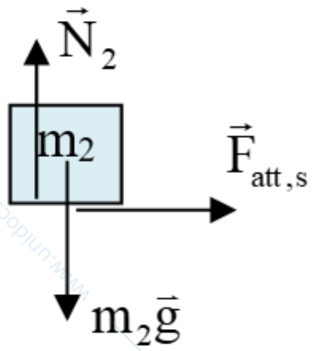
2) le accelerazioni dei due corpi nel caso di attrito dinamico tra loro due.



Asse x lungo il piano orizzontale e con verso a destra e asse y verticale rivolto verso l'alto.

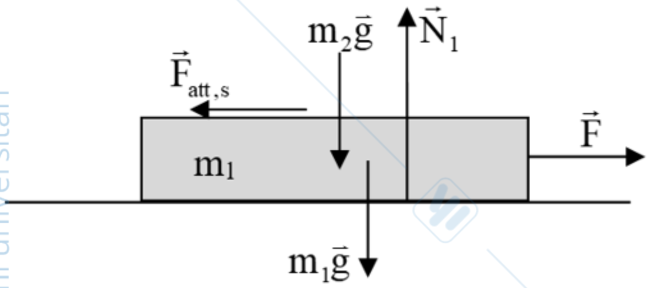
1) Consideriamo separatamente le due masse m_1 e m_2

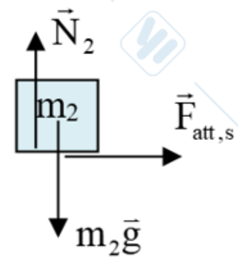




e scriviamo le equazioni della dinamica newtoniana relative alle due masse, sapendo che le due masse devono essere solidali tra di loro e che l'attrito statico si manifesta come una coppia di forze interne uguali in modulo e direzione e opposte in verso

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F}_{att,s} + m_2\vec{g} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_{att,s} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 = m_2\vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 = \vec{a}_2 \end{cases}$$





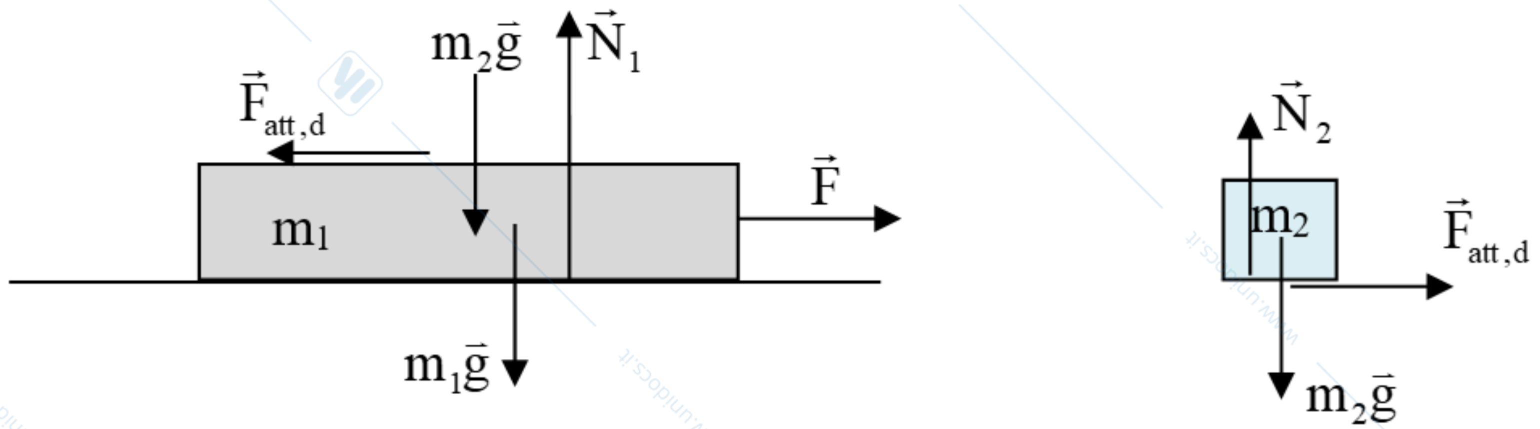
$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F}_{att,s} + m_2\vec{g} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_{att,s} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 = m_2\vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 = \vec{a}_2 \end{cases}$$

Proiettando tali relazioni vettoriali sul sistema di riferimento inerziale (O, x, y) otteniamo:

$$\begin{cases} F - F_{att,s} = m_1 a_1 = m_1 a \\ -m_2 g - m_1 g + N_1 = 0 \\ F_{att,s} = m_2 a_2 = m_2 a \\ -m_2 g + N_2 = 0 \\ a_1 = a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - m_2 a = m_1 a \\ N_1 = m_2 g + m_1 g \\ F_{att,s} = m_2 a \\ N_2 = m_2 g \\ a_1 = a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} \\ N_1 = m_2 g + m_1 g \\ F_{att,s} = m_2 a = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} F \\ N_2 = m_2 g \\ a_1 = a_2 \end{cases}$$

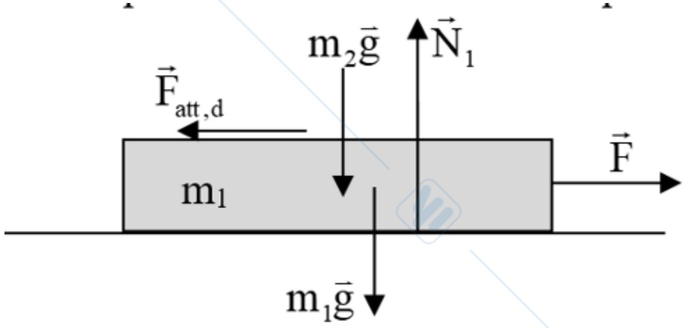
$$F_{att,s} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F \le \mu_s N_2 = \mu_s m_2 g \Rightarrow F \le \mu_s (m_1 + m_2) g \Rightarrow F_{max} = \mu_s (m_1 + m_2) g$$

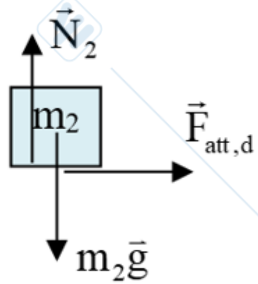
2) Anche in questo caso consideriamo separatamente le due masse m_1 e m_2



e scriviamo le equazioni della dinamica newtoniana relative alle due masse, sapendo che l'attrito dinamico si manifesta come una coppia di forze interne uguali in modulo e direzione e opposte in verso:

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F}_{att,d} + m_2\vec{g} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_{att,d} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 = m_2\vec{a}_2 \end{cases}$$





$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F}_{att,d} + m_2\vec{g} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_{att,d} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 = m_2\vec{a}_2 \end{cases}$$

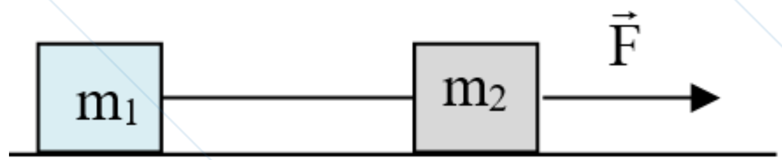
Proiettando tali relazioni vettoriali sul sistema di riferimento inerziale (O, x, y) otteniamo:

$$\begin{cases} F - F_{att,d} = m_1 a_1 \\ -m_2 g - m_1 g + N_1 = 0 \\ F_{att,d} = m_2 a_2 \\ -m_2 g + N_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - \mu_d m_2 g = m_1 a_1 \\ N_1 = m_2 g + m_1 g \\ \mu_d m_2 g = m_2 a_2 \\ N_2 = m_2 g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{F - \mu_d m_2 g}{m_1} \\ N_1 = m_2 g + m_1 g \\ a_2 = \mu_d g \\ N_2 = m_2 g \end{cases}$$

Esempio – Sistemi di punti materiali

Due masse m_1 e m_2 sono poste su di un piano orizzontale e sono collegate tra di loro tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile. Sulla massa m_2 agisce una forza esterna orizzontale nota $\vec{F}$. Trascurando l'attrito tra le masse e il piano orizzontale calcolare, a regime:

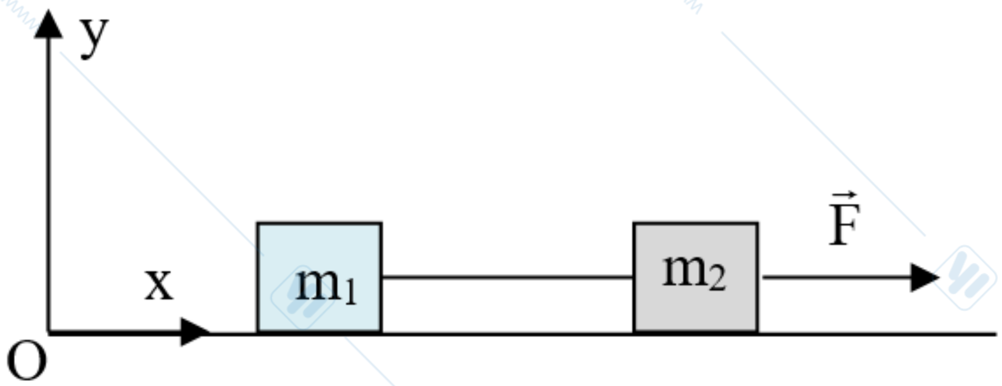
1) l'accelerazione delle due masse e la tensione della fune.



Esempio – Sistemi di punti materiali

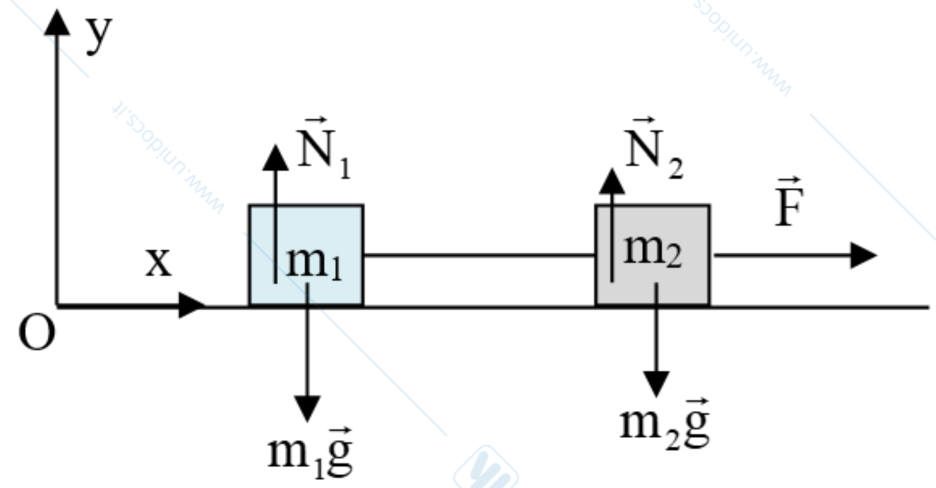
Due masse m_1 e m_2 sono poste su di un piano orizzontale e sono collegate tra di loro tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile. Sulla massa m_2 agisce una forza esterna orizzontale nota $\vec{F}$. Trascurando l'attrito tra le masse e il piano orizzontale calcolare, a regime:

1) l'accelerazione delle due masse e la tensione della fune.

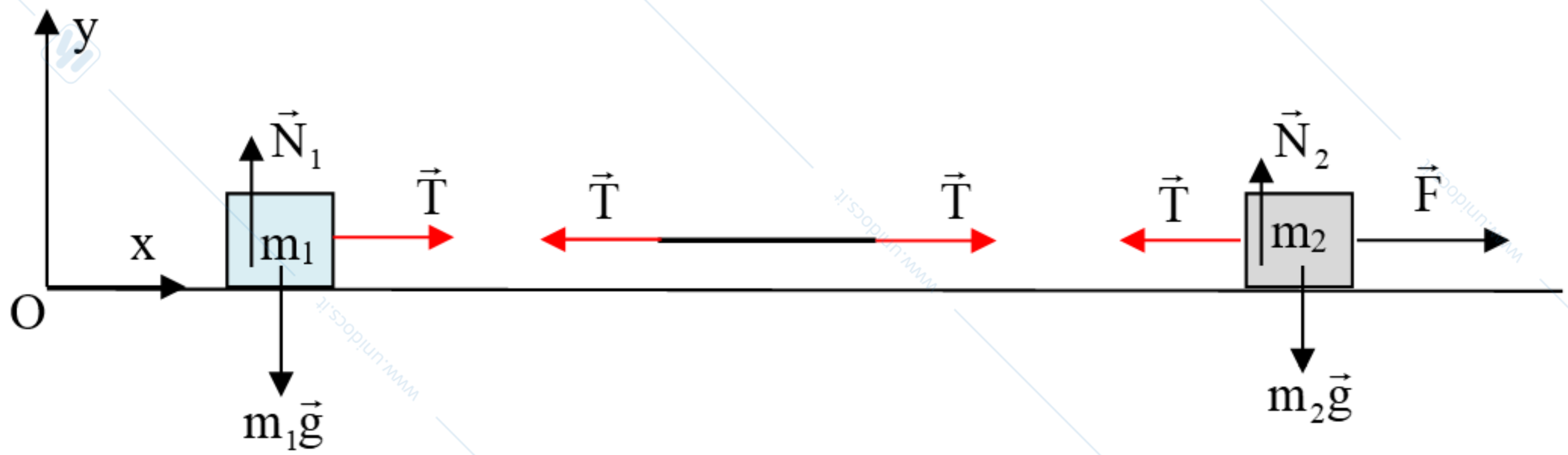


Asse x lungo il piano orizzontale e con verso a destra e asse y verticale rivolto verso l'alto.

Consideriamo il sistema formato dalle due masse m_1 e m_2 e dalla fune inestensibile e di massa trascurabile. Su tale sistema agiscono le seguenti <u>forze esterne</u>: forza peso $m_1\vec{g}$ e reazione vincolare $\vec{N}_1$ agenti sulla massa m_1, forza peso $m_2\vec{g}$, reazione vincolare $\vec{N}_2$ e forza $\vec{F}$ agenti sulla massa m_2. La tensione della fune risulta essere una <u>forza interna</u> al sistema stesso.

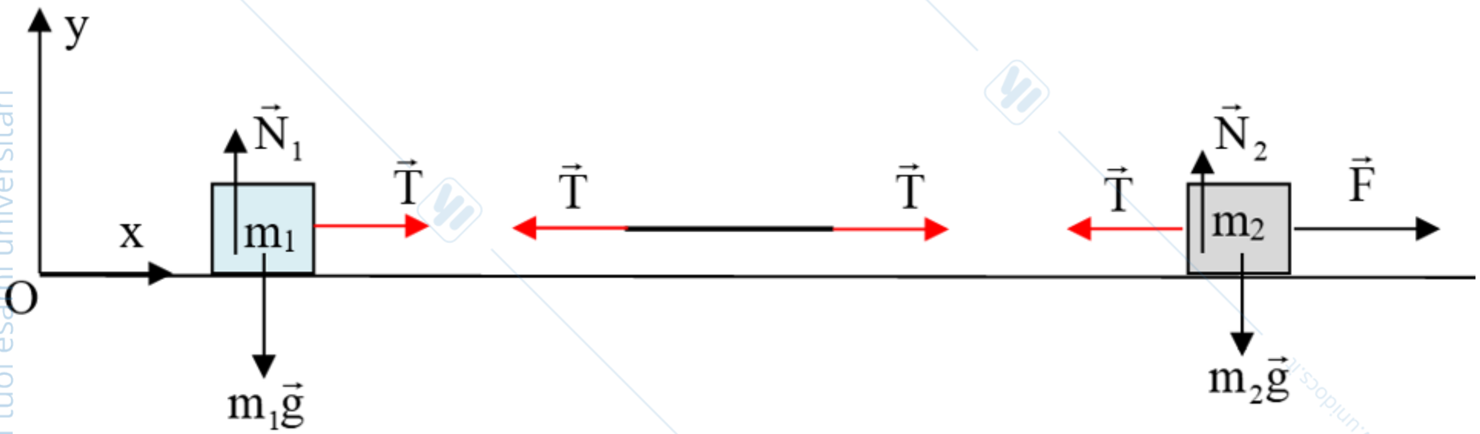


Consideriamo separatamente le due masse m_1 e m_2, e la fune



Le equazioni vettoriale della dinamica newtoniana relative alla massa m_1 e alla massa m_2 sono:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a} \\ \vec{F} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a} \end{cases}$$

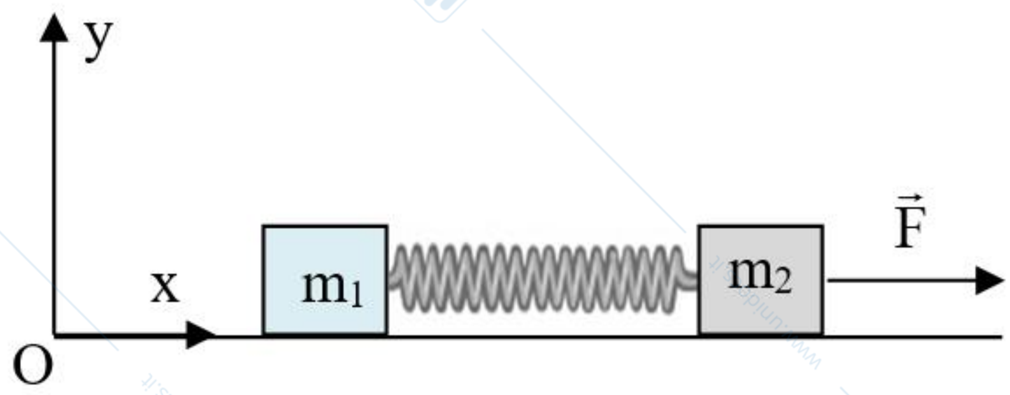


$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a} \\ \vec{F} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a} \end{cases}$$

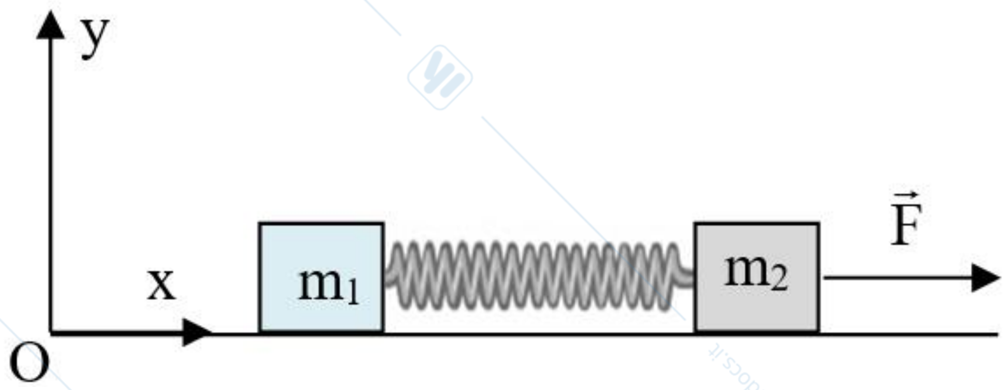
Proiettando tale relazione vettoriale sul sistema di riferimento inerziale (O, x, y) si ottiene:

$$\begin{cases} T = m_1 a \\ -m_1 g + N_1 = 0 \\ F - T = m_2 a \\ -m_2 g + N_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = m_1 a \\ F - m_1 a = m_2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = m_1 a \\ a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} F \\ a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

N.B. Se al posto di una fune ci fosse stata una molla di costante elastica k e massa trascurabile



avremmo utilizzato lo stesso metodo precedente, essendo l'allungamento della molla legato alla forza elastica ed essendo quest'ultima una forza interna al sistema formato dalle due masse m_1 e m_2 e dalla molla di massa trascurabile.



