



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

DIEF

DIPARTIMENTO DI
INGEGNERIA INDUSTRIALE

UNIVERSITÀ' DEGLI STUDI DI FIRENZE

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di laurea magistrale in Ingegneria Energetica

FLUIDODINAMICA NUMERICA PER APPLICAZIONI INDUSTRIALI

Prof. Andreini Antonio

Prof. Pacciani Roberto

Rossi Giulio

Matricola 7135574

Anno accademico 2023/24

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



1. Computational Fluid Dynamics (CFD)

La **CFD**, o Computational Fluid Dynamics, è una metodologia avanzata che utilizza il calcolo numerico e algoritmi computazionali per analizzare e risolvere problemi legati alla fluidodinamica. Questa pratica si avvale di software specializzati per simulare il comportamento dei fluidi all'interno di vari contesti ingegneristici. Il primo passo nel processo di CFD consiste nell'identificare il **dominio di calcolo**, ovvero l'area di interesse che si desidera esaminare. Tale dominio varia in base all'applicazione specifica e alla scala di analisi prescelta, analogamente alla definizione di un volume di controllo in un'analisi teorica. Una volta definito il dominio, si procede con la sua **discretizzazione**, suddividendolo in numerosi volumi elementari, potenzialmente fino a milioni o decine di milioni di sottodomini. Questa fase è cruciale poiché trasforma il dominio da una regione spaziale continua, in cui le proprietà del flusso e le variabili fluidodinamiche variano in modo continuo, in una serie di elementi discreti. In questo modo, è possibile assegnare valori specifici alle proprietà del flusso per ogni sottovolume, facilitando l'analisi computazionale e permettendo di prevedere il comportamento dei fluidi con maggiore precisione. Segue l'assegnazione di valori iniziali arbitrari alle proprietà del flusso per ogni elemento discretizzato del dominio di calcolo. Questa fase, nota come **inizializzazione**, è cruciale per preparare il terreno per le iterazioni successive. Per ciascun elemento, definiamo parametri come **velocità**, **pressione** e **densità**. Successivamente, esaminiamo come questa distribuzione iniziale si conformi alle **equazioni fondamentali** che governano il problema in esame, come le **leggi di conservazione della massa**, della **quantità di moto**, del **momento angolare** e dell'**energia**. È prevedibile che in questa fase iniziale si manifestino discrepanze significative, poiché i valori sono stati scelti senza un criterio preciso. Pertanto, è essenziale impiegare un **algoritmo** (schema di calcolo) che sistematicamente aggiusti i valori delle proprietà per ogni elemento, affinché le equazioni fondamentali siano soddisfatte entro un margine di errore accettabile, stabilito secondo criteri specifici.

Possono essere individuati una serie di step di cui si compone la risoluzione attraverso la CFD di un problema fluidodinamico:

- Identificare la regione di spazio che si vuole studiare, il **dominio di calcolo** (continuo)
- **Discretizzazione** del dominio: suddivisione del dominio in sottodomini (celle, elementi, ecc.). Si effettua quindi un passaggio da un dominio continuo ad un dominio discretizzato; in questo step devono essere fatte delle scelte: livello di discretizzazione (numero di sottodomini), tipologia di discretizzazione (tipologia di elementi). Generalmente ci si avvale di generatori di griglia, ovvero software che, data la geometria del dominio di calcolo, la suddividono in elementi configurabili dall'utente in termini di forma, dimensione e quantità, seguendo criteri prestabiliti.
- **Discretizzazione delle equazioni di governo**: passaggio da una formulazione integrale adatta ad un dominio continuo ad una formulazione differenziale e quindi algebrica adatta ad un dominio discretizzato.
- Scelta del **modello matematico** adeguato al problema da risolvere: deve essere scelto il miglior modello delle equazioni di governo che meglio approssima il fenomeno fisico che si vuole investigare; tale scelta sarà dettata dal raggiungimento del miglior compromesso tra costo computazionale e accuratezza.
- **Inizializzazione**: assegnare a ciascun elemento un valore arbitrario delle proprietà del flusso (discretizzazione delle proprietà del flusso); anche in questo step deve essere fatta una scelta sul tipo di inizializzazione.
- Stima di quanto l'inizializzazione soddisfi le equazioni di governo in ogni elemento.
- Utilizzo di un algoritmo tale che possa **correggere** in modo iterativo la non equivalenza tra valori associati agli elementi ed equazioni di governo; anche in questo caso è necessario scegliere tra diverse tipologie di algoritmi.

Inoltre, è essenziale avere a disposizione anche un **sistema di post-processing** per interpretare i dati ottenuti e derivarne valori utilizzabili in ambito ingegneristico. È fondamentale anche determinare la soluzione ottimale da adottare. La CFD si rivela preziosa per confrontare relativamente due o più soluzioni, al fine di individuare la migliore soluzione numerica.

La fluidodinamica computazionale (CFD) presenta affinità e differenze significative rispetto ai metodi computazionali applicati in meccanica. Sebbene entrambi i campi utilizzino la discretizzazione e condividano alcuni approcci numerici, come il metodo degli elementi finiti per problemi strutturali, la CFD si distingue per complessità e sfide uniche. Queste peculiarità richiedono una profonda comprensione dei principi fondamentali della CFD per sviluppare algoritmi di calcolo efficaci. Per esempio, le **equazioni di Navier-Stokes**, fondamentali in CFD, descrivono il trasporto della quantità di moto attraverso due meccanismi:

- la **convezione**, che dipende dalla velocità del flusso fluido;
- la **diffusione**, associata agli sforzi di taglio e alla viscosità, che agisce in tutte le direzioni.

