Politecnico di Milano – Scuola di Ingegneria dell'Informazione

8/7/2011
ore 16:30

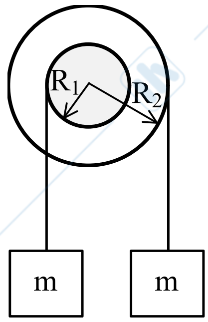
FISICA (preappello)

Proff. Ciucci, Della Valle, Magni, Nisoli, Torricelli

1)
Il vettore posizione di un punto materiale è dato dall'equazione $\mathbf{r} = A\cos(B\,t)\,\mathbf{u}_x + C\,t\,\mathbf{u}_y$. Si determinino:
a) le dimensioni delle grandezze fisiche A, B e C nel Sistema Internazionale;
b) gli istanti nei quali l'accelerazione del punto è ortogonale alla *traiettoria.*

2)
a) Si enunci il teorema dell'energia cinetica.
b) Un corpo puntiforme di massa *m* striscia su un piano orizzontale scabro, collegato tramite una fune ideale ad un punto fisso appartenente al piano. Si determini il coefficiente di attrito dinamico del piano sapendo che in un giro la tensione della fune diminuisce da T_0 a T_1.

3)
a) Si definisca il momento d'inerzia.
b) Una carrucola è costituita da due dischi di raggi R_1 ed R_2 fissati ad uno stesso asse orizzontale. Sui due dischi sono avvolte due funi ideali le cui estremità sono fissate a due corpi di massa *m*. Trascurando ogni forma di attrito, si calcoli l'accelerazione angolare della carrucola e la tensione delle due funi. Si consideri noto il momento di inerzia *I* della carrucola rispetto all'asse di rotazione.



4)
a) Si definisca il lavoro termodinamico.
b) Un cilindro adiabatico, chiuso da un pistone di peso trascurabile che può scorrere senza attrito, contiene un gas ideale biatomico. Inizialmente il gas è a temperatura $T_i = 350$ K ed il sistema è in equilibrio con la pressione esterna. Molto rapidamente la pressione esterna viene raddoppiata ed il sistema raggiunge un nuovo stato di equilibrio. Si calcoli la temperatura finale del gas T_f.

5)
a) Si enunci il teorema (disuguaglianza) di Clausius
b) Si dimostri che l'entropia è una funzione di stato.

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

1.a)

$$\vec{r} = A\cos(Bt)\hat{u}_x + Ct\,\hat{u}_y$$

$$[A] = [\vec{r}] = [L]$$

$$[Ct] = [\vec{r}] = [L] \Rightarrow [C] = [L][T]^{-1}$$

$$[Bt] = [1] \Rightarrow [B] = [T]^{-1}$$

1.b)

La traiettoria ha la direzione locale del vettore velocità quindi per determinare l'istante in cui $\vec{a}$ è ortogonale alla traiettoria imponiamo che sia

$$\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$$

$$\vec{v}(t) \triangleq \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = -AB\sin(Bt)\hat{u}_x + C\hat{u}_y$$

$$\vec{a}(t) \triangleq \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = -AB^2\cos(Bt)\hat{u}_x$$

$$\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = A^2B^3\sin(Bt)\cos(Bt) = 0$$

$$\sin(Bt)\cos(Bt) = \frac{1}{2}\sin(2Bt) = 0$$

$$2Bt = n\pi \quad \text{con } n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$t = n\frac{\pi}{2B} \quad \text{con } n = 0, 1, 2 \ldots$$

2.a)

Per un singolo punto materiale, il teorema della energia cinetica (o delle forze vive) afferma che la variazione di energia cinetica è pari al lavoro di tutte le forze agenti sul punto materiale:

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \mathcal{L}_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

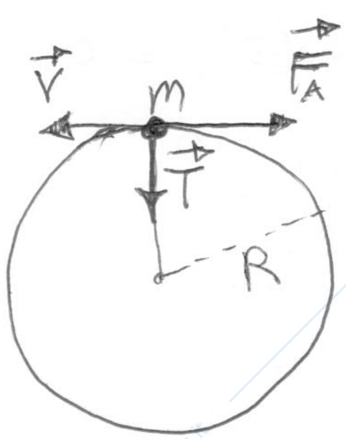
ove A e B sono i due istanti di tempo considerati e l'energia cinetica è data dalla espressione $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

Per un sistema di punti materiali tale risultato si generalizza come segue:

$$\Delta E_c = \mathcal{L}^{tot}_{A \to B}$$

con $E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$, $\mathcal{L}^{tot}_{A \to B}$ lavoro totale di tutte le forze agenti (interne ed esterne).