In particolare, le equazioni vettoriale della dinamica newtoniana relative alla massa m_1 e alla massa m_2 sono:

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{el} = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{el} = m_2\vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{el} = m_1\vec{a} \\ \vec{F} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{el} = m_2\vec{a} \end{cases}$$

Proiettando tale relazione vettoriale sul sistema di riferimento inerziale (O, x, y) si ottiene:

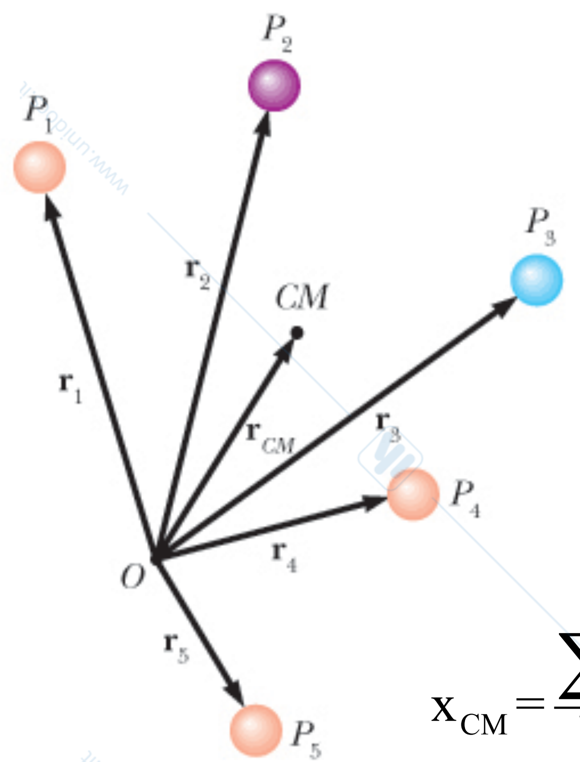
$$\begin{cases} F_{el} = m_1 a \\ -m_1 g + N_1 = 0 \\ F - F_{el} = m_2 a \\ -m_2 g + N_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{el} = m_1 a \\ F - m_1 a = m_2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{el} = m_1 a \\ a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{el} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} F = k\Delta x \\ a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = \left(\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right)\left(\dfrac{F}{k}\right) \\ a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Centro di massa di un sistema di punti. Teorema del moto del centro di massa (o Prima equazione cardinale della dinamica)

Si definisce **centro di massa di un sistema di punti materiali** il punto geometrico la cui posizione è individuata, nel sistema di riferimento considerato, dal raggio vettore:

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m_{tot}}}$$

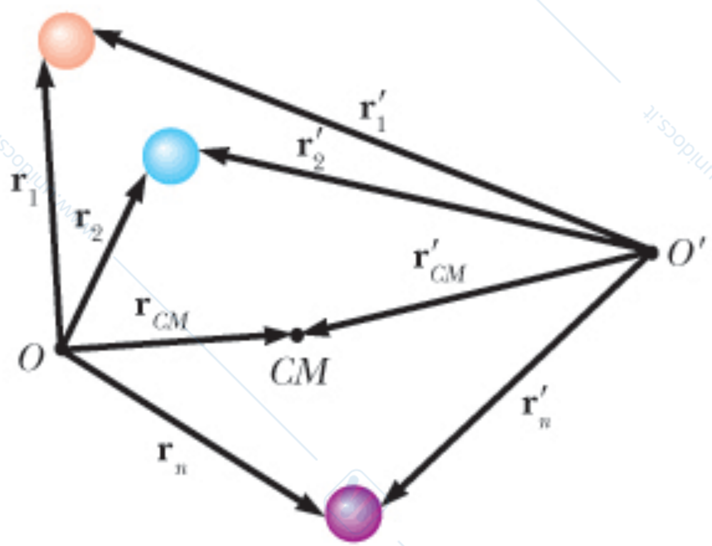
Media pesata sulle masse dei raggi vettori dei singoli punti materiali



Dato un sistema di riferimento (O,x,y,z):

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{m_{tot}} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i y_i}{m_{tot}} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i z_i}{m_{tot}}$$

N.B.: La posizione del centro di massa rispetto ai punti materiali non dipende dal sistema di riferimento, mentre le sue coordinate variano con il sistema di riferimento scelto.



In figura è rappresentato il centro di massa nei due sistemi di riferimento O e O'. Le posizioni dei punti P_i sono date dai vettori posizione $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_i'$

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \overrightarrow{O'O}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{r}_{CM}' = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i'}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \left(\vec{r}_i + \overrightarrow{O'O}\right)}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} + \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{O'O}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} + \overrightarrow{O'O} = \vec{r}_{CM} + \overrightarrow{O'O}$$

Esempio: centro di massa di due punti materiali

Determinare la posizione del centro di massa di un sistema formato da due punti materiali, posti a distanza d tra loro, di massa m_1 e m_2.

Esempio: centro di massa di due punti materiali

Determinare la posizione del centro di massa di un sistema formato da due punti materiali, posti a distanza d tra loro, di massa m_1 e m_2.

Il problema è unidimensionale, indichiamo con x l'asse passante per i due punti e con O l'origine di tale asse.

Indichiamo con x_1 la posizione della massa m_1 e con x_2 la posizione della massa m_2 con $x_2 = x_1 + d$

$$x_{CM}=\frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1x_1+m_2\left(x_1+d\right)}{m_1+m_2}=x_1+\frac{m_2}{m_1+m_2}d$$

Se indichiamo con a e b le distanze del CM dai due punti materiali:

$$a=x_{CM}-x_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}d \qquad b=d-a=d-\frac{m_2}{m_1+m_2}d=\frac{(m_1+m_2)d-m_2d}{m_1+m_2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}d$$

$\Rightarrow$ Il CM è più vicino al punto di materiale di massa maggiore

Se gli *n* punti sono in movimento, di norma la posizione del centro di massa varia

$$\Downarrow$$

definiamo la **velocità del centro di massa di un sistema di punti materiali**

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}\right)}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{m_{tot}} = \frac{\vec{P}_{tot}}{m_{tot}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{P}_{tot} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m_{tot} \vec{v}_{CM}$$

La quantità di moto totale di un sistema di punti materiali è uguale alla quantità di moto $m\vec{v}_{CM}$ del centro di massa, considerato come un punto materiale che ha la posizione $\vec{r}_{CM}$, la velocità $\vec{v}_{CM}$ e massa m pari alla massa totale m_{tot} del sistema.

Se il vettore velocità del centro di massa varia nel tempo → si può definire **l'accelerazione del centro di massa:**

$$\vec{a}_{CM}=\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}=\frac{d\left(\frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{\sum_i m_i}\right)}{dt}=\frac{\sum_i m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i\vec{a}_i}{m_{tot}}$$

se il sistema di riferimento è inerziale: $\vec{F}_i=\vec{F}_i^{(E)}+\vec{F}_i^{(I)}=m_i\vec{a}_i$

$$\Downarrow$$

$$m_{tot}\vec{a}_{CM}=\sum_i m_i\vec{a}_i=\sum_i\left(\vec{F}_i^{(E)}+\vec{F}_i^{(I)}\right)=\vec{R}^{(E)}+\vec{R}^{(I)}=\vec{R}^{(E)}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{R}^{(E)}=m_{tot}\vec{a}_{CM}$$

$$\boxed{\vec{R}^{(E)} = m_{tot}\vec{a}_{CM}}$$

Teorema del moto del centro di massa o Prima equazione cardinale della dinamica

In un sistema di riferimento inerziale il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne. L'azione delle forze interne non può modificare lo stato del moto del centro di massa.

$$\boxed{\vec{R}^{(E)} = m_{tot}\vec{a}_{CM} = m\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{v}_{CM}\right)}{dt} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt}}$$

La risultante delle forze esterne è eguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema

Conservazione della quantità di moto

Se il sistema di *n* punti materiali considerato è isolato oppure soggetto a forze esterne tali che la loro risultante è nulla:

$$\vec{R}^{(E)} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{P}_{tot} = m_{tot}\vec{v}_{CM} = \text{costante}$$

$$\Downarrow$$

Principio di conservazione della quantità di moto

Quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante ed il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete.

N.B. La conservazione della quantità di moto può avvenire anche parzialmente, cioè essere riferita a una o due delle sue componenti. Per esempio se $\vec{R}_x^{(E)} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{P}_x = \text{costante}$

Esempio 1 - conservazione quantità di moto (astronauta)

Un astronauta di 80.0 kg sta effettuando dei lavori sui motori della navetta spaziale. Ad un certo punto egli esercita una spinta sulla navetta, venendosi poi a trovare oltre la navetta di 30.0 m. Senza una spinta, gli rimane un solo modo per poter ritornare sulla navetta: quello di lanciare lontano la chiave inglese di 0.5 kg di massa, in suo possesso. Se la chiave viene lanciata con una velocità in modulo di 20.0 m/s, quanto tempo impiega l'astronauta per raggiungere la navetta?

Esempio 1 - conservazione quantità di moto (astronauta)

Un astronauta di 80.0 kg sta effettuando dei lavori sui motori della navetta spaziale. Ad un certo punto egli esercita una spinta sulla navetta, venendosi poi a trovare oltre la navetta di 30.0 m. Senza una spinta, gli rimane un solo modo per poter ritornare sulla navetta: quello di lanciare lontano la chiave inglese di 0.5 kg di massa, in suo possesso. Se la chiave viene lanciata con una velocità in modulo di 20.0 m/s, quanto tempo impiega l'astronauta per raggiungere la navetta?

Sul sistema astronauta + chiave non agiscono forze esterne
$\Rightarrow$ conservazione della quantità di moto del sistema:

$$\vec{P}_{fin} = \vec{P}_{iniz} = 0$$

$$\Updownarrow$$

perché il sistema astronauta + chiave parte inizialmente da fermo

$$\vec{P}_{fin} = \vec{P}_{iniz} = 0 \Rightarrow m_{chiave}\vec{v}_{chiave} + m_{astronauta}\vec{v}_{astronauta} = 0$$

$$\vec{P}_{fin} = \vec{P}_{iniz} = 0 \Rightarrow m_{chiave}\vec{v}_{chiave} + m_{astronauta}\vec{v}_{astronauta} = 0$$

Consideriamo un asse radiale rivolto verso l'esterno che congiunge la navetta con il sistema astronauta + chiave e proiettiamo la precedente relazione vettoriale su tale asse:

$$m_{chiave}v_{chiave}\hat{u}_r + m_{astronauta}v_{astronauta}\hat{u}_r = 0 \Rightarrow v_{astronauta} = -\frac{m_{chiave}v_{chiave}}{m_{astronauta}}$$

$$\vec{P}_{fin} = \vec{P}_{iniz} = 0 \Rightarrow m_{chiave}\vec{v}_{chiave} + m_{astronauta}\vec{v}_{astronauta} = 0$$

Consideriamo un asse radiale rivolto verso l'esterno che congiunge la navetta con il sistema astronauta + chiave e proiettiamo la precedente relazione vettoriale su tale asse:

$$m_{chiave}v_{chiave}\hat{u}_r + m_{astronauta}v_{astronauta}\hat{u}_r = 0 \Rightarrow v_{astronauta} = -\frac{m_{chiave}v_{chiave}}{m_{astronauta}}$$

ovviamente la chiave dovrà essere lanciata radialmente verso l'esterno $\Rightarrow v_{chiave} > 0$

$\Rightarrow v_{astronauta} < 0 \Rightarrow$ l'astronauta si avvicinerà alla navetta:

In particolare: $$v_{astronauta} = -\frac{m_{chiave}v_{chiave}}{m_{astronauta}} = -0.125 m/s$$

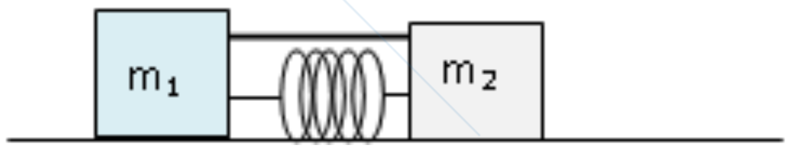
Poiché tale velocità è costante il moto sarà rettilineo uniforme $\Rightarrow t = \left|\frac{distanza}{v_{astronauta}}\right| = \frac{30}{0.125} = 240s$

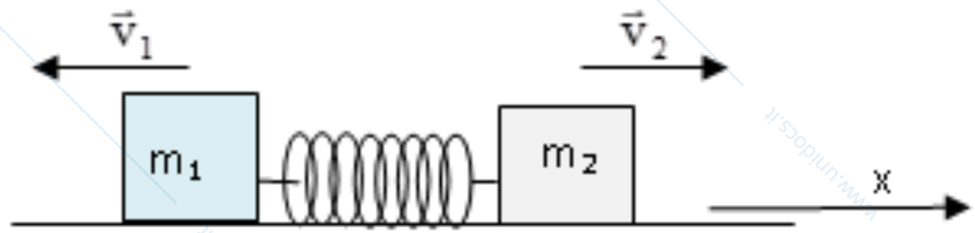
Esempio 2 - conservazione quantità di moto (due masse si sganciano da una molla)

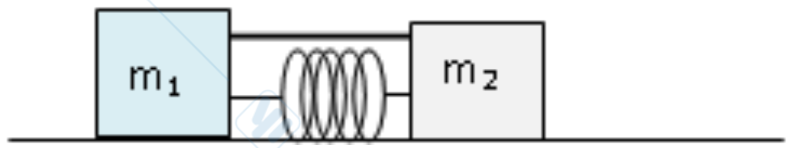
Due corpi di massa $m_1 = 0.2$ kg e $m_2 = 0.3$ kg si trovano su di un piano orizzontale privo di attrito (liscio). Una molla orizzontale di massa trascurabile e costante elastica $k = 3$ N/m è in compressione ed è fissata ad uno di essi e poggiata sull'altro. Un filo (inestensibile e di massa trascurabile) teso tiene fermi i due corpi con la molla compressa. Ad un certo istante il filo viene tagliato per cui i due corpi si muovono, il primo con velocità in modulo $v_1 = 3$ m/s e il secondo con velocità in modulo incognita v_2.

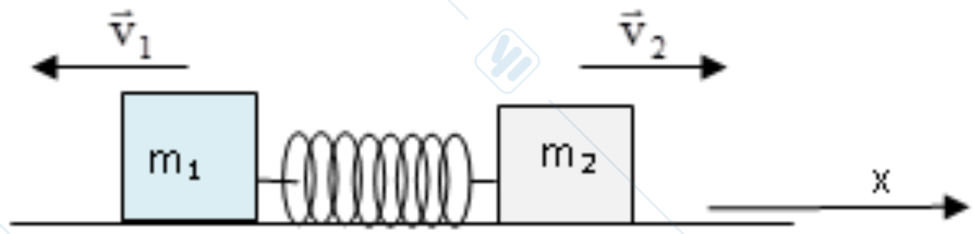
Calcolare:

1) il modulo della velocità v_2
2) la compressione iniziale Δl della molla









1) Consideriamo il sistema formato dalle due masse, la molla e il filo.

Su di esso agiscono le seguenti <u>forze esterne</u>: le due forze peso $m_1\vec{g}$ e $m_2\vec{g}$ verticali rivolte verso il basso, e le due reazioni vincolari $\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$ verticali rivolte verso l'alto. Le tensioni del filo e le forze elastiche generate dalla molla e agenti sulle due masse sono <u>interne</u> al sistema.