Mentre la gestione numerica dei termini diffusivi, che implicano derivate seconde, è relativamente semplice, trattare i termini convettivi, con le loro derivate prime, rappresenta una sfida maggiore a causa della loro natura direzionale e del potenziale per instabilità numeriche.

Uno dei principali ostacoli nella fluidodinamica, e in particolare nella fluidodinamica computazionale, è il **trattamento della turbolenza**. Questo fenomeno può essere affrontato seguendo due filosofie distinte.

- La prima, e più tradizionale, si basa sull'utilizzo delle **equazioni di Navier-Stokes mediate alla Reynolds**, che richiedono l'impiego di un modello di turbolenza per la modellazione dei termini turbolenti. Questo metodo è alla base dei processi di progettazione attuali e continua ad essere ampiamente utilizzato.
- In alternativa, esiste un approccio che non modella la turbolenza, ma cerca di risolverla numericamente. Questo metodo prevede la **risoluzione di tutte le scale di moto** presenti nel flusso attraverso una **simulazione numerica diretta** (DNS), che utilizza le equazioni di governo in forma non stazionaria. Infine, per risolvere le scale di moto più grandi, si può ricorrere alla **simulazione LES** (Large Eddy Simulation) che stabilisce una soglia arbitraria. Ovvero, le scale superiori a questa soglia vengono risolte direttamente, mentre quelle inferiori vengono modellate. Rispetto ad una DNS però, con una LES, non si potrà che perdere in accuratezza.

La gestione della turbolenza rappresenta da sempre una delle sfide più significative e persiste come tale. Sebbene si siano compiuti progressi notevoli, la ricerca di un modello di turbolenza che sia al contempo preciso e universale rimane un obiettivo ancora non raggiunto.

Un aspetto cruciale nell'analisi CFD è comprendere le ragioni delle diverse prestazioni offerte da varie soluzioni. È essenziale determinare se i calcoli CFD sono stati eseguiti correttamente, assicurandosi che tutte le strutture siano state risolte in modo soddisfacente. Per questo, l'utilizzo di software di visualizzazione che fornisca contorni e isole dettagliati è indispensabile per interpretare e analizzare i risultati ottenuti. La CFD mira a modellare il comportamento dei fluidi in movimento utilizzando equazioni differenziali. Questo processo richiede la conversione delle equazioni di governo da una forma differenziale analitica a un sistema di equazioni algebriche, che può essere realizzato attraverso la discretizzazione. Successivamente, si procede alla risoluzione del sistema algebrico risultante mediante algoritmi specifici. È fondamentale selezionare l'approccio fisico-matematico più adatto per rappresentare accuratamente i fenomeni che influenzano il campo di moto. La scelta delle equazioni di governo è quindi un compromesso tra il livello di accuratezza desiderato e il costo computazionale. A seconda della geometria specifica del problema, si possono adottare diversi sistemi di coordinate, come quelle cartesiane, cilindriche o sferiche. Le condizioni iniziali rivestono un'importanza significativa, poiché definiscono le condizioni fisiche da applicare al contorno del dominio di calcolo e sono cruciali anche per le modalità di implementazione. In conclusione, l'analisi numerica delle equazioni differenziali che governano i fluidi in movimento è cruciale nella progettazione di sistemi in cui i fluidi interagiscono. Un altro aspetto vitale della CFD è l'eliminazione della fase di costruzione e test (**Build&Test**), permettendo di superare il ciclo di creazione e sperimentazione dei prototipi per ottenere dati utili al raggiungimento di una soluzione ottimale. Prima dell'avvento di computer avanzati capaci di eseguire la CFD, il metodo Build&Test era indispensabile, nonostante i suoi notevoli svantaggi in termini di costi e l'esperienza richiesta per interpretare i risultati dei test sui prototipi. La CFD, invece, fornisce informazioni più chiare e direttamente applicabili in ingegneria. Un ulteriore aspetto interessante della CFD è la capacità di analizzare fenomeni fluidodinamici difficilmente riproducibili sperimentalmente. Infatti, la CFD elimina

l'**effetto scala**, consentendo simulazioni in dimensioni reali senza la necessità di ridimensionare l'oggetto o il fenomeno in studio.

L'applicazione della CFD riveste un ruolo fondamentale nel settore navale, specialmente per le imbarcazioni a vela. In questo ambito, la CFD permette di analizzare l'interazione tra lo scafo e l'acqua, considerando sia la parte immersa che quella esposta alla resistenza delle onde. Questa tecnologia è altresì cruciale nella progettazione delle turbomacchine, dove influisce non solo sulla performance aerodinamica, ma anche sugli scambi termici e sulle interazioni tra i flussi fluidi e le discipline dell'aerocustica e dell'aeromeccanica.