2.b)



Forze agenti nel piano:

$\vec{F}_A$ forza di attrito dinamico

$\vec{T}$ tensione dinamica della fune (vincolo ideale)

$$\vec{F}_A = -\mu_d m g \hat{u}_T$$

$\hat{u}_T$ versore tangenziale

Poichè la fune è ideale il moto è circolare (la fune non si allunga), ed avviene con accelerazione normale $\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$

Equazione del moto lungo la direzione normale:

$$\vec{T} = m\,\vec{a}_N = \frac{mv^2}{R}\hat{u}_N$$

Durante il moto il sistema viene rallentato dalla forza di attrito ed in base al teorema dell'energia cinetica dopo un giro esso perde una energia pari (a meno del segno) al lavoro della forza di attrito in un giro (fune di lunghezza R). Quindi, dette v_0 e v_1 le velocità (in modulo) quando la tensione della fune vale rispettivamente T_0 e T_1, avremo:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -2\pi R\mu_d mg = \mathcal{L}_{Attrito}$$

ma $T_0 = \frac{mv_0^2}{R}$ e $T_1 = \frac{mv_1^2}{R}$, da cui

$$\frac{1}{2}\cancel{R}T_1 - \frac{1}{2}\cancel{R}T_0 = -2\pi\cancel{R}\mu_d mg$$

$$\mu_d = \frac{T_0 - T_1}{4\pi mg}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

3.a

Per una distribuzione discreta di masse (puntiformi) definiamo momento d'inerzia (del sistema di punti materiali) rispetto allo asse A (fisso):

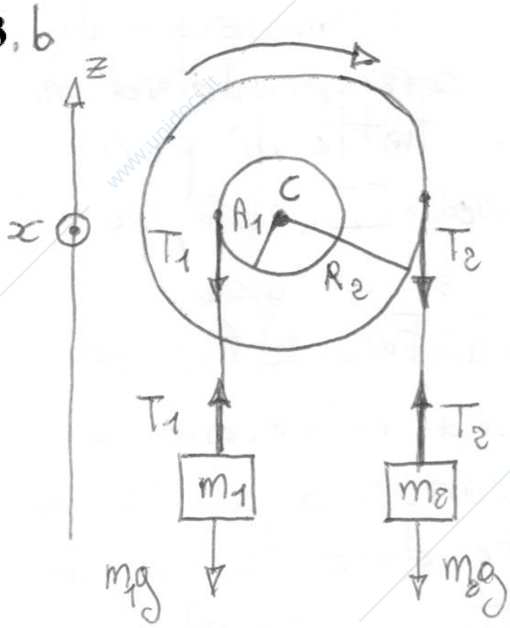
$$I_A = \sum_{i=1}^{N} m_i d_i^2$$

essendo m_i l'i-esima massa puntiforme (massa dell'i-esimo punto materiale) e d_i la sua distanza dall'asse A.
Nel caso di una distribuzione continua di massa (corpi non puntiformi) la precedente definizione si generalizza come segue:

$$I_A = \int_V dm(\vec{r})\, d^2(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r})\, d^2(\vec{r})\, dV$$

essendo $\rho(\vec{r})$ la densità (locale) nell'intorno di volume infinitesimo dV della posizione $\vec{r}$ e $d(\vec{r})$ la distanza di tale intorno dall'asse A.

3.b



Assumiamo positive le rotazioni nel verso indicato dalla freccia. Questo significa che, preso un asse verticale z come in figura, le accelerazioni delle due masse saranno rispettivamente

$$\vec{a}_1 = a_1 \hat{u}_z \,, \quad \vec{a}_2 = -a_2 \hat{u}_z$$

con $a_1, a_2 > 0$

Il sistema è costituito di tre corpi: le due masse m_1 e m_2, assunte punti materiali, che possono compiere solo moti traslazionali in direzione verticale z; la carrucola, corpo rigido, che, essendo vincolata nel suo baricentro, C, può compiere solo rotazioni intorno all'asse baricentrico ortogonale al piano delle due masse (piano del disegno).