$\Rightarrow$ Lungo la direzione del piano di appoggio orizzontale NON ci sono forze esterne

$\Rightarrow$ lungo tale direzione la quantità di moto si conserva

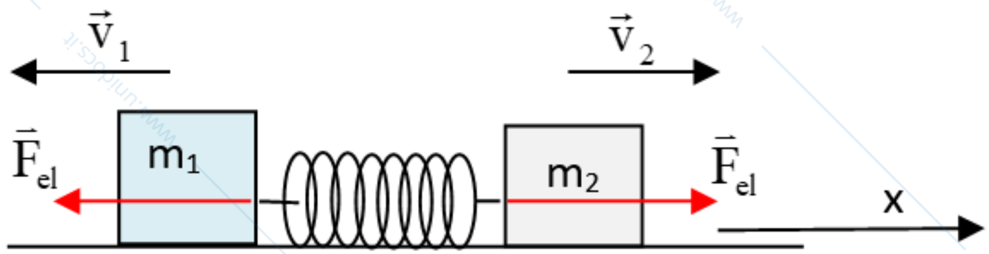
Inoltre lungo la direzione verticale le forze esterne si equilibrano $\Rightarrow m_1\vec{g}+m_2\vec{g}+\vec{N}_1+\vec{N}_2=0$

$\Rightarrow \vec{P}_{fin}=\vec{P}_{iniz}=0$ in quanto il sistema parte inizialmente da fermo

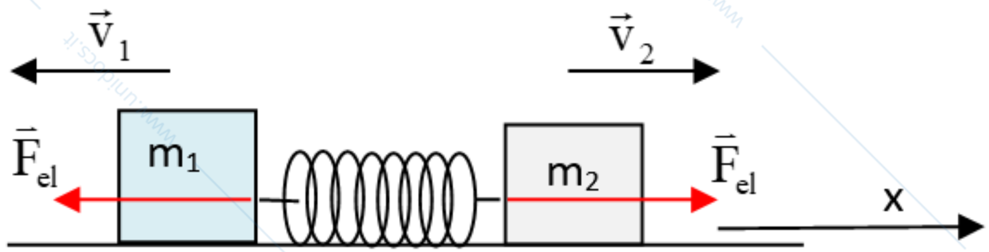
$$\Rightarrow m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1v_1\hat{u}_x+m_2v_2\hat{u}_x=0 \Rightarrow v_2=-\frac{m_1v_1}{m_2}$$

Poiché $\vec{v}_1$ è rivolta in verso opposto all'asse x di figura $\Rightarrow v_1<0=-3m/s \Rightarrow v_2<0=2m/s$

2) Le 4 forze esterne che agiscono sul sistema NON lavorano perché sono perpendicolari alla direzione di movimento. Delle forze interne, le tensioni del filo si annullano perché il filo viene tagliato, mentre le forze elastiche generate dalla molla e agenti sulle due masse producono un lavoro totale positivo perché entrambe sono parallele alla direzione di movimento dei due corpi e con verso coerente con il movimento stesso ($\Rightarrow$ le distanze relative tra i due corpi aumentano).



2) Le 4 forze esterne che agiscono sul sistema NON lavorano perché sono perpendicolari alla direzione di movimento. Delle forze interne, le tensioni del filo si annullano perché il filo viene tagliato, mentre le forze elastiche generate dalla molla e agenti sulle due masse producono un lavoro totale positivo perché entrambe sono parallele alla direzione di movimento dei due corpi e con verso coerente con il movimento stesso ($\Rightarrow$ le distanze relative tra i due corpi aumentano).



Poiché le due forze elastiche sono le uniche forze che lavorano e, inoltre, sono forze conservative $\Rightarrow$ conservazione dell'energia meccanica $\Rightarrow \Delta E_{mecc} = \Delta E_{cinetica} + \Delta E_{potenziale} = 0$

$\Rightarrow (E_{cinetica,\ fin} - E_{cinetica,\ iniz}) + (E_{potenziale,\ fin} - E_{potenziale,\ fin}) = 0$

Poiché alla fine la molla torna in condizioni di riposo

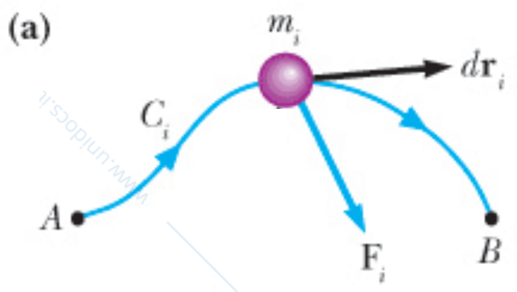
$$\Rightarrow \left(\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right) - 0\right) + \left(0 - \frac{1}{2}k(\Delta l)^2\right) = 0 \Rightarrow \Delta l = \sqrt{\frac{m_1v_1^2 + m_2v_2^2}{k}} = 1\ \text{m}$$

Teorema dell'energia cinetica

Consideriamo un sistema di *n* punti materiali e determiniamo il lavoro dW_i fatto dalla risultante $\vec{F}_i$ delle forze applicate al punto P_i per uno spostamento infinitesimo $d\vec{r}_i$:

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i^{(E)} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(I)} \cdot d\vec{r}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}$$

$$\Downarrow$$



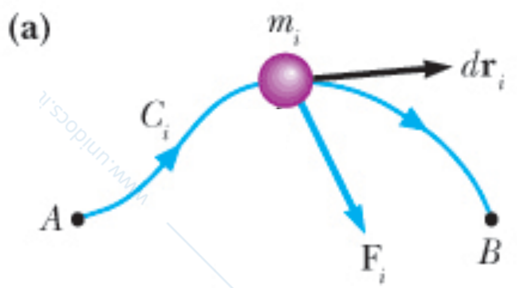
$$W_{AB_i} = \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \int_A^B \left(\vec{F}_i^{(E)} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(I)} \cdot d\vec{r}_i \right) = W_i^{(E)} + W_i^{(I)}$$

Teorema dell'energia cinetica

Consideriamo un sistema di *n* punti materiali e determiniamo il lavoro dW_i fatto dalla risultante $\vec{F}_i$ delle forze applicate al punto P_i per uno spostamento infinitesimo $d\vec{r}_i$:

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i^{(E)} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(I)} \cdot d\vec{r}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}$$

$$\Downarrow$$



$$W_{AB_i} = W_i = \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \int_A^B \left(\vec{F}_i^{(E)} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(I)} \cdot d\vec{r}_i \right) = W_i^{(E)} + W_i^{(I)}$$

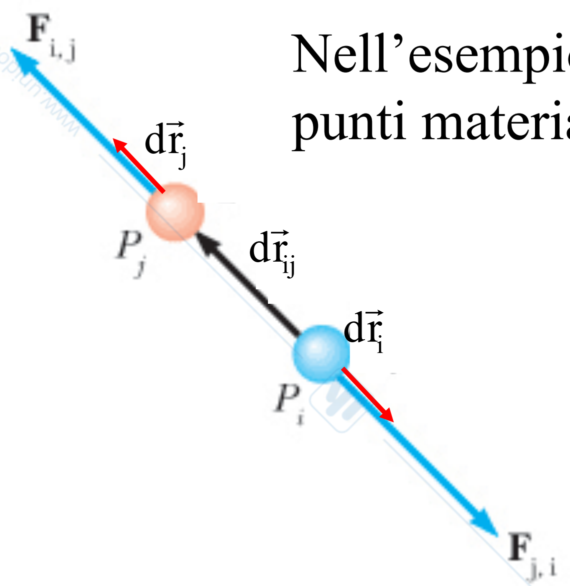
Sommando su tutti gli *n* punti materiali e integrando lungo tutte le n traiettorie percorse:

$$W_{tot} = \sum_i W_i = \sum_i W_i^{(E)} + \sum_i W_i^{(I)} = W^{(E)} + W^{(I)}$$

somma del lavoro delle forze esterne e delle forze interne

N.B. Il lavoro delle forze interne è, in generale, non nullo:

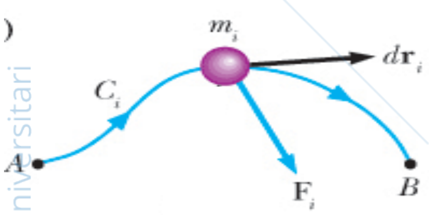
$$dW^{(I)} = \sum_{i,j}\left(\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_j + \vec{F}_{ji}\cdot d\vec{r}_i\right) = \sum_{i,j}\vec{F}_{ij}\cdot\left(d\vec{r}_j - d\vec{r}_i\right) = \sum_{i,j}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_{ij}$$



Nell'esempio in figura le due forze interne sono repulsive e spingono i due punti materiali verso l'esterno dando luogo ad un lavoro totale positivo

Il lavoro delle forze interne è legato alla variazione delle distanze mutue tra i vari punti materiali

Se queste non cambiano (corpo rigido) il lavoro delle forze interne è nullo



$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = dE_{k_i} \Rightarrow W_{AB_i} = W_i = \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \Delta E_{k,AB_i} = E_{k,B_i} - E_{k,A_i} = \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2$$

$$\Downarrow$$

Sommando su tutti gli *n* punti materiali e integrando lungo tutte le *n* traiettorie percorse

$$W_{tot} = W^{(E)} + W^{(I)} = \sum_i W_i = \sum_i \Delta E_{k,i} = \Delta E_k = E_{k,fin} - E_{k,iniz}$$

$$\Downarrow$$

Teorema dell'energia cinetica per un sistema di punti materiali

Il lavoro totale fatto dalle forze esterne ed interne che agiscono su di un sistema di *n* punti materiali è uguale alla variazione di energia cinetica dello stesso sistema tra la configurazione finale e quella iniziale

$$W_{tot} = W^{(E)} + W^{(I)}$$

Se tutte le forze interne sono conservative $\Rightarrow W^{(I)} = -\Delta E_p^{(I)}$

Se tutte le forze esterne sono conservative $\Rightarrow W^{(E)} = -\Delta E_p^{(E)}$

Se tutte le forze agenti, interne ed esterne sono conservative $\Rightarrow \Delta E_m = 0$

Teorema di conservazione dell'energia meccanica del sistema

$$W_{tot} = W^{(E)} + W^{(I)}$$

Se tutte le forze interne sono conservative $\Rightarrow W^{(I)} = -\Delta E_p^{(I)}$

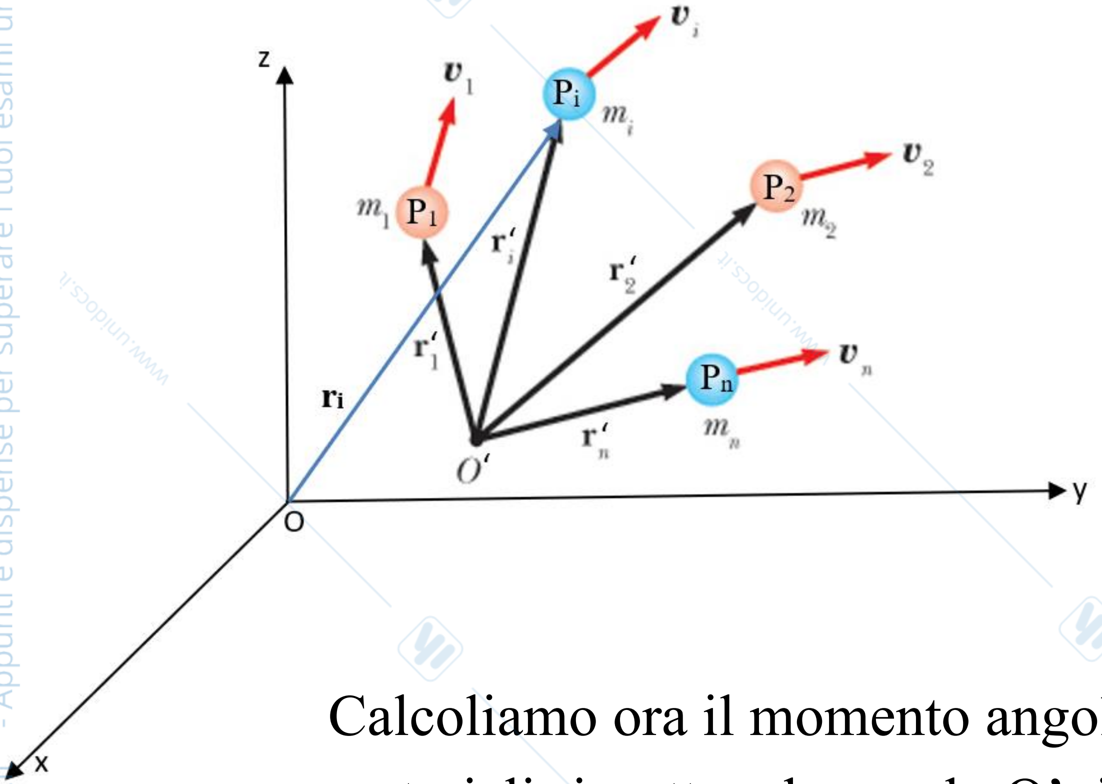
Se tutte le forze esterne sono conservative $\Rightarrow W^{(E)} = -\Delta E_p^{(E)}$

Se tutte le forze agenti, interne ed esterne sono conservative $\Rightarrow \Delta E_m = 0$

Teorema di conservazione dell'energia meccanica del sistema

Se NON tutte le forze agenti, interne ed esterne sono conservative $\Rightarrow \boxed{W_{nc} = \Delta E_m}$

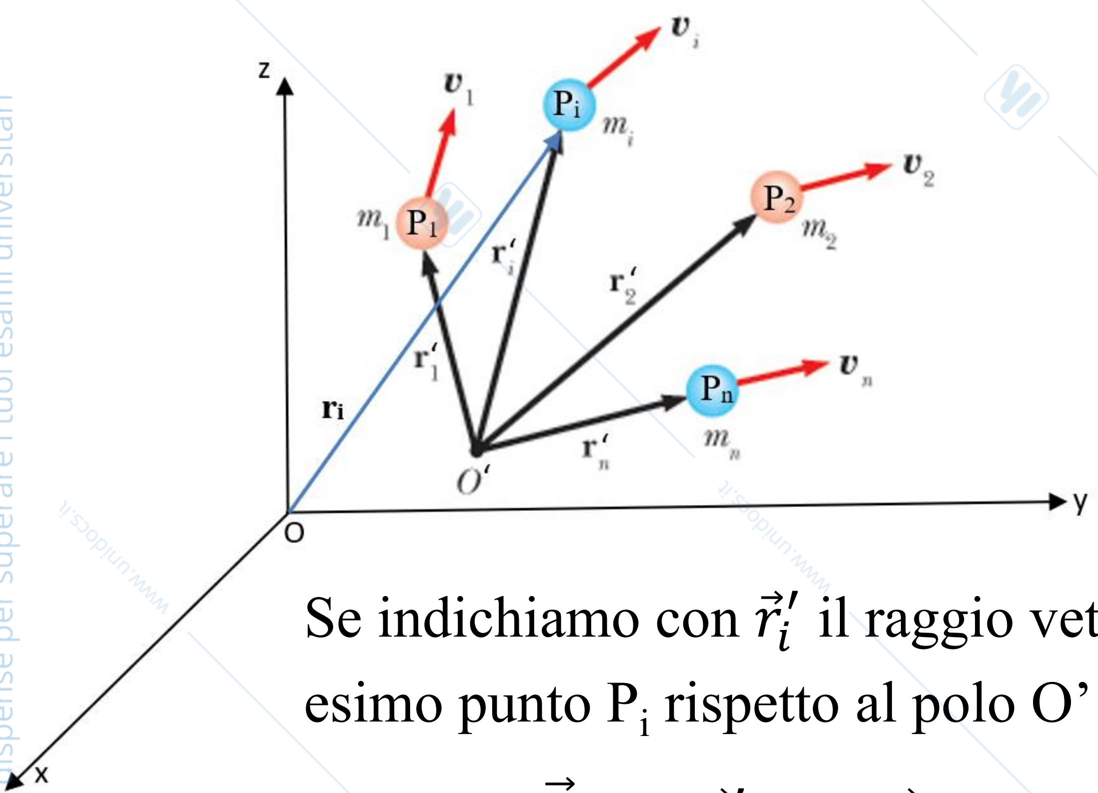
Teorema del momento angolare (o Seconda equazione cardinale della dinamica)



Dato un sistema di riferimento fisso **inerziale** (O,x,y,z), consideriamo un sistema di n punti materiali P_1, …, P_n e definiamo con $\vec{r}_i$ e $\vec{v}_i$ il vettore posizione e il vettore velocità dell'i-esimo punto P_i, rispettivamente.

Calcoliamo ora il momento angolare totale $\vec{L}_{O'}$ di tale sistema di punti materiali rispetto ad un polo O', in generale mobile.