Discutendo i benefici della CFD, si può citare il confronto tra due modelli del Boeing 747. Il modello 747-100, lanciato nel gennaio 1970, aveva una capacità di 366 passeggeri distribuiti su tre classi, un'autonomia di 4.300 miglia, una spinta di 186.000 libbre, un serbatoio da 48.445 galloni e un peso massimo al decollo di 735.000 libbre. Al contrario, l'ultima versione del 747, introdotta nel 2009, ha incrementato la capacità a 466 passeggeri e quasi raddoppiato l'autonomia a 8.000 miglia. La spinta è aumentata a 266.000 libbre, con un serbatoio da 60.125 galloni di carburante e un peso massimo al decollo di 970.000 libbre. In sintesi, si è ottenuto un aumento del 26% nella capacità passeggeri e un incremento dell'86% nell'autonomia, con solo un 24% in più di consumo di carburante. Questi miglioramenti sono stati resi possibili grazie a una nuova configurazione alare, progettata con la CFD, che include un aumento del 15% nella lunghezza dell'ala, uno spessore maggiore alla radice e l'introduzione di un nuovo motore, il G-NEX di General Electric, anch'esso sviluppato con l'ausilio della CFD.

Le **equazioni di Navier-Stokes** rappresentano il fulcro dell'approccio della CFD e sono ampiamente riconosciute per la loro importanza. Introdotti nell'Ottocento, questi principi matematici descrivono il movimento dei fluidi e sono stati inizialmente applicati a **fluidi incompressibili**. Fu solo nel 1847 che la loro applicazione fu estesa ai **fluidi comprimibili**. Queste equazioni costituiscono un insieme di cinque equazioni alle derivate parziali, non lineari, che operano in tre dimensioni spaziali e nel tempo. Nonostante siano passati oltre 160 anni dalla loro formulazione, le soluzioni analitiche rimangono limitate e si applicano solo a scenari semplificati.

Il Clay Mathematics Institute ha identificato sei problemi di significativa complessità nel campo della fisica matematica, ancora irrisolti, tra cui figura l'equazione di Navier-Stokes. Questi problemi includono:

- Questioni di matematica pura;
- Teorie di fisica quantistica;
- Le equazioni di Navier-Stokes.

L'indagine sulle equazioni di Navier-Stokes, come proposto dal Clay Mathematics Institute, si concentra sulla dimostrazione dell'esistenza e della regolarità di soluzioni in una determinata categoria. Questa ricerca è fondamentale, poiché, nonostante gli ingegneri si applichino nella risoluzione numerica di tali equazioni, la comunità matematica non ha ancora determinato se esistano soluzioni uniche e regolari in certe condizioni. Gli ingegneri, pertanto, si dedicano a trovare una soluzione approssimativa, operando con metodi numerici. La fluidodinamica computazionale, sviluppatasi inizialmente per le previsioni meteorologiche, vide il suo albore con **Lewis Fry Richardson** nel 1922. Richardson fu pioniere nell'uso di metodi numerici per la previsione del tempo, adottando un modello di calcolo che, nonostante la sua instabilità e la tendenza ad amplificare gli errori di troncamento, permise di ottenere risultati grazie allo smorzamento causato dalle approssimazioni manuali. Questo episodio segnò la prima apparizione di una pratica simile alla fluidodinamica computazionale moderna nel panorama scientifico. Il secondo esperimento di rilievo fu condotto da **Thom**, che analizzò il flusso attorno a un cilindro. Nel 1930, Thom riuscì manualmente a calcolare il flusso incompressibile intorno a un cilindro fino a un numero di Reynolds di 20, ottenendo risultati in accordo con le osservazioni sperimentali. Il valore aggiunto del suo lavoro rispetto a quello di Richardson fu l'introduzione delle coordinate Body Fitted, una novità per l'epoca. Successivamente, negli anni '40, **Von Neumann** e **Charney** fornirono contributi fondamentali alla fluidodinamica computazionale, nell'ambito delle previsioni meteorologiche. Essi, congiuntamente ai loro collaboratori riuscirono a realizzare quanto Richardson aveva solo tentato, stabilendo le basi della meteorologia moderna e della CFD. Definirono **criteri di stabilità** per gli schemi numerici e, ripetendo i calcoli di Richardson, ottennero risultati promettenti. In conclusione, molti degli schemi numerici, almeno nelle loro forme più elementari, furono delineati in quel periodo, in particolare da Von Neumann, Charney e i loro collaboratori.

È cruciale, in ogni problema affrontato, identificare la risorsa limitante, poiché questa conoscenza è essenziale per guidare tutte le decisioni necessarie a impostare un calcolo CFD corretto e realistico. Oggi, la principale limitazione è spesso la potenza di calcolo, ancora insufficiente. Per superare questo ostacolo, si tende a semplificare gli schemi numerici in modo che richiedano meno memoria computazionale.

2. Mathematical models for CFD

I modelli matematici su cui si basa la CFD fanno riferimento al sistema fluido come **continuo**, la cui descrizione è fornita dal sistema di equazioni di governo composto da:

- **Equazioni di conservazione della massa** [1 eq.s]: equazione scalare;
- **Equazione di conservazione della quantità di moto** (seconda legge di Newton) [3 eq.s]: equazione vettoriale;
- **Equazione di conservazione dell'energia** (prima legge della termodinamica) [1 eq.s]: equazione scalare.

Questo sistema di 5 equazioni deve essere chiuso con opportune equazioni (eventualmente semi empiriche), che descrivono il **comportamento dinamico** e **termico** del fluido (equazione di stato, equazioni che descrivono gli sforzi, equazioni costitutive per il flusso termico, relazioni empiriche per la viscosità e conducibilità termica).