Equazioni del moto:

m_1: $T_1 \cancel{\hat{u}_z} - m_1 g \cancel{\hat{u}_z} = m_1 a_1 \cancel{\hat{u}_z}$ ⟸ [I eq. cardinale o II principio della dinamica p.to materiale)

m_2: $T_2 \cancel{\hat{u}_z} - m_2 g \cancel{\hat{u}_z} = -m_2 a_2 \cancel{\hat{u}_z}$

carr: $T_2 R_2 - T_1 R_1 = I \alpha$ ⟸ [II eq. cardinale della dinamica per il corpo rigido

$m_1 = m_2 = m$

$$\begin{cases} T_1 - mg = m a_1 \\ T_2 - mg = -m a_2 \\ T_2 R_2 - T_1 R_1 = I \alpha \end{cases}$$

3 equazioni in 5 incognite $T_1, T_2, a_1, a_2, \alpha$

Vincoli cinematici:

Poichè le funi sono inestensibili, una traslazione di un tratto dz delle due masse corrisponde ad uno svolgimento/avvolgimento di un tratto di pari lunghezza per la rispettiva fune. Inoltre, poichè ciascuna fune si avvolge/svolge su un disco di diverso raggio, R_1 per la prima fune e R_2 per la seconda, è chiaro che ad una rotazione di un angolo $d\vartheta$ da parte della carrucola corrisponde un avvolgimento/svolgimento delle funi di un tratto $R_1 d\vartheta$ ed $R_2 d\vartheta$ rispettivamente. Riunendo le due osservazioni precedenti troviamo quindi:

$dz_1 = R_1 d\vartheta$, $dz_2 = -R_2 d\vartheta$

Derivando due volte rispetto al tempo e ricordando che $a_1 = d^2z_1/dt^2$, $a_2 = -d^2z_2/dt^2$, $\alpha = d^2\vartheta/dt^2$ si trovano i vincoli cinematici:

$a_1 = R_1\alpha$, $a_2 = R_2\alpha$

Il precedente sistema di equazioni diviene quindi

$$\begin{cases} T_1 - mg = mR_1\alpha \\ T_2 - mg = -mR_2\alpha \\ T_2R_2 - T_1R_1 = I\alpha \end{cases}$$

3 equazioni in 3 incognite T_1, T_2, α

Esprimendo T_1 e T_2 dalle prime due equazioni in funzione di α e sostituendo nella terza equazione troviamo:

$$m(g - mR_2\alpha)R_2 - m(g + R_1\alpha)R_1 = I\alpha$$

da cui $\alpha = \dfrac{mg(R_2 - R_1)}{I + m(R_1^2 + R_2^2)}$

Risostituito nelle prime due forinsce:

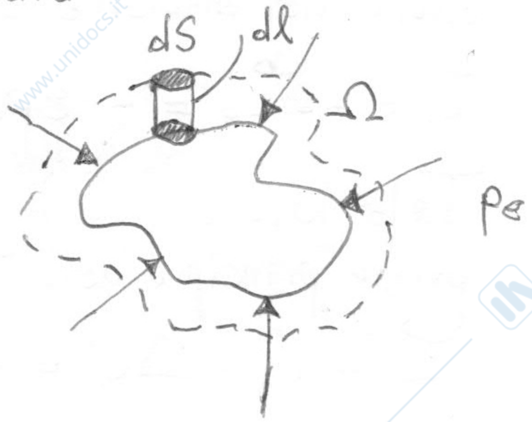
$$T_1 = m(g + R_1\alpha) = \left(\frac{I + mR_1R_2 + mR_2^2}{I + mR_1^2 + mR_2^2}\right)mg$$

$$T_2 = m(g - R_2\alpha) = \left(\frac{I + mR_1R_2 + mR_1^2}{I + mR_1^2 + mR_2^2}\right)mg$$