Calcolo del momento angolare totale $\vec{L}_{O'}$

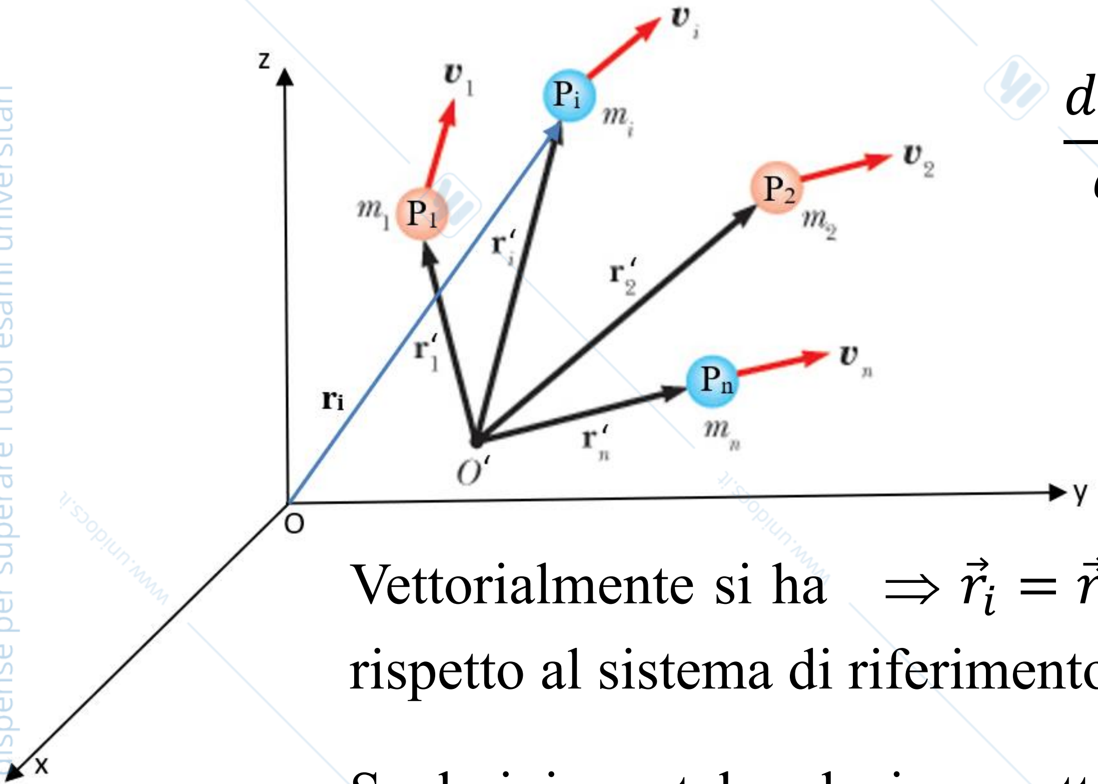


Se indichiamo con $\vec{r}_i'$ il raggio vettore $\overrightarrow{O'P}_i$ allora il momento angolare dell'*i*-esimo punto P_i rispetto al polo O' è:

$$\vec{L}_{O_i'} = \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i \qquad \text{da cui} \Rightarrow \vec{L}_{O'} = \sum_i (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i)$$

Se deriviamo rispetto al tempo il momento angolare totale otteniamo:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{r}_i'}{dt} \times m_i \vec{v}_i\right) + \sum_i \left(\vec{r}_i' \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)$$



$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \sum_i \left(\boxed{\frac{d\vec{r}_i'}{dt}} \times m_i\vec{v}_i\right) + \sum_i \left(\vec{r}_i' \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)$$

Determinazione di $\frac{d\vec{r}_i'}{dt}$

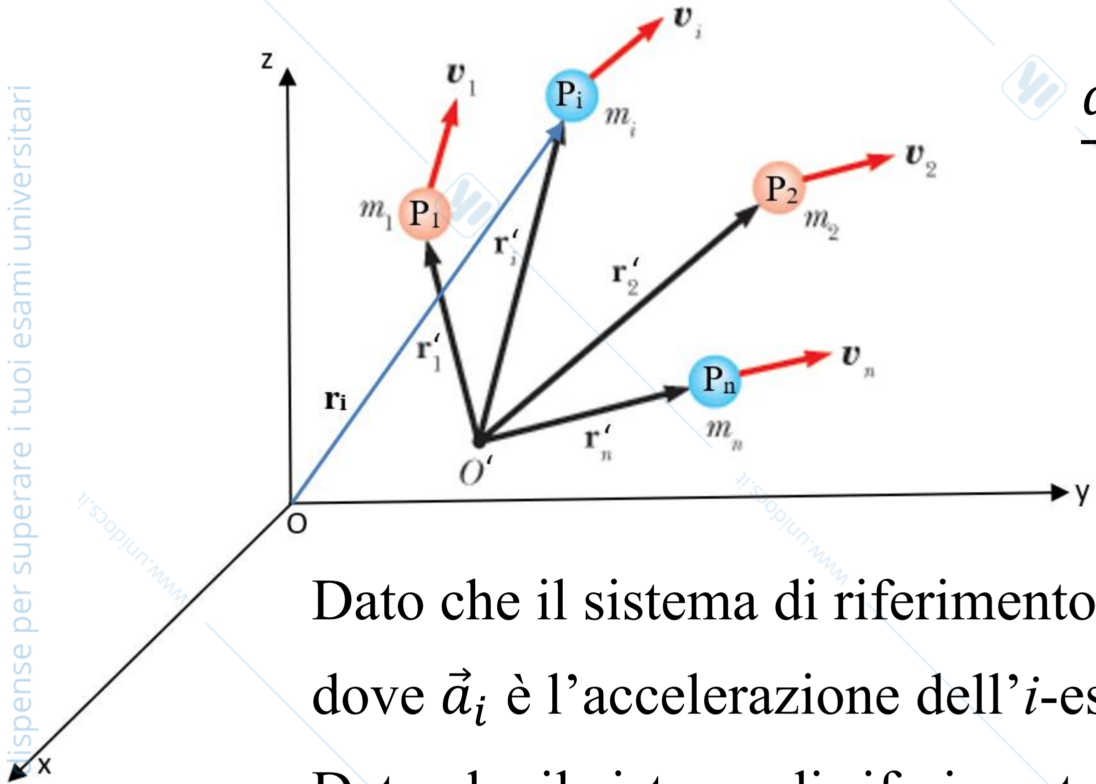
Vettorialmente si ha $\Rightarrow \vec{r}_i = \vec{r}_i' + \overrightarrow{OO'}$, dove $\overrightarrow{OO'}$ è il vettore posizione di O' rispetto al sistema di riferimento (O, x, y, z).

Se deriviamo tale relazione vettoriale si ha $\Rightarrow \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i'}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$,

ma essendo il sistema di riferimento fisso: $\Rightarrow \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$ e $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{v}_{O'}$

dove $\vec{v}_{O'}$ è la velocità del polo O' rispetto al sistema di riferimento (O, x, y, z).

$$\frac{d\vec{r}_i'}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_{O'}$$



$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{r}_i'}{dt} \times m_i\vec{v}_i\right) + \sum_i \left(\vec{r}_i' \times \boxed{m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}\right)$$

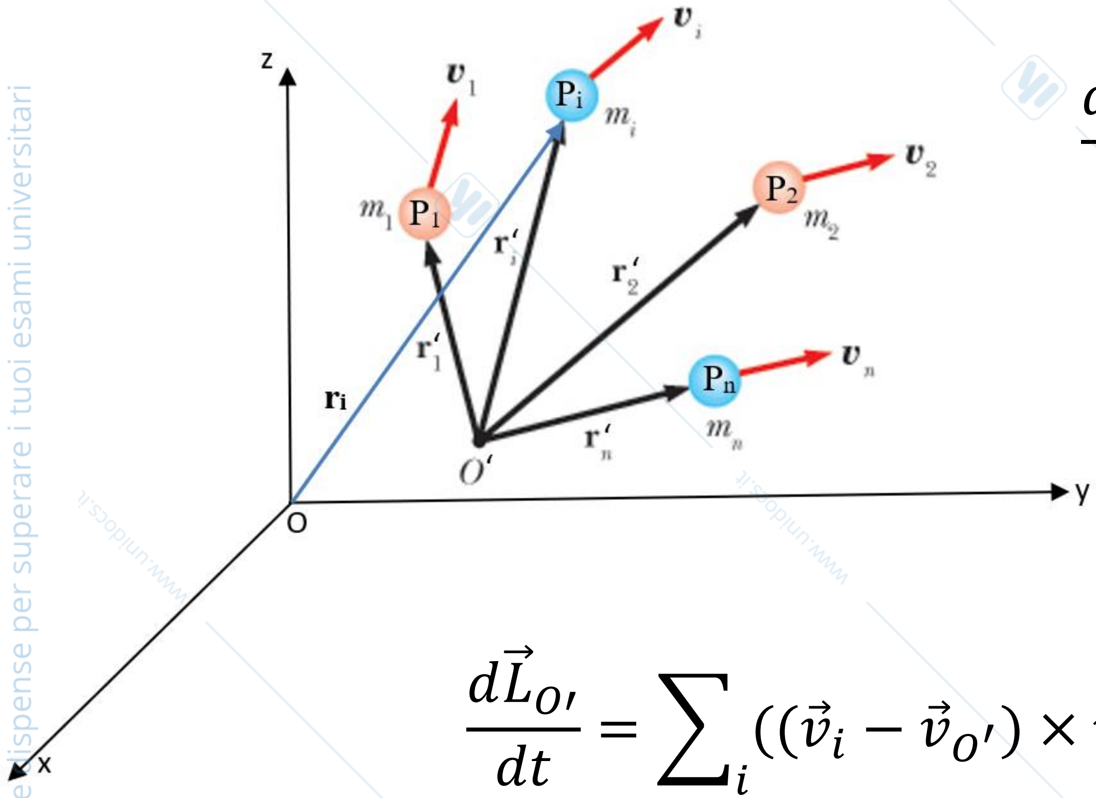
Determinazione di $m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$

Dato che il sistema di riferimento (O, x, y, z) è fisso: $\Rightarrow m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m_i\vec{a}_i$

dove $\vec{a}_i$ è l'accelerazione dell'i-esimo punto P_i

Dato che il sistema di riferimento è inerziale: $\Rightarrow m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$

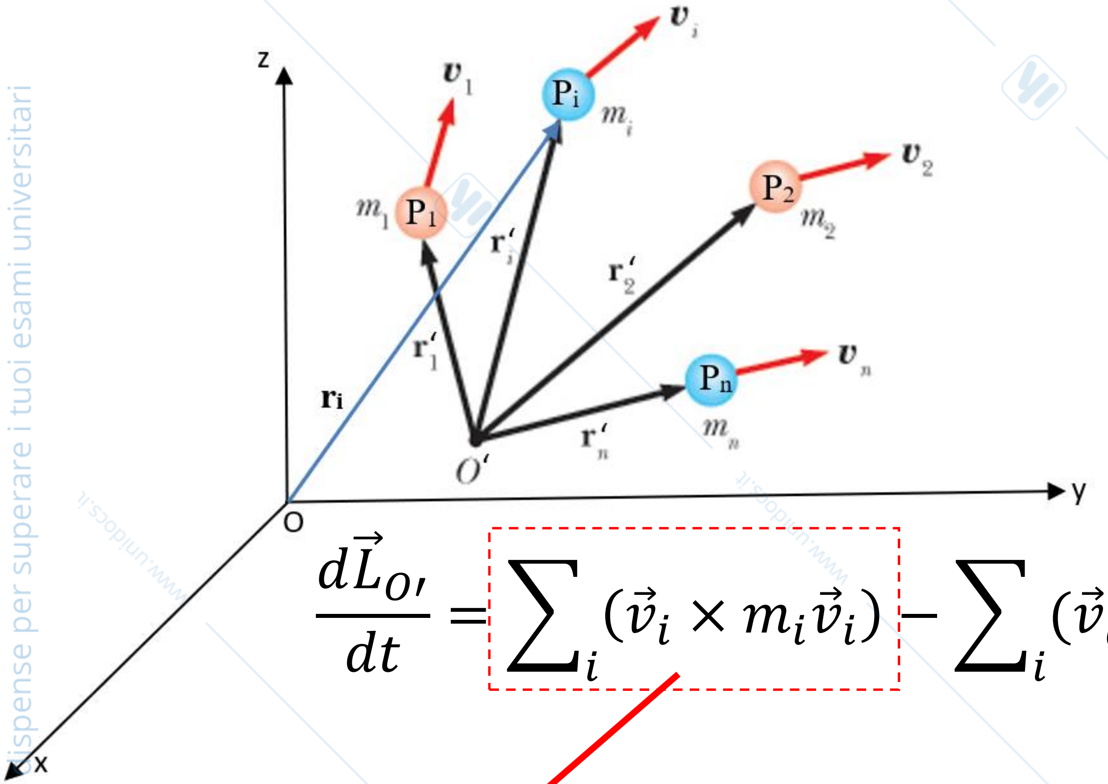
dove $\vec{F}_i^{(E)}$ e $\vec{F}_i^{(I)}$ sono le forze esterne e interne, rispettivamente, agenti sull'i-esimo punto P_i.



$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \sum_i \Big(\underbrace{\boxed{\frac{d\vec{r}_i'}{dt}}}_{\vec{v}_i - \vec{v}_{O'}} \times m_i\vec{v}_i\Big) + \sum_i \Big(\vec{r}_i' \times \underbrace{\boxed{m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}}}_{\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}}\Big)$$

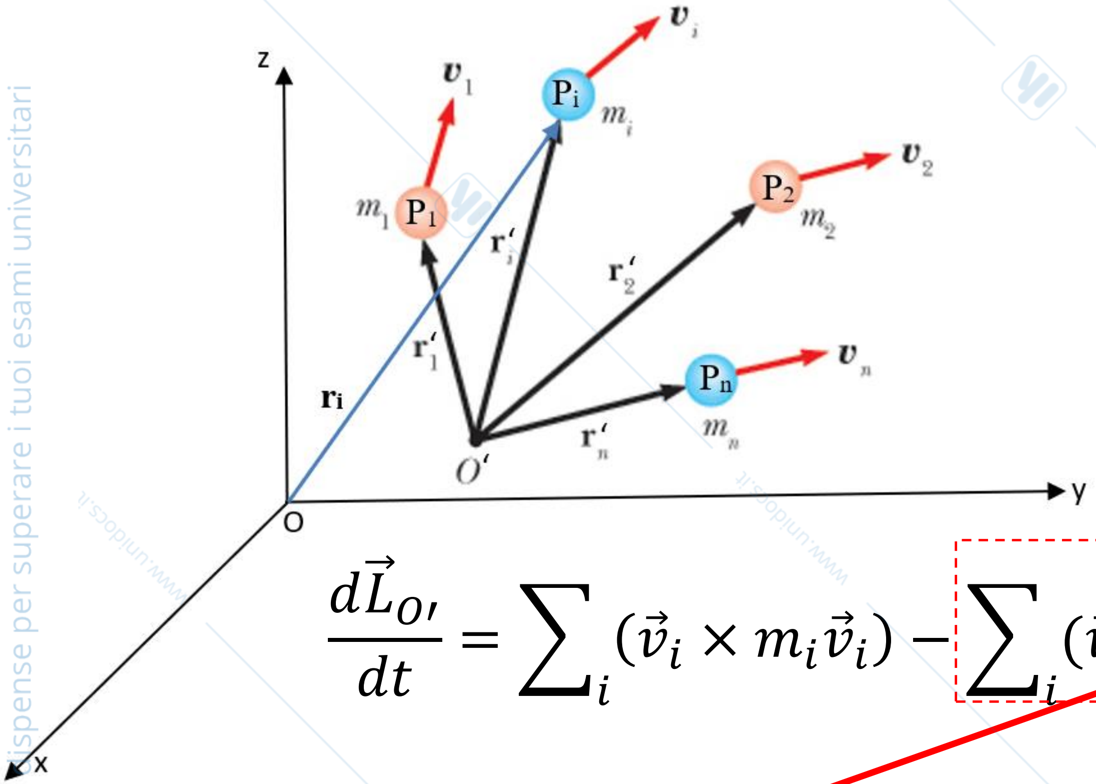
$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \sum_i ((\vec{v}_i - \vec{v}_{O'}) \times m_i\vec{v}_i) + \sum_i (\vec{r}_i' \times (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}))$$

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \sum_i (\vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i) - \sum_i (\vec{v}_{O'} \times m_i\vec{v}_i) + \sum_i (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(E)}) + \sum_i (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(I)})$$



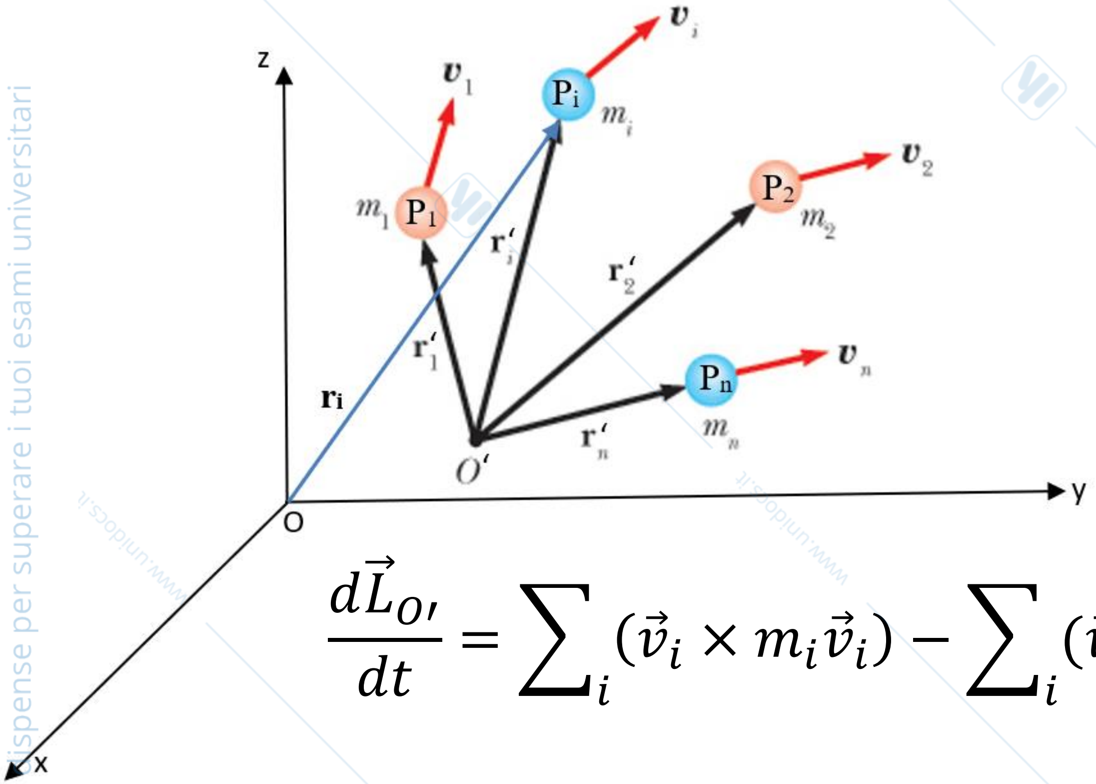
$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \boxed{\sum_i (\vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i)} - \sum_i (\vec{v}_{O'} \times m_i\vec{v}_i) + \sum_i (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(E)}) + \sum_i (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(I)})$$

1) $\sum_i(\vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i) = 0$ perché ogni addendo è un prodotto vettoriale di vettori paralleli tra di loro