Questi principi fisici fondamentali, se formulati dal punto di vista spaziale o Euleriano risultano in equazioni di conservazione per la massa, quantità di moto o energia. Tuttavia, gli stessi principi possono essere formulati anche in termini di equazioni non conservative e hanno la forma di equazioni di trasporto di una certa grandezza. Da un punto di vista puramente matematico le due formulazioni sono equivalenti, ma da un punto di vista della soluzione numerica presentano comportamenti e proprietà molto diverse.

Le formulazioni in termini di **equazioni conservative** hanno in termini di variabili dipendenti (incognite) ρ , ρv_i (quantità di moto), ρE (energia per unità di volume) che sono dette **variabili conservative**. Un altro set di variabili molto importanti è costituito dalle cosiddette **variabili primitive** ρ (densità - variabile conservativa), v_i (componenti i-esime della velocità - variabili non conservative), p (pressione - variabile non conservativa).

2.1. Conservation Equations in Integral Form

Introduciamo l'**equazione della conservazione della massa**, la quale può essere espressa sia in notazione vettoriale (forma intrinseca), sia in una notazione ad indici sfruttando la convenzione di Einstein.

Nell'ambito dei flussi comprimibili, prendendo in esame un volume di controllo V fisso nello spazio e circoscritto da una frontiera A , si possono formulare le equazioni di governo in termini integrali. Queste equazioni fondamentali consistono in un insieme di 5 equazioni scalari, che descrivono i principi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia.

Per quanto riguarda la **conservazione della massa**, la quale prende nome di **equazione di continuità**, questa può essere descritta utilizzando la notazione vettoriale (formulazione intrinseca), oppure attraverso una notazione ad indici, impiegando la convenzione di Einstein per la semplificazione degli indici.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_A \rho v_i n_i dA = 0$$

Di nuovo, consideriamo un volume V fisso, avente come contorno una superficie A chiusa, e riferendo questo sistema ad una terna cartesiana ortogonale inerziale. Sotto questa ipotesi, sempre nel caso di flusso comprimibile, l'**equazione della quantità di moto** si scrive come riportato sotto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \int_A \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_A p \mathbf{n} dA + \int_A \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} dA$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV + \int_A \rho v_i (v_j n_j) dA = \int_V \rho g_i dV - \int_A p n_i dA + \int_A \tau_{ij} n_j dA$$

- \mathbf{n} è il versore normale alla superficie A ;
- \mathbf{g} è il campo delle forze di volume;
- Il tensore degli sforzi è stato decomposto in due contributi. Uno **isotropo** che fa riferimento alle componenti di sforzo competenti alla pressione e l'altro legato al **tensore $\boldsymbol{\tau}$ degli sforzi puramente viscosi**. È bene precisare che nella notazione ad indici del tensore degli sforzi viscosi, compare il prodotto riga per colonna fra la matrice rappresentativa del tensore $\boldsymbol{\tau}$ e la colonna dei coseni direttori.

L'**equazione dell'energia** può essere riformulata tenendo conto delle stesse condizioni iniziali precedentemente assunte, con l'eccezione che ora è possibile prescindere dall'assunzione relativa all'inerzialità del sistema di riferimento. Questa modifica non influisce sulla validità dell'equazione dell'energia. Pertanto, possiamo ancora esprimere l'equazione in termini intrinseci:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV + \int_A \rho H (v_i n_i) dA = \int_V \rho g_i v_i dV + \int_A \tau_{ij} v_j n_i dA + \int_A q_i n_i dA$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV + \int_A \rho H (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_A \boldsymbol{\tau} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$$

- E è l'**energia totale specifica** (energia totale per unità di massa);
- H è l'**entalpia totale specifica**. Nasce perché si è messo il termine della pressione al primo membro
- $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ è la potenza associata al lavoro degli sforzi viscosi
- \mathbf{q} vettore flusso termico

Nell'equazione presentata, il primo integrale di volume sul lato destro quantifica la potenza delle forze di volume. Il secondo integrale rappresenta un termine di flusso, il quale descrive il lavoro risultante dagli sforzi viscosi. Il terzo integrale, invece, indica uno scambio termico (\mathbf{q} che simboleggia il vettore di flusso termico). È importante sottolineare che, sebbene non sia esplicitamente menzionato, il lavoro dovuto alle azioni di pressione è implicitamente incluso nel termine di flusso sul lato sinistro dell'equazione. Questo approccio consente di esprimere il termine di flusso non in termini di **energia totale**, ma piuttosto di **entalpia totale**, che incorpora il lavoro associato alle azioni di pressione.

Con riferimento ad un gas ideale l'**energia totale specifica** e l'**entalpia totale specifica** possono essere così definite:

$$E = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad H = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

- $\gamma = c_p/c_v$ rapporto tra i calori specifici;
- Tali espressioni permettono di legare E ed H alla temperatura, alla pressione e alla velocità;

2.2. Conservation Equations in Differential Form

Per approfondire e chiarire ulteriormente questo argomento, possiamo affermare che la formulazione differenziale costituisce il fondamento per i metodi di discretizzazione alle differenze, mentre la formulazione integrale si rivela particolarmente adatta come punto di partenza per i metodi di evoluzione, fornendo un quadro complessivo del comportamento del sistema. Le equazioni di flusso, che sono espressioni differenziali, derivano direttamente dalle equazioni integrali mediante l'applicazione del **teorema della divergenza**. Questo passaggio permette di convertire un integrale calcolato su una superficie chiusa in un integrale esteso su un volume.