3.a

Il lavoro termodinamico corrisponde al lavoro meccanico relativo agli spostamenti coerenti delle parti microscopiche costituenti il sistema.
Tali spostamenti danno origine ad una variazione del volume del sistema stesso attraverso uno spostamento della sua frontiera.
Se rappresentiamo le forze agenti sul sistema attraverso la pressione esercitata dall'ambiente esterno sulla frontiera Ω del sistema stesso (ipotesi di sistema idrostatico), il lavoro subito dal sistema sarà

$$\delta L_e = \int_\Omega p_e \, dS \, dl =$$



$$= -p_e \, dV$$

essendo $dV \triangleq -\int_\Omega dS \, dl$

Il lavoro compiuto dal sistema sarà dunque $\delta L = -\delta L_e$, quindi $\delta L = p_e \, dV$.
In una trasformazione quasi-statica dovrà inoltre essere $p_e \, dS - p \, dS = 0$, indicando con p la pressione interna, del sistema! Abbiamo perciò per una trasformazione quasistatica di un sistema idrostatico:

$$\delta L = p \, dV$$

3.b

$p_i = p_e$
$T_i = 350\,K$
$V_i = nRT_i/p_e$

$p_F = 2p_e$
$T_F = ?$
$V_F = nRT_F/2p_e$

La trasformazione è irreversibile poiché non quasi-statica (in un tempo molto breve, si dice, la pressione esterna raddoppia, quindi il sistema non può essere in equilibrio durante la trasformazione, se non nello stato finale), quindi il lavoro compiuto dal sistema è determinabile dal lavoro dell'ambiente esterno:

$$\mathcal{L} = -\mathcal{L}_e = -2p_e(V_i - V_F) = 2p_e(V_F - V_i) \quad (1)$$

Tale lavoro può anche essere determinato dal primo principio della Termodinamica:

$$\mathcal{L} = Q - \Delta U = -\Delta U \quad (Q=0,\ \text{trasf. adiabatica})$$

Poiché U è funzione di stato e per un gas ideale vale $dU = nc_v\,dT$, con $c_v = \frac{5}{2}R$ per gas perfetto biatomico, abbiamo

$$\mathcal{L} = -n\frac{5}{2}R(T_F - T_i) \quad (2)$$

Riunendo le due equazioni (1) e (2) abbiamo

$$2p_e(V_F - V_i) = n\frac{5}{2}R(T_i - T_F)$$

$$\cancel{2p_e}\left(\frac{\cancel{n}\cancel{R}T_F}{\cancel{2p_e}} - \frac{2\cancel{n}\cancel{R}T_i}{\cancel{2p_e}}\right) = \cancel{n}\frac{5}{2}\cancel{R}(T_i - T_F)$$

Troviamo infine

$$T_F - 2T_i = \frac{5}{2}T_i - \frac{5}{2}T_F$$

da cui $\frac{7}{2}T_F = \frac{9}{2}T_i \Rightarrow T_F = \frac{9}{7}T_i = 450\,K$

5.a

In una trasformazione ciclica di un sistema termodinamico, la somma dei rapporti tra le quantità di calore scambiate con le sorgenti e le temperature delle sorgenti stesse è minore o uguale a zero, valendo la uguaglianza per trasformazioni cicliche reversibili:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \le 0$$

5.b

Consideriamo due stati di equilibrio termodinamico A e B di un sistema termodinamico, e consideriamo due trasformazioni reversibili qualsiasi da A e B, Γ_1 e Γ_2.

Poichè Γ_2 è reversibile esiste la trasf. inversa Γ_2 che porta B in A ripercorrendo a ritroso gli stati intermedi occupati nella trasf. diretta.
La trasformazione $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ è dunque una trasformazione ciclica reversibile. Applicando ad

essa la disuguaglianza di Clausius troviamo:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Il primo membro è però scomponibile come segue:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\delta Q}{T} = \int_{A,\Gamma_1}^{B} \frac{\delta Q}{T} + \int_{B,\Gamma_2^{-1}}^{A} \frac{\delta Q}{T} =$$

$$= \int_{A,\Gamma_1}^{B} \frac{\delta Q}{T} - \int_{A,\Gamma_2}^{B} \frac{\delta Q}{T}$$

Troviamo quindi

$$\int_{A,\Gamma_1}^{B} \frac{\delta Q}{T} = \int_{A,\Gamma_2}^{B} \frac{\delta Q}{T}$$

Per la arbitrarietà delle trasformazioni reversibili Γ_1 e Γ_2 concludiamo che

$\int_{A}^{B} \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{REV}$ non dipende dalla trasformazione reversibile considerata, ma solo dagli estremi A e B.

Tale integrale quindi deve corrispondere alla variazione di una funzione di stato, detta entropia:

$$\Delta S_{AB} = \int_{A}^{B} \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{REV}$$