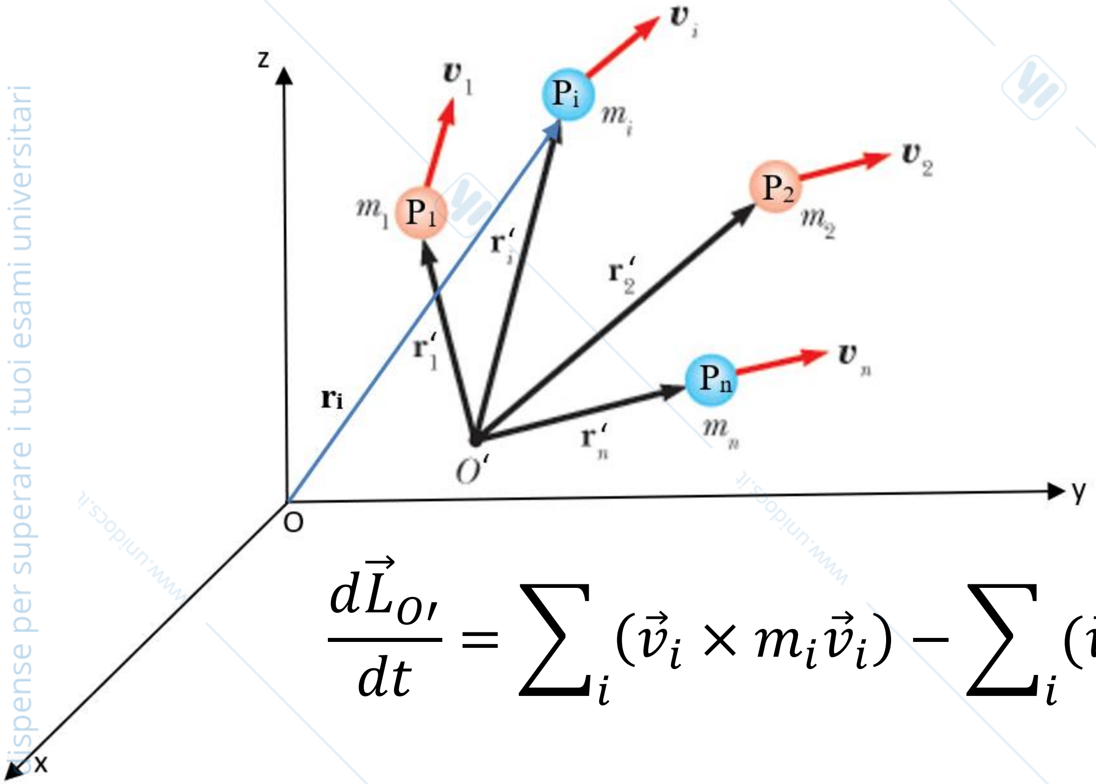
$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \sum_i (\vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i) - \boxed{\sum_i (\vec{v}_{O'} \times m_i\vec{v}_i)} + \sum_i (\vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{(E)}) + \sum_i (\vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{(I)})$$

2) $\sum_i(\vec{v}_{O'} \times m_i\vec{v}_i) = \vec{v}_{O'} \times \sum_i(m_i\vec{v}_i) = \vec{v}_{O'} \times m_{ToT}\vec{v}_{CM}$, essendo $\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i(m_i\vec{v}_i)}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i(m_i\vec{v}_i)}{m_{ToT}}$ la velocità del centro di massa (CM) del sistema di *n* punti materiali nel sistema di riferimento (O, x, y, z) e m_{ToT} la massa totale del sistema di *n* punti materiali



$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \sum_i (\vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i) - \sum_i (\vec{v}_{O'} \times m_i\vec{v}_i) + \boxed{\sum_i (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(E)})} + \sum_i (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(I)})$$

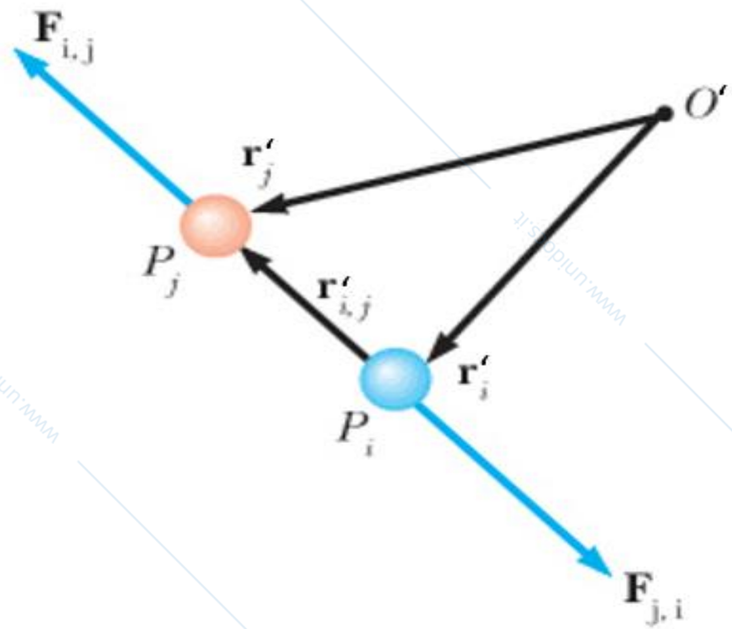
3) $\sum_i \left(\vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(E)}\right) = \vec{M}_{O'}^{(E)}$ = momento totale delle forze esterne rispetto al polo O'



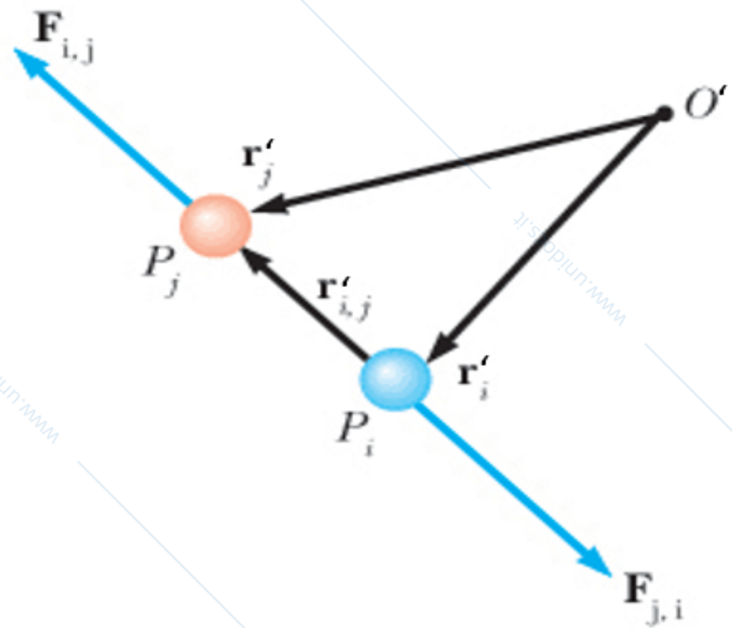
$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \sum_i (\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i) - \sum_i (\vec{v}_{O'} \times m_i \vec{v}_i) + \sum_i (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(E)}) + \boxed{\sum_i (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(I)})}$$

4) $\sum_i \left(\vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(I)}\right) = \vec{M}_{O'}^{(I)}$ = momento totale delle forze interne rispetto al polo O'

Con riferimento alla seguente figura che raffigura l'interazione interna tra due punti P_i e P_j, calcoliamo il momento delle forze interne agenti tra i due punti in esame:



Con riferimento alla seguente figura che raffigura l'interazione interna tra due punti P_i e P_j, calcoliamo il momento delle forze interne agenti tra i due punti in esame:



$$\vec{M}_{O'}^{(I)} = \vec{r}_j' \times \vec{F}_{i,j} + \vec{r}_i' \times \vec{F}_{j,i} = \vec{r}_j' \times \vec{F}_{i,j} - \vec{r}_i' \times \vec{F}_{i,j} = (\vec{r}_j' - \vec{r}_i') \times \vec{F}_{i,j}$$

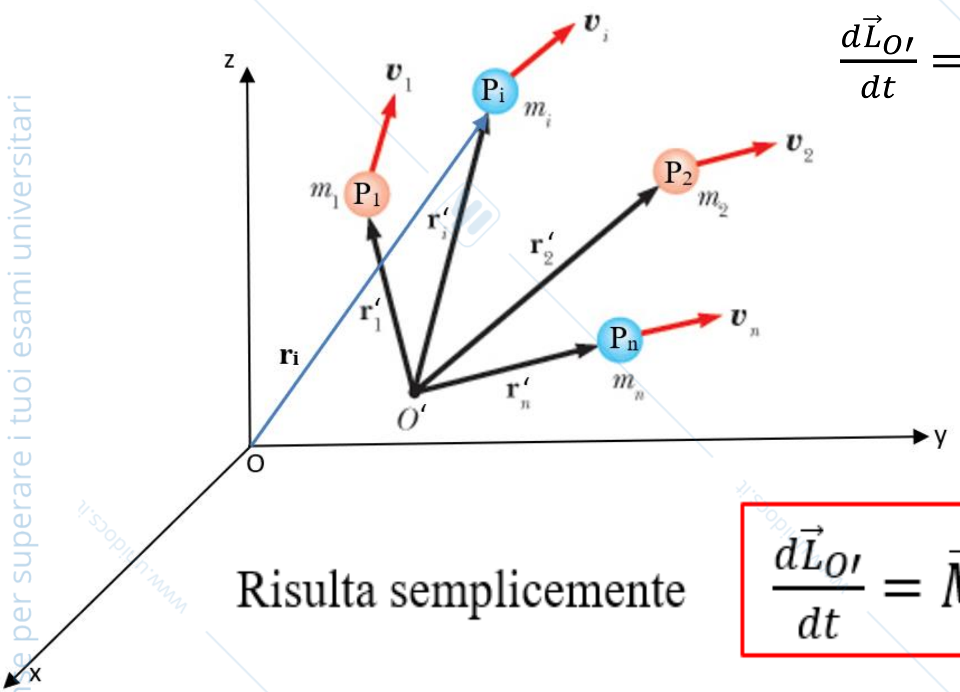
essendo $\vec{F}_{i,j}$ e $\vec{F}_{j,i}$ uguali e contrarie per il principio di azione e reazione ($\vec{F}_{j,i} = -\vec{F}_{i,j}$).

Ma $(\vec{r}_j' - \vec{r}_i') = \vec{r}_{i,j}'$ è il vettore che congiunge i due punti P_i e P_j che è parallelo a $\vec{F}_{i,j}$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}_{O'}^{(I)} = 0$$

Ripetendo tale discorso per ogni coppia di punti P_i e P_j del sistema si ha:

$$\Sigma_i\left(\vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(I)}\right) = \vec{M}_{O'}^{(I)} = 0$$



$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \sum_i(\vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i) - \sum_i(\vec{v}_{O'} \times m_i\vec{v}_i) + \sum_i(\vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{(E)}) + \sum_i(\vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{(I)})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{M}_{O'}^{(E)} - \vec{v}_{O'} \times m_{ToT}\vec{v}_{CM}}$$

Risulta semplicemente $\boxed{\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{M}_{O'}^{(E)}}$ quando $-\vec{v}_{O'} \times m_{ToT}\vec{v}_{CM} = 0$, ossia quando

1) il polo O' è fisso nel sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z)
2) il centro di massa del sistema è fermo nel sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z)
3) il polo O' coincide con il centro di massa del sistema
4) $\vec{v}_{O'} || \vec{v}_{CM}$

Teorema del momento angolare (o Seconda equazione cardinale della dinamica)

L'evoluzione nel tempo del momento angolare di un sistema di punti in un sistema di riferimento inerziale è determinato dal momento delle forze esterne, le forze interne non danno contributo

Conservazione del momento angolare

In un sistema di n punti materiali, dato un sistema di riferimento inerziale e dato un polo O qualsiasi, se vale che $-\vec{v}_O \times m_{ToT}\vec{v}_{CM}=0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{(E)}$$

Se il momento delle forze esterne rispetto al polo O è nullo: $\Rightarrow$ $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$

$$\Downarrow$$

$\vec{L}_O$=costante (in direzione, verso e modulo)

$$\Downarrow$$

Principio di conservazione del momento angolare

La condizione $\vec{M}_O^{(E)}=0$ si può verificare quando:

- il sistema di n punti materiali è isolato $\Leftrightarrow$ non agiscono forze esterne

$$\Downarrow$$

il momento angolare si conserva rispetto a qualsiasi polo O per il quale $-\vec{v}_O \times m_{ToT}\vec{v}_{CM}=0$

- il momento delle forze esterne è nullo solo rispetto ad un determinato polo O

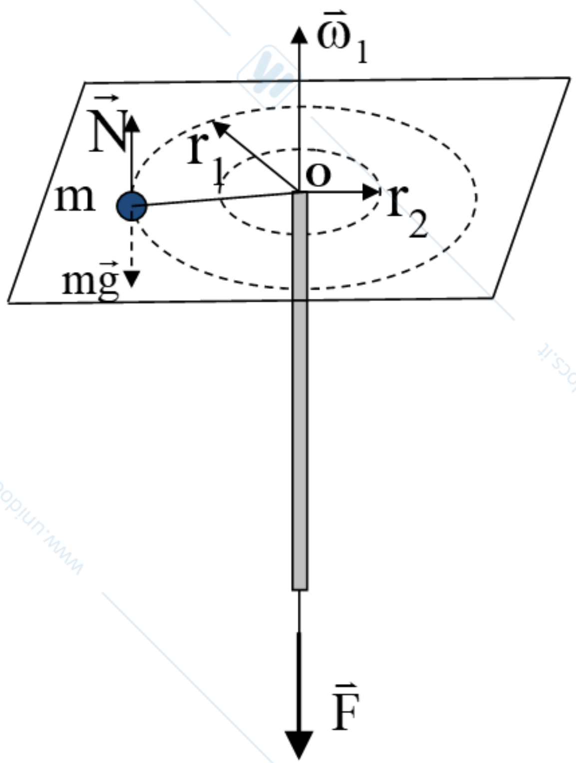
$$\Downarrow$$

il momento angolare si conserva solo rispetto a quel polo O se $-\vec{v}_O \times m_{ToT}\vec{v}_{CM}=0$

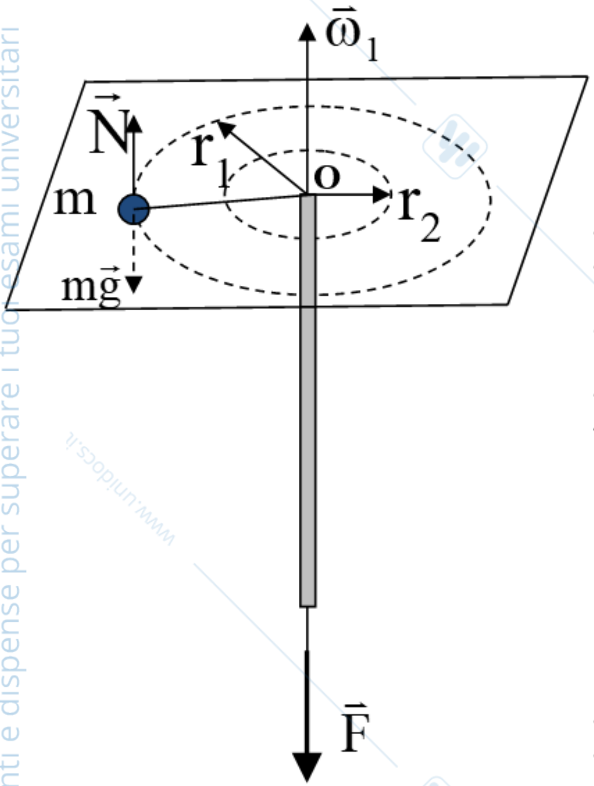
Esempio - conservazione momento angolare

Un piccolo oggetto di massa m è attaccato ad un filo che passa attraverso un tubicino. L'oggetto viene posto in rotazione con una velocità in modulo v_1 su di un cerchio di raggio r_1. A questo punto si tira il filo verso il basso attraverso l'applicazione di una forza verticale $\vec{\mathbf{F}}$ diminuendo il raggio della traiettoria sino al valore r_2.

Trovare la nuova velocità tangenziale v_2 (in modulo) e angolare ω_2 (in modulo) dell'oggetto



Sul sistema massa m + filo agiscono le seguenti forze esterne: la forza peso $m\vec{g}$, rivolta verticalmente verso il basso, e la reazione vincolare $\vec{N}$, rivolta verticalmente verso l'alto, che si equilibrano tra di loro non essendoci movimento verticale della massa m, e la forza $\vec{F}$, rivolta verticalmente verso il basso. La tensione della fune rappresenta una forza interna al sistema.