La formulazione differenziale è particolarmente rilevante come punto di partenza per metodi numerici che impiegano schemi a differenze finite. Tuttavia, la nostra attenzione si concentrerà maggiormente sugli schemi a volumi finiti, che sono preponderanti nell'uso attuale. Pur non approfondendo gli schemi a differenze finite, ne menzioneremo alcuni aspetti essenziali per introdurre concetti chiave che risultano intuitivi in tale contesto. La nostra discussione si focalizzerà sulla discretizzazione delle equazioni mediante il metodo dei volumi finiti, che rappresenta l'approccio standard in fluidodinamica.

Per quanto riguarda la discretizzazione numerica di equazioni differenziali alle derivate parziali, i metodi prevalenti sono:

- Il metodo a differenze finite;
- Il metodo degli elementi finiti;
- Il metodo dei volumi finiti, preferito nelle applicazioni di Computational Fluid Dynamics (CFD) per la sua coerenza con la formulazione integrale delle equazioni di governo.

Per derivare una formulazione differenziale, si può applicare il teorema della divergenza all'integrale di flusso. È importante osservare che, dato che il volume V rimane costante nel tempo, è possibile includere entrambi i termini sotto il segno di integrazione. Questo si realizza introducendo la derivata temporale direttamente all'interno dell'integrale. In questo modo, si facilita la trasformazione dell'integrale di flusso in una forma differenziale, permettendo un'analisi più dettagliata e specifica del fenomeno fisico in esame. Se ne deduce infine che la **forma differenziale dell'equazione di continuità** è quella sotto riportata:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0$$

In maniera del tutto analoga procediamo sia per l'equazione della conservazione della quantità di moto, sia per l'equazione della conservazione dell'energia. Di conseguenza si andrà ad applicare sempre il teorema della divergenza al termine di flusso.

Focalizzandoci sull'equazione della **conservazione della quantità di moto**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \int_A \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_A p \mathbf{n} dA + \int_A \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} dA$$

- Nel secondo integrale del primo membro, emerge un **prodotto tensoriale** tra il vettore velocità e sé stesso. Questo non è altro che un prodotto delle componenti dei due vettori, che da due vettori tridimensionali genera un tensore con nove componenti. Tale tensore è simmetrico e presenta sulla diagonale principale i quadrati delle componenti del vettore velocità.

$$\int_A \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) dV$$

- Il secondo integrale del secondo membro, interpretato come un termine di flusso relativo alle azioni di pressione, si trasforma in un integrale di volume che include il gradiente della pressione.

$$\int_A p \mathbf{n} dA = \int_V \nabla p dV$$

- Analogamente, nel terzo integrale del secondo membro, si assiste alla transizione da un integrale di superficie a uno di volume, con l'introduzione della divergenza del tensore degli sforzi.

$$\int_A \underline{\tau} \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \underline{\tau} dV$$

È noto dall'analisi differenziale che la divergenza, essendo un operatore differenziale vettoriale, riduce l'ordine dell'ente a cui viene applicata. In altre parole, la divergenza di un vettore risulta uno scalare, mentre quella di un tensore risulta un vettore.

Ricordando che il volume V è stazionario nello spazio e indipendente dal tempo, la derivata temporale può essere inserita sotto il segno di integrale. Collocando tutti i termini sotto un unico segno di integrale esteso al volume V , si giunge alla formulazione dell'equazione in questione:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I} - \underline{\tau}) - \rho \mathbf{g} \right] dV = 0$$

Considerando la arbitrarietà di V , ne consegue che l'integrale in questione deve annullarsi identicamente. Questo porta direttamente alla derivazione delle seguenti equazioni, espresse in forma implicita e indicizzata. È importante osservare che il simbolo δ_{ij} rappresenta il **delta di Kronecker**, equivalente alla matrice identità, per cui δ_{ij} assume valore 1 quando i e j coincidono, e 0 altrimenti. Attraverso questo ragionamento, si giunge alla formulazione differenziale dell'equazione che governa la quantità di moto.

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I} - \underline{\tau}) - \rho \mathbf{g} = 0$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}) - \rho g_i = 0$$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto precedentemente si ottiene la formulazione differenziale dell'**equazione dell'energia** sia in forma intrinseca sia in forma ad indici:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} H) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\underline{\tau} \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{q}$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i H}{\partial x_i} = \rho g_i u_i + \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

Mettendo a sistema le formulazioni indicizzate delle 3 fondamentali equazioni differenziali, che rappresentano la conservazione di massa, della quantità di moto e energia, si perviene ad un set completo di equazioni di governo. Queste sono espresse in una forma differenziale conservativa, come illustrato di seguito:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 & \text{flusso di massa} \\ \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}) - \rho g_i = 0 & \text{flusso di quantità di moto} \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i H}{\partial x_i} = \rho g_i u_i + \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} & \text{flusso di entalpia totale} \end{cases}$$

flusso di potenza associato agli sforzi viscosi

Il sistema in esame è composto da 3 equazioni. Tuttavia, considerando che l'equazione relativa alla quantità di moto è di natura vettoriale, si estende a un insieme di cinque equazioni. Queste equazioni sono formulate in termini di 5 incognite: la **densità** (ρ), le **componenti della quantità di moto** (ρv_i) e l'**energia per unità di volume** (ρE). Le variabili dipendenti sono quindi identiche alle variabili conservative, che comprendono la densità, la quantità di moto e l'energia, quest'ultima espressa per unità di massa (E) e convertita in energia per unità di volume quando moltiplicata per la densità (ρ). La pressione, non inclusa tra le variabili dipendenti, può essere calcolata utilizzando l'equazione di stato del fluido in esame.