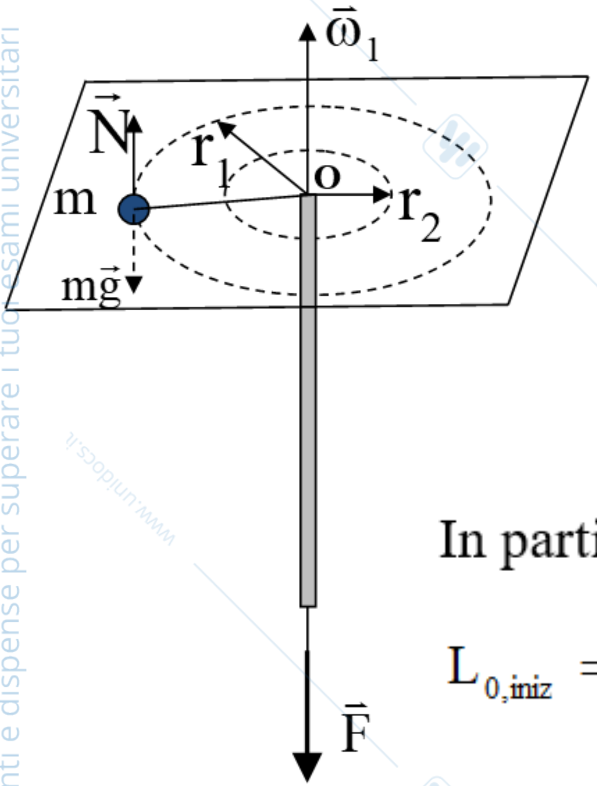
Dal teorema del momento angolare (o II^a legge cardinale della dinamica) in un sistema di riferimento inerziale, prendendo come polo il punto fisso O (ved. figura)

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}_{O,i}^{(E)}$$

Poiché rispetto a tale polo O la forza verticale $\vec{F}$ presenta un momento $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, essendo $\vec{r} \parallel \vec{F}$ con $\vec{r}$ il vettore distanza che congiunge il polo con il punto di applicazione della forza $\vec{F}$

$\Rightarrow \dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}_{O,i}^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O =$ costante in modulo, direzione e verso



$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}_{O,i}^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = \text{ costante in modulo, direzione e verso}$$

In particolare, in modulo:

$$L_{0,iniz} = L_{0,fin} \Rightarrow |\vec{r}_1 \times m\vec{v}_1| = |\vec{r}_2 \times m\vec{v}_2| \Rightarrow r_1 m v_1 = r_2 m v_2 \Rightarrow v_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) v_1|$$

poiché $r_1 > r_2 \Rightarrow$ la velocità v_2 (in modulo) dell'oggetto aumenta rispetto a v_1

$$\Rightarrow \text{essendo } v = \omega r \Rightarrow v_2 = \omega_2 r_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_2}{r_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\frac{v_1}{r_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\frac{\omega_1 r_1}{r_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \omega_1$$

Sistema di riferimento del centro di massa

Nell'ambito della dinamica dei sistemi di punti materiali, consideriamo ora il sistema di riferimento del centro di massa. Esso presenta le seguenti caratteristiche salienti:

1) il sistema di riferimento del centro di massa ha come origine il centro di massa (CM) del sistema di n punti materiali;

Sistema di riferimento del centro di massa

Nell'ambito della dinamica dei sistemi di punti materiali, consideriamo ora il sistema di riferimento del centro di massa. Esso presenta le seguenti caratteristiche salienti:

1) il sistema di riferimento del centro di massa ha come origine il centro di massa (CM) del sistema di n punti materiali;

2) gli assi cartesiani del sistema di riferimento del centro di massa mantengono sempre la stessa direzione rispetti gli assi di un sistema di riferimento inerziale (in particolare possono essere presi paralleli a questi ultimi) $\Rightarrow$ il sistema di riferimento del centro di massa NON ruota ma trasla percorrendo in generale una traiettoria curvilinea

Sistema di riferimento del centro di massa

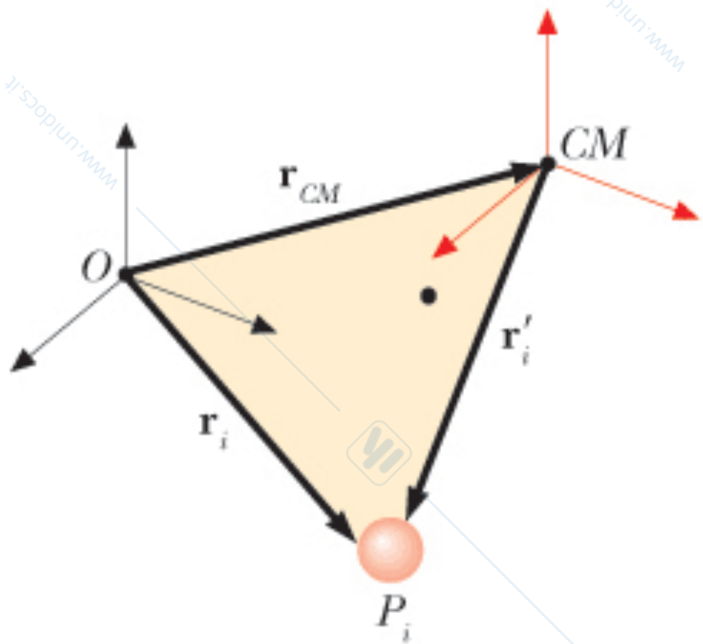
Nell'ambito della dinamica dei sistemi di punti materiali, consideriamo ora il sistema di riferimento del centro di massa. Esso presenta le seguenti caratteristiche salienti:

1) il sistema di riferimento del centro di massa ha come origine il centro di massa (CM) del sistema di n punti materiali;

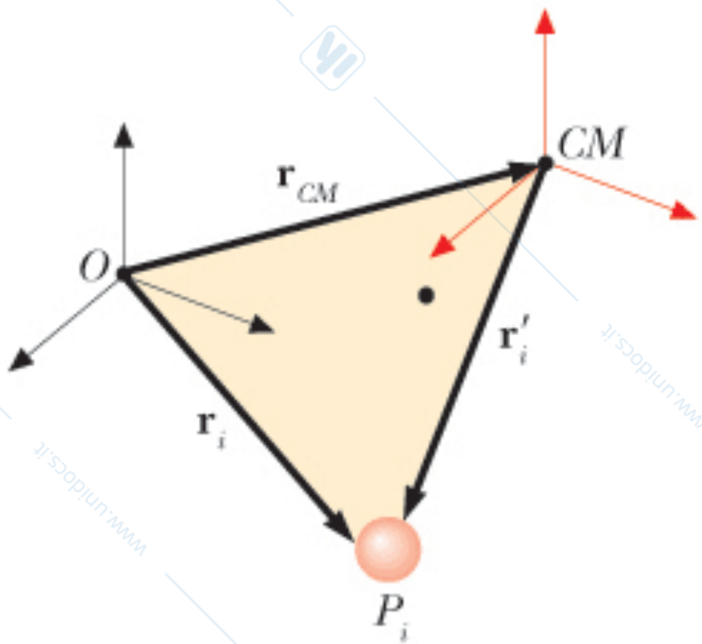
2) gli assi cartesiani del sistema di riferimento del centro di massa mantengono sempre la stessa direzione rispetti gli assi di un sistema di riferimento inerziale (in particolare possono essere presi paralleli a questi ultimi) $\Rightarrow$ il sistema di riferimento del centro di massa NON ruota ma trasla percorrendo in generale una traiettoria curvilinea

3) il sistema di riferimento del centro di massa è, in generale, un sistema di riferimento NON inerziale poiché il centro di massa può accelerare rispetto al sistema di riferimento inerziale

Dato un sistema di n punti materiali, determiniamo la posizione del centro di massa (CM) e consideriamo due sistemi di riferimento: un sistema di riferimento fisso inerziale (O, x, y, z) e il sistema di riferimento mobile del centro di massa (CM, x', y', z'), centrato nel centro di massa del sistema di *n* punti materiali.

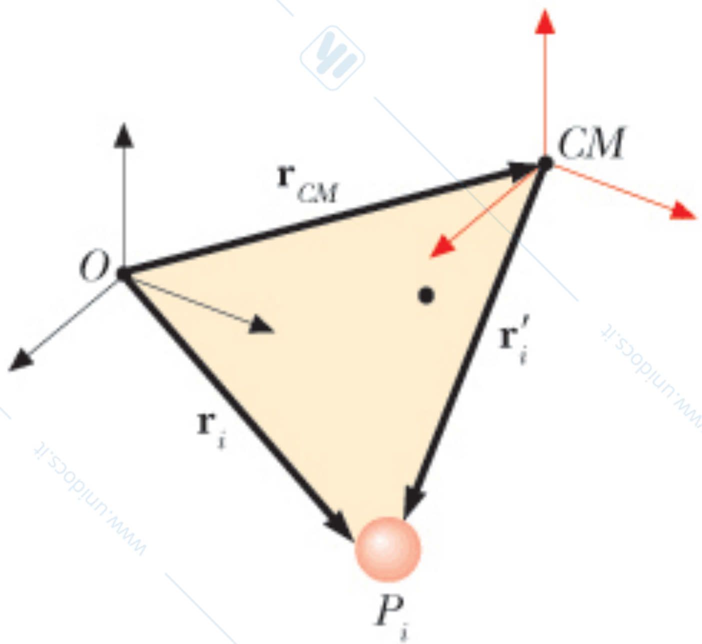


Indichiamo con un apice le grandezze cinematiche e dinamiche relative al sistema di riferimento del centro di massa e prendiamo in esame il punto *i*-esimo P_i.



$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}$$

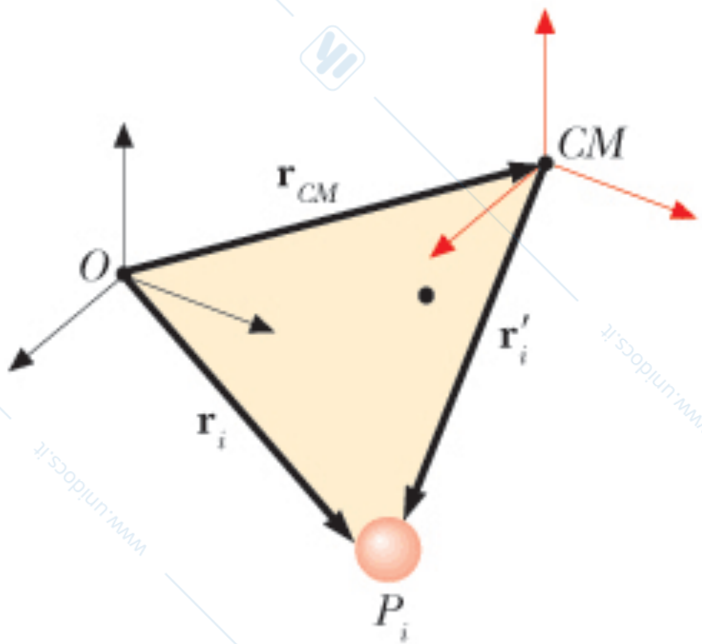
$\vec{r}_i$ è il vettore posizione del punto P_i rispetto al sistema inerziale (O, x, y, z),
$\vec{r}_i'$ è il vettore posizione del punto P_i rispetto al sistema del centro di massa
$\vec{r}_{CM}$ è il vettore posizione del centro di massa rispetto al sistema inerziale (O, x, y, z)



Poiché il sistema di riferimento del centro di massa non ruota ($\omega = 0$) $\Rightarrow$ dal teorema delle velocità relative si ha:

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$$

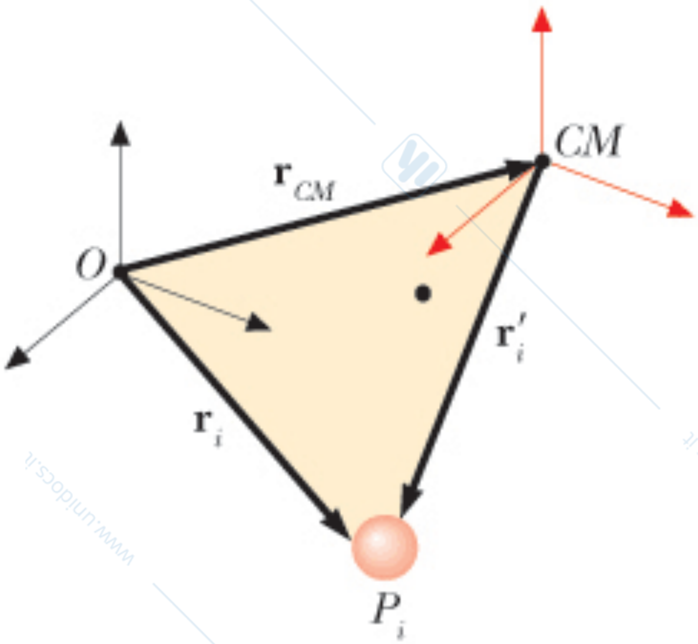
$\vec{v}_i$ è il vettore velocità del punto P_i rispetto al sistema inerziale (O, x, y, z)
$\vec{v}'_i$ è il vettore velocità del punto P_i rispetto al sistema del centro di massa
$\vec{v}_{CM}$ è il vettore velocità del centro di massa rispetto al sistema inerziale (O, x, y, z)



Poiché il sistema di riferimento del centro di massa non ruota ($\omega = 0$) $\Rightarrow$ dal teorema delle accelerazioni relative si ha:

$$\vec{a}_i = \vec{a}'_i + \vec{a}_{CM}$$

$\vec{a}_i$ è il vettore accelerazione del punto P_i rispetto al sistema inerziale (O, x, y, z)
$\vec{a}'_i$ è il vettore accelerazione del punto P_i rispetto al sistema del centro di massa
$\vec{a}_{CM}$ è il vettore accelerazione del centro di massa rispetto al sistema inerziale (O, x, y, z)



Dalla definizione di posizione, velocità e accelerazione del centro di massa si ha anche:

i) $\vec{r}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}'_i}{\sum_i m_i} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$

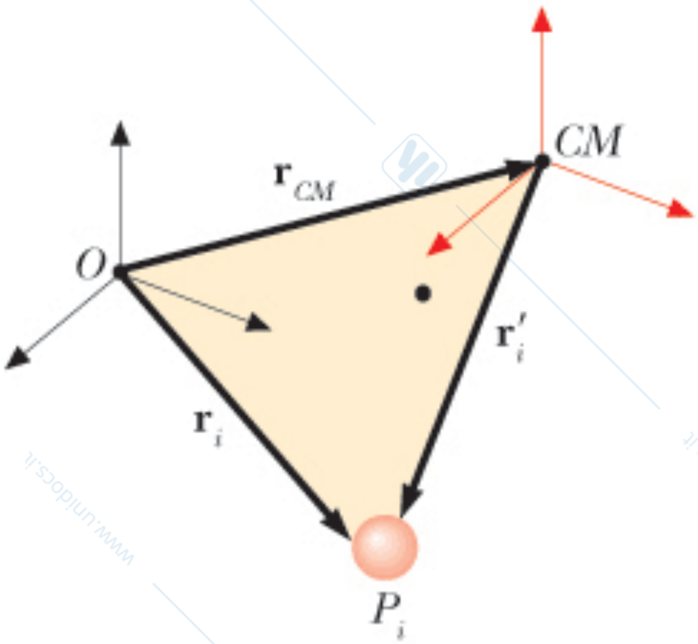
ii) $\vec{v}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}'_i}{\sum_i m_i} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$

iii) $\vec{a}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}'_i}{\sum_i m_i} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{a}'_i = 0$

In particolare:

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = m_{Tot} \vec{v}'_{CM} = \vec{P}'_{ToT} = 0$$

ossia, *la quantità di moto totale del sistema di n punti materiali risulta sempre nulla se misurata nel sistema di riferimento del centro di massa:* $\vec{P}'_{ToT} = 0$



Inoltre sappiamo dal Teorema del momento angolare che se prendiamo come polo il CM:

$$-\vec{v}_{O'} \times m_{ToT}\vec{v}_{CM} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{M}_{CM}^{(E)}$$

Si può dimostrare che nel sistema di riferimento del centro di massa si ha inoltre:

$$\frac{d\vec{L}'_{CM}}{dt} = \vec{M}'^{(E)}_{CM}$$

Il Teorema del momento angolare si può utilizzare anche nel sistema di riferimento del centro di massa purchè come polo si assuma il centro di massa

Teoremi di Konig

I teoremi di Konig stabiliscono le relazioni tra i momenti angolari e le energie cinetiche di un sistema di *n* punti materiali, valutati in:

- un sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z)
- e nel sistema di riferimento del centro di massa (CM, x', y', z').

A. Teorema di Konig per il momento angolare

B. Teorema di Konig per l'energia cinetica

A. Teorema di Konig per il momento angolare

Per semplicità di calcolo, prendiamo come polo, su cui calcolare il momento angolare, l'origine O del sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z). In tale sistema di riferimento si ha:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + (\sum_i m_i \vec{r}_i') \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_i' + \vec{r}_{CM} \times (\sum_i m_i)\vec{v}_{CM}$$

A. Teorema di Konig per il momento angolare

Per semplicità di calcolo, prendiamo come polo, su cui calcolare il momento angolare, l'origine O del sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z). In tale sistema di riferimento si ha:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} =$$

$$= \boxed{\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'} + \left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right) \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_i' + \vec{r}_{CM} \times \left(\sum_i m_i\right) \vec{v}_{CM}$$

$\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' = \vec{L}'_{CM}$, ossia il momento angolare nel sistema di riferimento del centro di massa, prendendo come polo il centro di massa

A. Teorema di Konig per il momento angolare

Per semplicità di calcolo, prendiamo come polo, su cui calcolare il momento angolare, l'origine O del sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z). In tale sistema di riferimento si ha:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \boxed{(\sum_i m_i \vec{r}_i')} \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_i' + \vec{r}_{CM} \times (\sum_i m_i \;)\vec{v}_{CM}$$

$\sum_i m_i \vec{r}_i' = m_{Tot} \vec{r}_{CM}' = 0$ essendo $\vec{r}_{CM}' = 0$

A. Teorema di Konig per il momento angolare

Per semplicità di calcolo, prendiamo come polo, su cui calcolare il momento angolare, l'origine O del sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z). In tale sistema di riferimento si ha:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \Big(\sum_i m_i \vec{r}_i'\Big) \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \boxed{\sum_i m_i \vec{v}_i'} + \vec{r}_{CM} \times \Big(\sum_i m_i\Big) \vec{v}_{CM}$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_i' = m_{Tot} \vec{v}_{CM}' = 0 \text{ essendo } \vec{v}_{CM}' = 0$$

A. Teorema di Konig per il momento angolare

Per semplicità di calcolo, prendiamo come polo, su cui calcolare il momento angolare, l'origine O del sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z). In tale sistema di riferimento si ha:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} =$$

$$= \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right) \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_i' + \boxed{\vec{r}_{CM} \times \left(\sum_i m_i \right) \vec{v}_{CM}}$$

$\Sigma_i \vec{r}_{CM} \times (\Sigma_i m_{i_i}) \vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times m_{Tot} \vec{v}_{CM} = \vec{L}_o(CM)$ ossia il momento angolare nel sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z) del punto geometrico coincidente con il centro di massa, avendo fatto confluire su di esso la massa totale del sistema di *n* punti materiali

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i + (\sum_i m_i \vec{r}'_i) \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}'_i + \vec{r}_{CM} \times (\sum_i m_i \ ) \vec{v}_{CM}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}'_{CM} + \vec{L}_o(CM)}$$

Il momento angolare di un sistema di n punti materiali calcolato nel sistema di riferimento inerziale $\vec{L}_O$ risulta uguale alla somma del momento angolare nel sistema di riferimento del centro di massa avendo preso come polo il centro di massa $\vec{L}'_{CM}$ e del momento angolare nel sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z) del centro di massa, avendo fatto confluire su di esso la massa totale del sistema di n punti materiali.

B. Teorema di Konig per l’energia cinetica

L’energia cinetica totale di un sistema di *n* punti materiali, calcolata nel sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z) è data da:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \, v_i^2$$

B. Teorema di Konig per l'energia cinetica

L'energia cinetica totale di un sistema di n punti materiali, calcolata nel sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z) è data da:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, v_i^2$$

da cui:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_i' \vec{v}_{CM} =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + (\sum_i m_i \vec{v}_i')\vec{v}_{CM}$$

B. Teorema di Konig per l'energia cinetica

L'energia cinetica totale di un sistema di n punti materiali, calcolata nel sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z) è data da:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \, v_i^2$$

da cui:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \, v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_i' \vec{v}_{CM} =$$

$$= \boxed{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2} + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \left(\sum_i m_i \vec{v}_i'\right) \vec{v}_{CM}$$

$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = E_k'$, ossia l'energia cinetica totale calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa

B. Teorema di Konig per l'energia cinetica

L'energia cinetica totale di un sistema di n punti materiali, calcolata nel sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z) è data da:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, v_i^2$$

da cui:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_i' \vec{v}_{CM} =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \boxed{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2} + \left(\sum_i m_i \vec{v}_i'\right) \vec{v}_{CM}$$

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 = \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i\right) v_{CM}^2 = \frac{1}{2} m_{Tot} v_{CM}^2$$

B. Teorema di Konig per l’energia cinetica

L’energia cinetica totale di un sistema di n punti materiali, calcolata nel sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z) è data da:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, v_i^2$$

da cui:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_i' \vec{v}_{CM} =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \boxed{\left(\sum_i m_i \vec{v}_i'\right)} \vec{v}_{CM}$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_i' = m_{Tot} \vec{v}_{CM}' = 0 \text{ essendo } \vec{v}_{CM}' = 0$$

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \left(\sum_i m_i \vec{v}_i'\right) \vec{v}_{CM}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E_k = E_k' + \frac{1}{2} m_{Tot} v_{CM}^2}$$

L'energia cinetica totale di un sistema di n punti materiali calcolata in un sistema di riferimento inerziale è uguale alla somma dell'energia cinetica totale calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa e dell'energia cinetica del centro di massa nel sistema di riferimento inerziale, avendo fatto confluire sul CM la massa totale del sistema di n punti materiali.

Dall'insieme dei due teoremi di Konig si evince che:

rispetto al sistema di riferimento inerziale il moto di un sistema di n punti materiali può essere visto come somma del moto di tale sistema di n punti materiali rispetto al sistema di riferimento del centro di massa e del moto del centro di massa, visto come singolo punto materiale, nel sistema di riferimento inerziale

Dall'insieme dei due teoremi di Konig si evince che:
rispetto al sistema di riferimento inerziale il moto di un sistema di n punti materiali può essere visto come somma del moto di tale sistema di n punti materiali rispetto al sistema di riferimento del centro di massa e del moto del centro di massa, visto come singolo punto materiale, nel sistema di riferimento inerziale

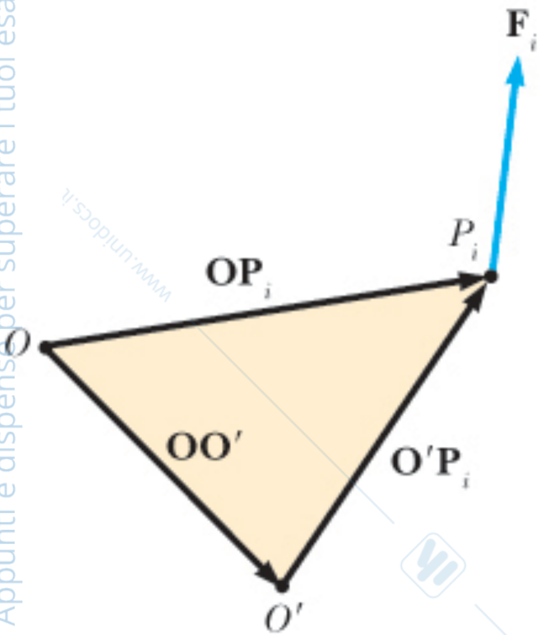
Per quanto riguarda la quantità di moto del sistema di *n* punti materiali, calcolato nel sistema di riferimento inerziale (O, x, y, z), esso risulta essere "solo"

$$\vec{P}_{Tot} = m_{Tot}\vec{v}_{CM}$$

ossia la quantità di moto del centro di massa nel sistema di riferimento inerziale, avendo fatto confluire sul CM la massa totale del sistema di n punti materiali, in quanto, come visto in precedenza, risulta sempre $\vec{P}' = 0$.

Proprietà dei sistemi di forze applicate ad un sistema di *n* punti materiali

Dato un sistema di riferimento inerziale, consideriamo un sistema formato da *n* punti materiali e indichiamo con $\vec{F}_i$ l'insieme delle forze applicate al punto i-esimo.



Il momento di tali forze rispetto ad un polo O risulta:

$$\vec{M}_{0,i} = \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i = \overrightarrow{OP}_i \times (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)})$$

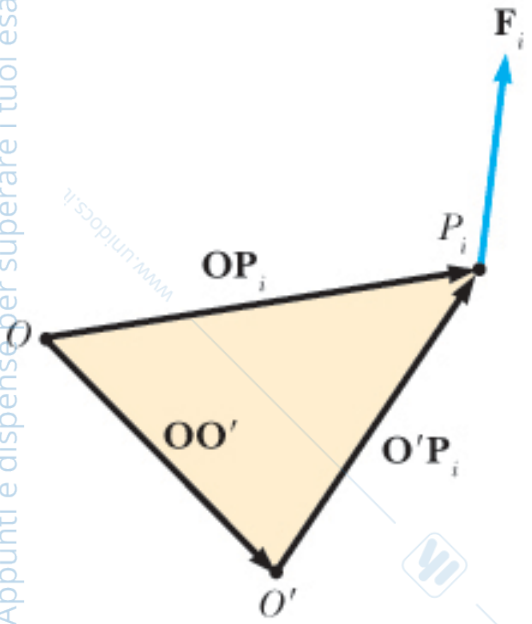
Il momento risultante delle forze rispetto al polo O risulta:

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{M}_{0,i} = \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}) = \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i^{(I)} = \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i^{(E)}$$

essendo $\sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i^{(I)} = 0$ come dimostrato in precedenza

Proprietà dei sistemi di forze applicate ad un sistema di *n* punti materiali

Dato un sistema di riferimento inerziale, consideriamo un sistema formato da *n* punti materiali e indichiamo con $\vec{F}_i$ l'insieme delle forze applicate al punto i-esimo.



Il momento di tali forze rispetto ad un polo O risulta:

$$\vec{M}_{0,i} = \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i = \overrightarrow{OP}_i \times (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)})$$

Il momento risultante delle forze rispetto al polo O risulta:

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{M}_{0,i} = \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}) = \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i^{(I)} = \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i^{(E)}$$

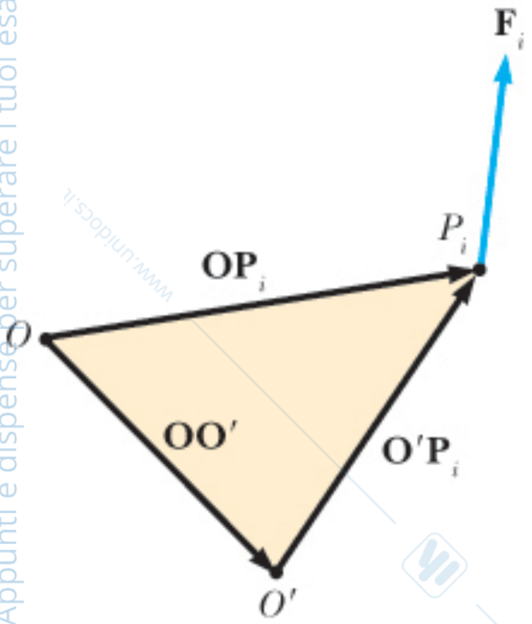
essendo $\sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i^{(I)} = 0$ come dimostrato in precedenza

Consideriamo ora un secondo polo O' e calcoliamo il momento risultante delle forze rispetto a tale polo:

$$\vec{M}_{0'} = \sum_i \vec{M}_{0',i} = \sum_i \overrightarrow{O'P}_i \times (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}) = \sum_i \overrightarrow{O'P}_i \times \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \overrightarrow{O'P}_i \times \vec{F}_i^{(I)} = \sum_i \overrightarrow{O'P}_i \times \vec{F}_i^{(E)}$$

Proprietà dei sistemi di forze applicate ad un sistema di *n* punti materiali

Dato un sistema di riferimento inerziale, consideriamo un sistema formato da *n* punti materiali e indichiamo con $\vec{F}_i$ l'insieme delle forze applicate al punto i-esimo.



Il momento di tali forze rispetto ad un polo O risulta:

$$\vec{M}_{0,i} = \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i = \overrightarrow{OP}_i \times (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)})$$

Il momento risultante delle forze rispetto al polo O risulta:

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{M}_{0,i} = \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}) = \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i^{(I)} = \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i^{(E)}$$

essendo $\sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i^{(I)} = 0$ come dimostrato in precedenza

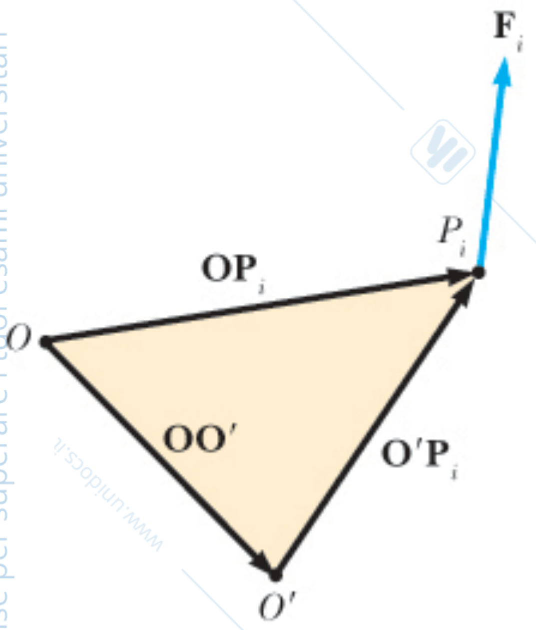
Consideriamo ora un secondo polo O' e calcoliamo il momento risultante delle forze rispetto a tale polo:

$$\vec{M}_{0'} = \sum_i \vec{M}_{0',i} = \sum_i \overrightarrow{O'P}_i \times (\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}) = \sum_i \overrightarrow{O'P}_i \times \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i \overrightarrow{O'P}_i \times \vec{F}_i^{(I)} = \sum_i \overrightarrow{O'P}_i \times \vec{F}_i^{(E)}$$

Sapendo che $\overrightarrow{OP}_i = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}_i$ allora si ha:

$$\vec{M}_0 = \sum_i \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i^{(E)} = \sum_i (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}_i) \times \vec{F}_i^{(E)} = \overrightarrow{OO'} \times \sum_i \vec{F}_i^{(E)} + \sum_i (\overrightarrow{O'P}_i \times \vec{F}_i^{(E)}) = \overrightarrow{OO'} \times \vec{R}^{(E)} + \vec{M}_{0'}$$

dove $\vec{R}^{(E)}$ rappresenta la risultante di tutte le forze esterne applicate al sistema di *n* punti materiali.



$$\vec{M}_0 = \overrightarrow{OO'} \times \vec{R}^{(E)} + \vec{M}_{0'}$$

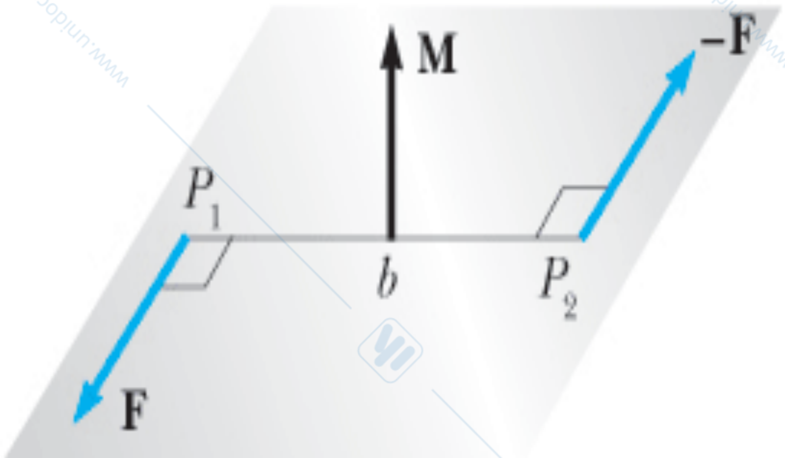
$$\Downarrow$$

In generale quindi il momento delle forze dipende dal polo scelto, a meno che $\vec{R}^{(E)} = 0$, in questo caso $\Rightarrow \vec{M}_0 = \vec{M}_{0'}$

Consideriamo come esempio una "coppia di forze":

$\Longrightarrow$ sistema formato da due forze uguali e di verso opposto aventi diversa retta di azione.

La distanza tra le due rette d'azione viene chiamata "braccio della coppia" e, normalmente indicata con la lettera b.

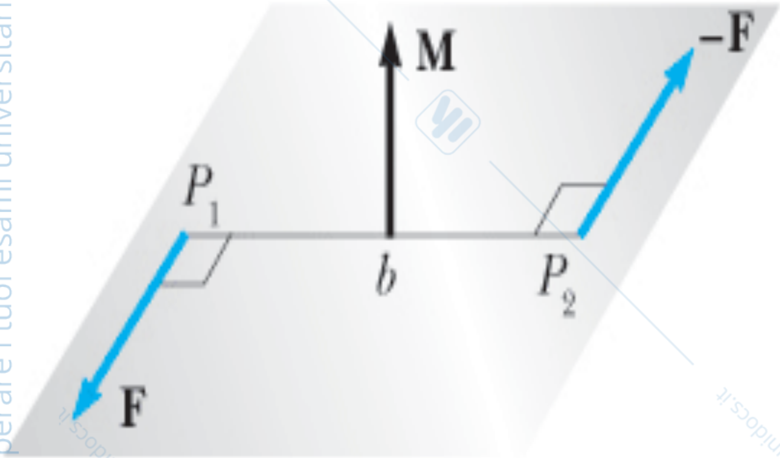


In questo caso $\vec{R}^{(E)} = 0$ e, di conseguenza,

$\Downarrow$

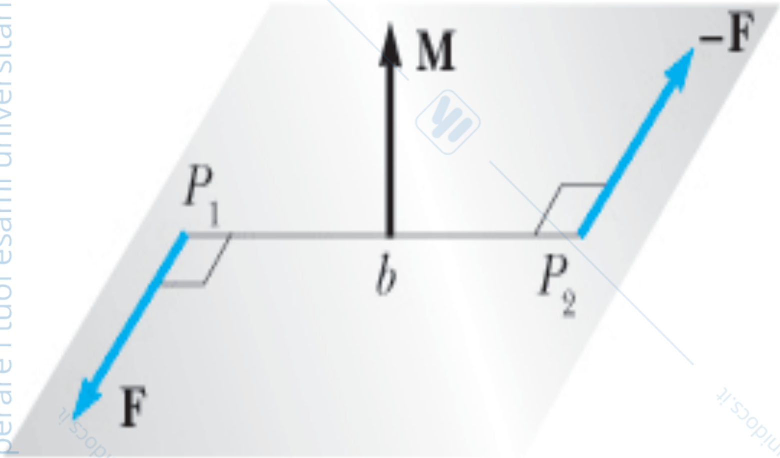
il momento della coppia di forze risulta indipendente dal polo scelto.

Proviamo a verificare tale risultato considerando tre diversi poli e determinando il momento della coppia di forze in corrispondenza di tali poli.