In analogia a quanto detto per i termini utilizzati nella formulazione integrale, i termini presenti in queste equazioni che fungono da argomenti per l'operatore di divergenza sono comunemente definiti come **flussi**. Di conseguenza, si hanno **flussi convettivi**, **flussi diffusivi** e **flussi termici**. Nello specifico abbiamo:

- $\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i}$ rappresenta il flusso di massa;
- $\frac{\partial (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij})}{\partial x_j}$ rappresenta il flusso di quantità di moto;
- $\frac{\partial \rho u_i H}{\partial x_i}$ rappresenta il flusso di entalpia totale;
- $\frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j}$ rappresenta il flusso di potenza associato agli sforzi viscosi.

2.3. Not-Conservation Differential Equations

In aggiunta all'approccio conservativo, è possibile adottare una **formulazione non conservativa**, manifestata attraverso equazioni di trasporto anziché di conservazione. Tale variante dell'equazione di governo emerge direttamente da bilanci di massa, quantità di moto ed energia applicati a un elemento fluido infinitesimale. È importante notare che questa formulazione può essere derivata anche dall'approccio conservativo.

Riguardo l'**equazione di continuità**, se procediamo con l'espansione della somma che rappresenta il termine spaziale, otteniamo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

In essa i primi 2 termini, ovvero $\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ possono essere raggruppati nella derivata totale di ρ rispetto al tempo, inquanto la loro somma costituisce la variazione materiale della densità istantanea di particelle mentre queste percorrono ciascuna la propria traiettoria:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Nell'analisi dell'**equazione della quantità di moto**, procediamo con lo stesso metodo di espansione del termine di divergenza attraverso l'impiego della **formula di Leibniz**:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = v_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right] + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

È interessante osservare che il primo termine al secondo membro si annulla, poiché corrisponde al termine presente al primo membro nell'equazione di continuità. Inoltre, $\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ corrisponde alla derivata temporale della velocità moltiplicata per la densità, ovvero $\rho \frac{dv_i}{dt}$. Di conseguenza, si giunge all'espressione riportata di seguito:

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Infine, per l'**equazione dell'energia** si ha:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u_i \frac{\partial H}{\partial x_i} = g_i u_i + \frac{1}{\rho} u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

Nuovamente si arriva alla stesura di un set di equazioni di governo, che in questo caso sono scritte in funzione di variabili non conservative, ovvero la densità, le componenti della velocità e l'energia totale specifica:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{dv_i}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial E}{\partial t} + u_i \frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i u_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{cases}$$

Le formulazioni conservativa e non conservativa, benché **matematicamente equivalenti** in quanto per passare da una forma all'altra si usa semplicemente l'espansione del termine di divergenza tramite la formula di Leibniz, differiscono significativamente quando si considerano le soluzioni numeriche. Questa distinzione solleva la questione di determinare l'ambito di applicazione più appropriato per ciascuna formulazione.

Per i **flussi interni**, la conservazione dello schema numerico è cruciale, mentre per i **flussi esterni**, la conservazione diventa un requisito meno critico, lasciando spazio ad altri fattori per valutare l'adeguatezza del calcolo. Inoltre, nei **flussi comprimibili**, una formulazione non conservativa fallisce nel riprodurre accuratamente certi tipi di discontinuità, come quelle che emergono nei flussi transonici e supersonici, noti come onde d'urto. In questi casi, è necessario adottare algoritmi di risoluzione radicalmente differenti. Esistono principalmente due metodi per affrontare la discontinuità delle onde d'urto: i metodi di "**Shock capturing**" e i metodi di "**Shock fitting**", ciascuno con le proprie specificità e ambiti di efficacia.

- **Shock-capturing:** sono progettate per integrare le onde d'urto all'interno del campo di flusso come parte integrante della soluzione numerica. Questo approccio elimina la necessità di trattamenti speciali per le onde d'urto, poiché non è richiesta una griglia di calcolo specifica; le onde d'urto emergono naturalmente nella soluzione calcolata. I metodi shock-capturing sono particolarmente efficaci per gestire flussi complessi che includono onde d'urto, le cui caratteristiche sono sconosciute. Il loro utilizzo elimina la necessità di tracciare manualmente le onde d'urto, poiché queste emergono naturalmente nella soluzione numerica. Tuttavia, le onde d'urto identificate con questi metodi tendono a essere distribuite su più celle della mesh di calcolo, risultando in uno spessore apparente che non corrisponde a quello fisico reale. Questo fatto è legato a come viene discretizzato il dominio di calcolo.
- **Shock-fitting:** introduce le onde d'urto nel campo di flusso come discontinuità distinte. Per garantire che la soluzione sia fisicamente coerente, è essenziale che le condizioni del flusso rispettino le relazioni di Rankine-Hugoniot attraverso l'onda d'urto. Ciò stabilisce una connessione diretta tra le variabili di stato prima e dopo l'onda d'urto. Utilizzando le equazioni di governo è possibile determinare il comportamento del flusso nelle regioni non influenzate direttamente dall'onda d'urto. D'altra parte, i metodi shock-fitting trattano l'onda d'urto come una discontinuità, permettendo di determinare con precisione la sua posizione una volta ottenuta la soluzione. Il limite di questi metodi risiede nell'incapacità di prevedere a priori la configurazione dell'onda d'urto, specialmente in presenza di onde riflesse o in flussi non stazionari, dove la configurazione delle onde d'urto cambia continuamente.

Per superare il problema legato alla previsione della configurazione dell'urto, si può ricorrere a un approccio ibrido. Inizialmente si impiega un metodo shock-capturing per ottenere una soluzione approssimativa e individuare la posizione approssimativa delle onde d'urto, per poi affinare i dettagli con un metodo shock-fitting.

È importante notare che, per l'efficacia dei metodi shock-capturing, le equazioni di governo devono essere formulate in termini conservativi, assicurando che, nonostante le variabili conservative possano essere discontinue attraverso l'onda d'urto, i flussi conservativi rimangano continui.

Considerando un **caso monodimensionale**, compatibile con onde d'urto rette, e scrivendo le equazioni di un'onda normale in un flusso monodimensionale si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} [\rho u] &= 0 \\ [\rho u^2 + p] &= 0 \\ [H] &= 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{[...] variable jump} \\ \text{across the shock} \end{array}$$

Le relazioni di Rankine-Hugoniot, che descrivono il comportamento delle discontinuità come gli urti, sono intrinsecamente soddisfatte dalla formulazione conservativa delle equazioni di fluidodinamica. Questo perché il termine convettivo ρu , quello $(\rho u^2 + p)$ e il termine convettivo H sono direttamente derivati dalla conservazione di massa, quantità di moto ed energia. Di conseguenza, è la formulazione conservativa che incorpora le onde di urto come parte integrante delle soluzioni.

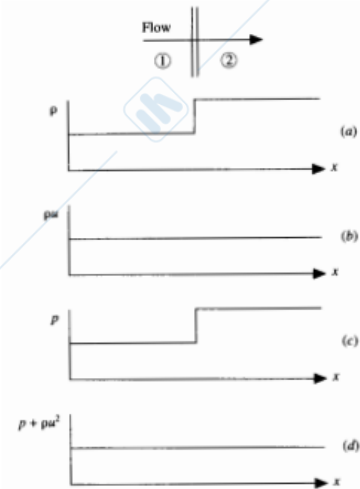
Al contrario, un approccio non conservativo, che tratta separatamente velocità, pressione e densità, si scontra con la discontinuità intrinseca di queste grandezze attraverso gli urti. Questa discontinuità è particolarmente problematica da gestire numericamente, poiché può generare oscillazioni vicino all'urto, portando a risultati inaccurati per posizione e intensità dell'urto stesso. Inoltre, se l'algoritmo numerico non è sufficientemente stabile, può non convergere alla soluzione corretta. D'altra parte, i metodi shock fitting non mostrano preferenza per la forma delle equazioni, permettendo l'uso di entrambe le formulazioni. Ciò è dovuto al fatto che l'urto non è calcolato come parte della soluzione numerica; quindi, la forma delle equazioni non influisce sulla determinazione dell'urto.

Nell'analisi dei **flussi incomprimibili**, entrambe le formulazioni convergono verso un insieme comune di variabili primitive. Questo non accade nei **flussi comprimibili**, dove la formulazione non conservativa fallisce nel rappresentare accuratamente alcune tipologie di discontinuità, come gli urti. Per una corretta rappresentazione e cattura di un'onda d'urto, secondo la terminologia della fluidodinamica computazionale (CFD), è essenziale che le equazioni siano formulate e discretizzate in maniera conservativa.

Nei **flussi incomprimibili**, $\rho = \text{cost}$, eliminando così il termine non stazionario dall'equazione di continuità. In questa situazione, l'equazione di continuità si riduce a una condizione di non-divergenza del campo di velocità, indicando che la divergenza deve essere zero. È la variazione di densità che collega le equazioni dell'energia a quelle della quantità di moto. In altre parole, l'equazione dell'energia si trova disaccoppiata dal sistema di equazioni di governo e pertanto non viene inclusa in esso. Se necessario, l'equazione dell'energia può essere risolta separatamente per calcolare il campo delle temperature, ma non influisce direttamente sul sistema di equazioni di governo. Di conseguenza, il sistema di equazioni di governo per i flussi incomprimibili si presenta come segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{dv_i}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{cases}$$

Numerosi codici CFD, originati negli anni '80, erano radicati nell'approccio dei metodi dipendenti dal tempo (Time dependent), concepiti principalmente per studio comprimibile, sia in ambito esterno che interno. L'esigenza di adattare tali metodi al calcolo di flussi incomprimibili era fortemente avvertita in quel periodo. Il primo passo per l'adattamento dei metodi time-dependent all'analisi di flussi incomprimibili consisteva nell'introduzione di una **comprimibilità artificiale** β nei codici. Questo comportava l'implementazione di un'equazione di stato fittizia, che stabiliva una relazione di proporzionalità tra pressione e densità, permettendo così la simulazione di flussi incomprimibili attraverso algoritmi originariamente progettati per flussi comprimibili. Algebricamente questa si sintetizzava come $p = \beta \rho$.