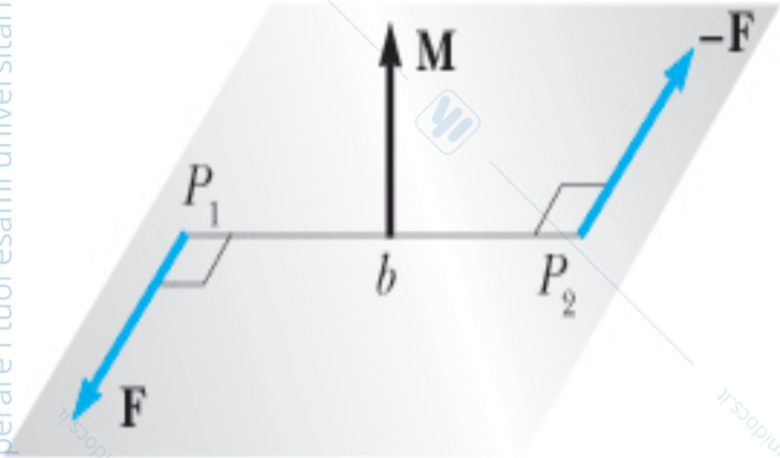
1) Polo coincidente con il punto P_1: $\vec{M}_{P_1} = \vec{b} \times (-\vec{F}) = b|F|\hat{u}_z$

avendo indicato con $\vec{b}$ il vettore che parte dal polo P_1 e va al punto di applicazione di $-\vec{F}$ e con $\hat{u}_z$ il versore perpendicolare al piano contenente la coppia di forze e rivolto verso l'alto



2) Polo coincidente con il punto P_2: $\vec{M}_{P2} = \vec{b} \times \vec{F} = b|F|\hat{u}_z$

avendo indicato con $\vec{b}$ il vettore che parte dal polo P_2 e va al punto di applicazione di $\vec{F}$ e con $\hat{u}_z$ il versore perpendicolare al piano contenente la coppia di forze e rivolto verso l'alto



3) Polo coincidente con il centro del braccio della coppia:

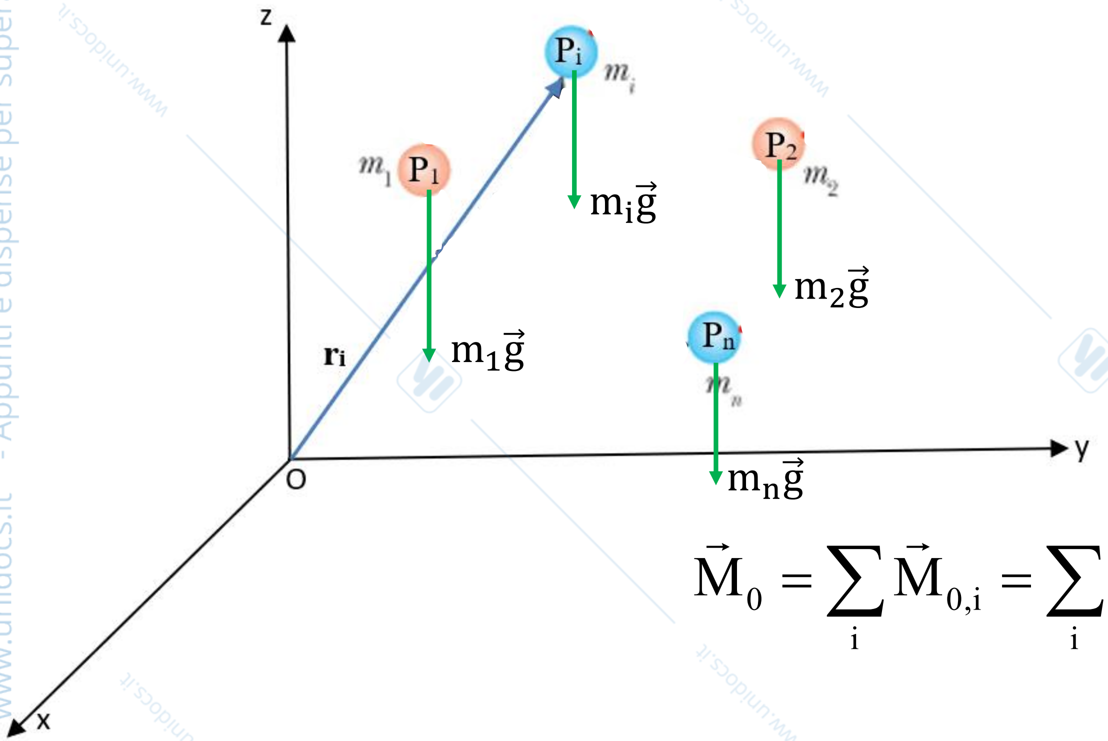
$$\vec{M}_{b/2} = \frac{\vec{b}}{2} \times \vec{F} + \left(-\frac{\vec{b}}{2} \right) \times \left(-\vec{F} \right) = \left(\frac{b}{2}|F| + \frac{b}{2}|F| \right) \hat{u}_z = b|F|\hat{u}_z$$

avendo indicato con $\frac{\vec{b}}{2}$ il vettore che parte dal centro del braccio della coppia e va verso il punto di applicazione di $\vec{F}$ e con $-\frac{\vec{b}}{2}$ il vettore che parte dal centro del braccio della coppia e va verso il punto di applicazione di $-\vec{F}$, e con $\hat{u}_z$ il versore perpendicolare al piano contenente la coppia di forze e rivolto verso l'alto

Sistema di forze parallele

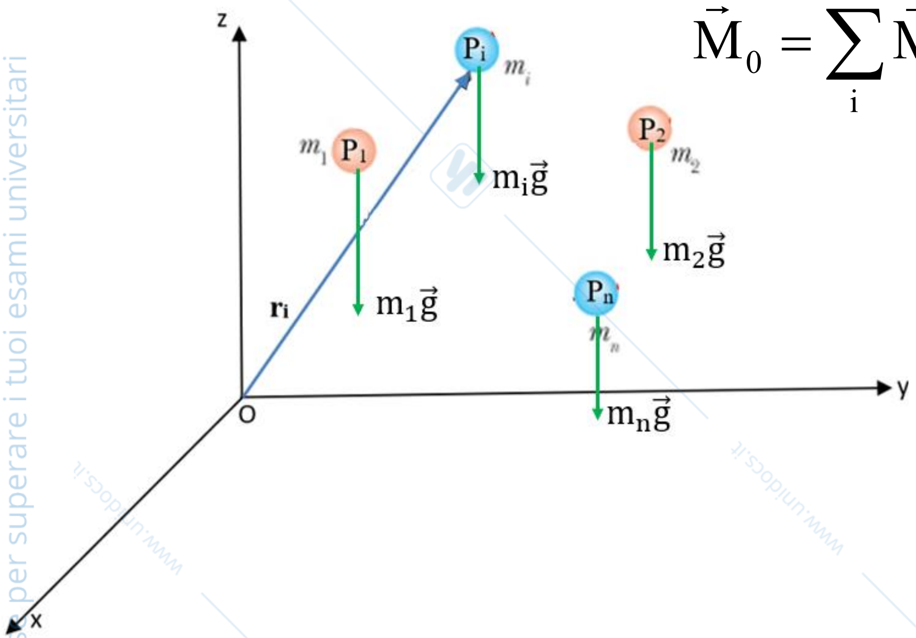
Dato un sistema di riferimento fisso inerziale (O, x, y, z), consideriamo un sistema di forze tra di loro parallele applicate ad un sistema di *n* punti materiali.

A titolo di esempio consideriamo il sistema di forze peso agenti su di un sistema di *n* punti materiali.



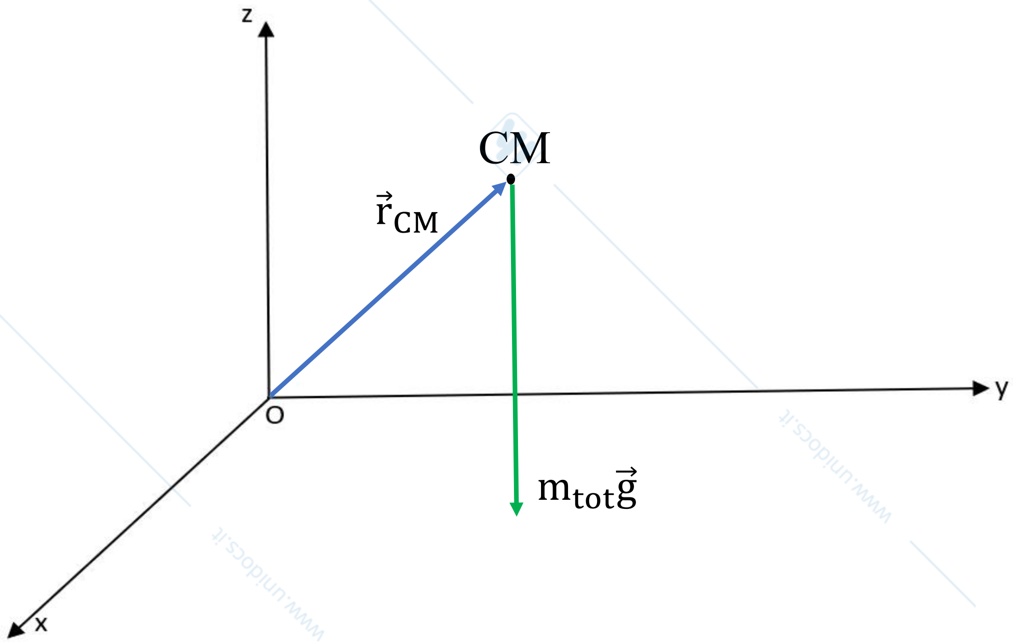
Prendiamo come polo su cui calcolare i momenti delle forze, il centro O del sistema di riferimento fisso e inerziale (O, x, y, z):

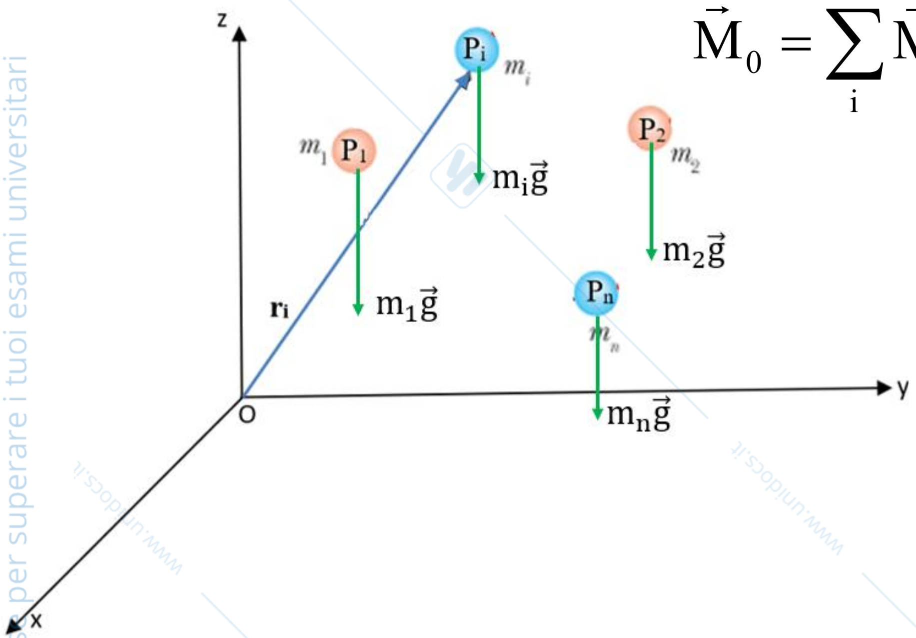
$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{M}_{0,i} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} = m_{tot} \vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times m_{tot} \vec{g}$$



$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{M}_{0,i} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = \left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right) \times \vec{g} = m_{tot}\vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times m_{tot}\vec{g}$$

Il momento ottenuto è uguale a quello che otterremmo considerando di applicare al centro di massa (CM) del sistema di *n* punti materiali la risultante di tutte le forze peso $\Rightarrow \vec{R} = \sum_i m_i\vec{g} = m_{tot}\vec{g}$



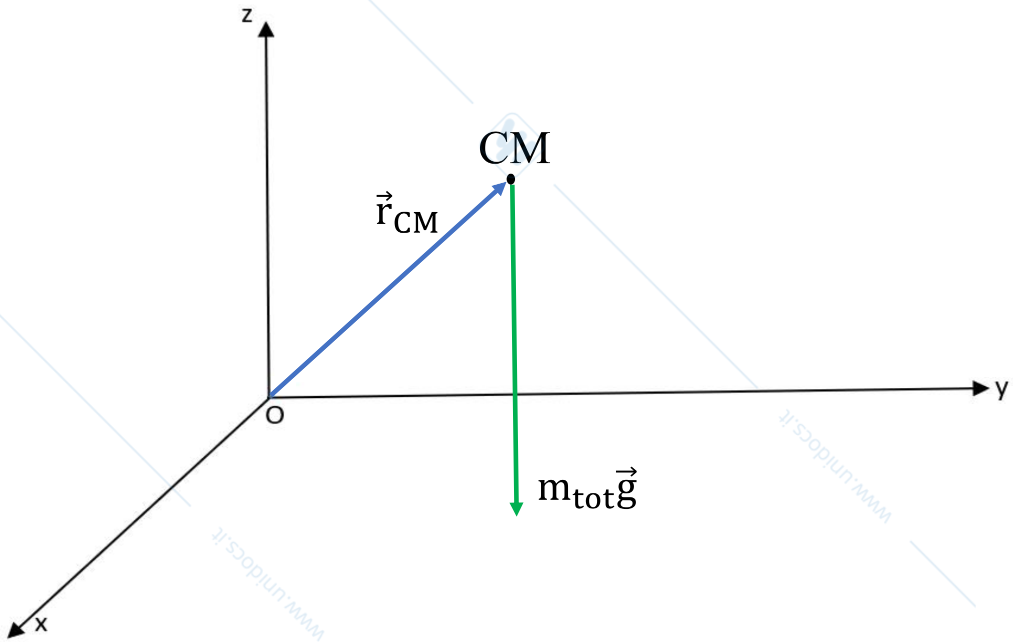


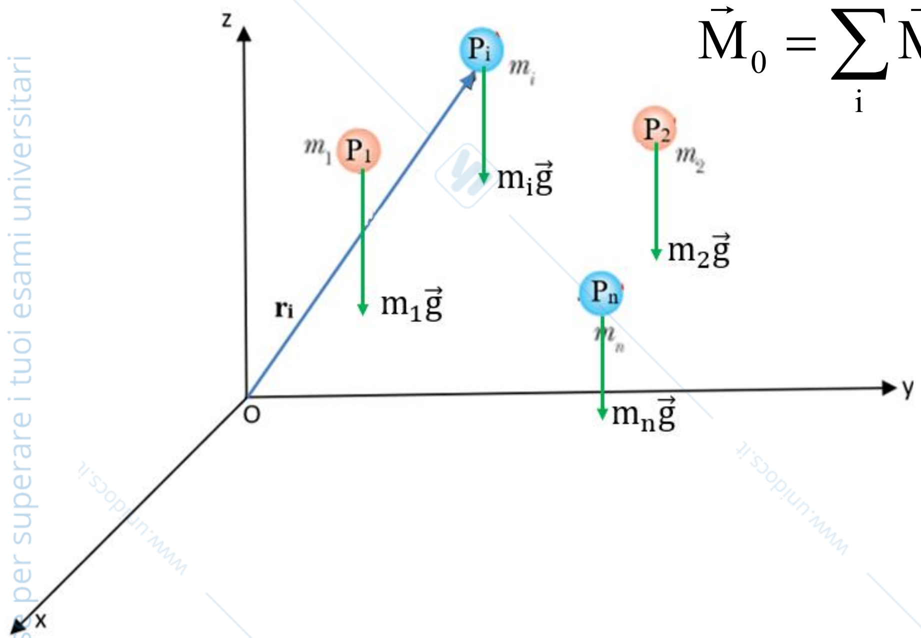
$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{M}_{0,i} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = \left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right) \times \vec{g} = m_{tot}\vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times m_{tot}\vec{g}$$

Il momento ottenuto è uguale a quello che otterremmo considerando di applicare al centro di massa (CM) del sistema di *n* punti materiali la risultante di tutte le forze peso $\Rightarrow \vec{R} = \sum_i m_i\vec{g} = m_{tot}\vec{g}$

Il centro delle forze peso, detto anche centro di gravità o baricentro, coincide con il centro di massa.

N.B. per poter considerare le forze peso parallele tra loro, l'estensione del sistema di *n* punti materiali non deve essere molto grande, in modo da trascurare la curvatura della Terra.

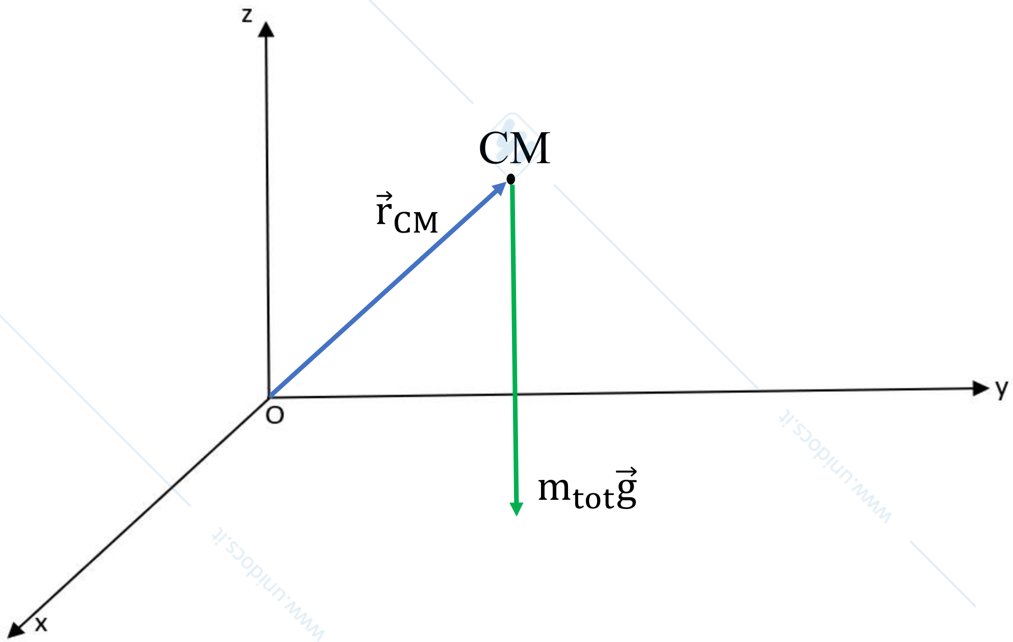




$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{M}_{0,i} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{g} = \left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right) \times \vec{g} = m_{tot}\vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times m_{tot}\vec{g}$$

Il momento ottenuto è uguale a quello che otterremmo considerando di applicare al centro di massa (CM) del sistema di n punti materiali la risultante di tutte le forze peso $\Rightarrow \vec{R} = \sum_i m_i\vec{g} = m_{tot}\vec{g}$

Il sistema di forze parallele può quindi essere ridotto ad una sola forza, pari alla somma di tutte le forze parallele, applicata in un unico punto. Nel caso delle forze peso esso coincide con il centro di massa (CM) del sistema di n punti materiali



Massa variabile

Esempi di oggetti a massa variabile sono: un veicolo in moto o un missile in volo che consumano entrambi carburante, un nastro trasportatore su cui vengono caricati (o scaricati) dei corpi, …
La seconda legge di Newton risulta:

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}$$

Se il moto avviene con $\vec{v}$ costante:

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}=\vec{v}\frac{dm}{dt}$$

ossia affinchè il moto sia caratterizzato da $\vec{v}$ costante è necessaria una forza in quanto varia la massa.