Sostituendo nella forma evolutiva dell'equazione di continuità (quella non stazionaria) si ottiene:

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Ovviamente questa relazione non ha nessun senso fisico e la forma dell'equazione di continuità che ne deriva a sua volta non ha senso fisico nel caso non stazionario. Riacquista senso fisico nel caso stazionario dove il primo termine si annulla. Il ruolo di questa equazione è quello di guidare la pressione, anziché la densità, verso una soluzione incomprimibile stazionaria. Non mi interessa se il transitorio non ha senso fisico. Il parametro β (da tarare in modo da velocizzare il più possibile la convergenza) ha le dimensioni di un quadrato della velocità del suono artificiale.

2.4. Navier-Stokes Equations

Le equazioni precedentemente osservate sono state presentate in una forma che non specificava esplicitamente gli sforzi. Nell'ambito delle equazioni costitutive per fluidi, che stabiliscono una relazione tra lo sforzo e la velocità di deformazione, ci limiteremo a considerare esclusivamente i **fluidi newtoniani**. Per questi fluidi, le equazioni menzionate si trasformano nelle ben note **equazioni di Navier-Stokes**. Queste ultime costituiscono il più generale strumento fisico-matematico per la descrizione del movimento di un flusso viscoso newtoniano. In particolare, per un fluido viscoso newtoniano, esiste una **relazione lineare** tra gli sforzi e le componenti del tensore di velocità di deformazione. Nella loro forma più generale, queste relazioni coinvolgono due coefficienti di proporzionalità, che si riducono a uno solo attraverso l'applicazione dell'**ipotesi di Stokes**. Tale coefficiente unico è noto come **coefficiente dinamico di viscosità**, che al più varia in funzione della temperatura.

Nella notazione ad indici l'espressione degli sforzi viscosi per un fluido newtoniano è quella riportata sotto:

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\mu\nabla\mathbf{v}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

È rilevante considerare il caso più generico, ovvero quello relativo ad un **fluido comprimibile**. In tali circostanze si avrà sia un contributo tangenziale che normale dovuto agli sforzi. Nello specifico gli sforzi normali sono dovuti alla pressione. Generalmente, tali contributi sono di entità minore, tuttavia, per completezza, vengono inclusi nella formulazione complessiva. Nel caso specifico di un **fluido incomprimibile**, si osserva che la divergenza del campo di velocità è 0. Di conseguenza, gli elementi diagonali del tensore degli sforzi risultano essere nulli, ovvero si eliminano gli sforzi di taglio normali.

Per completare la chiusura matematica del sistema di equazioni che governano il fenomeno, è necessario definire una relazione costitutiva per il **flusso termico** q . Questo è comunemente descritto dalla **legge di Fourier**, secondo la quale q è direttamente proporzionale al gradiente di temperatura attraverso la **conducibilità termica** k del fluido. In termini matematici, q è espresso come:

$$\mathbf{q} = \kappa\nabla T$$

La conducibilità termica, a sua volta, è spesso determinata utilizzando l'**analogia di Reynolds**, particolarmente adatta per gli strati limite in prossimità delle pareti. Questa analogia correla lo spessore dello strato limite termico a quello dello strato limite di quantità di moto, permettendo di esprimere k come il prodotto del calore specifico a pressione costante c_p per la viscosità dinamica μ , diviso per un coefficiente adimensionale conosciuto come **numero di Prandtl**:

$$\kappa = c_p \left(\frac{\mu}{Pr} \right)$$

L'analisi delle equazioni di Navier-Stokes per fluidi comprimibili non riveste particolare interesse per il nostro studio. Non ci soffermiamo sull'esplorazione dei risultati derivanti dalla sostituzione delle componenti di stress nell'equazione del momento; piuttosto, accettiamo le componenti τ_{ij} basandoci sulle relazioni precedentemente stabilite. Al contrario, l'esame di tali equazioni per **fluidi incomprimibili** è di rilevante interesse. In questo caso, è interessante sostituire le espressioni degli sforzi con i gradienti di velocità di deformazione nelle equazioni di governo. Questo approccio risulta particolarmente utile nell'equazione della quantità di moto. Quando si fa riferimento a tale equazione in **forma non conservativa**, si ottiene una **rappresentazione vettoriale** notevolmente più concisa e gestibile della quantità di moto. La forma risultante, espressa attraverso i vettori, è la seguente:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

In questa situazione, si osserva che i termini viscosi sono essenzialmente rappresentati dal coefficiente di viscosità che agisce sul laplaciano del campo di velocità. Questo aspetto è particolarmente rilevante poiché mette in luce la **natura diffusiva** dei termini viscosi. Se fosse possibile ignorare tutti gli altri termini, mantenendo solo la derivata temporale della velocità e il termine laplaciano, si otterrebbe un'equazione simile alla legge di Fourier. Tale legge descrive la diffusione termica attraverso la conduzione del calore in un corpo solido, sottolineando un parallelo interessante tra i fenomeni di diffusione termica e quelli viscosi.

Inoltre, il secondo termine dell'equazione, a primo membro, è noto come **termine diffusivo**, il quale gioca un ruolo cruciale nel descrivere i due principali meccanismi fisici responsabili del trasporto della quantità di moto. Il 1° meccanismo, detto **convettivo**, è associato al movimento direzionale e dipende dalle componenti di velocità del fluido; questo meccanismo è tipico dei fenomeni non viscosi. Il 2° meccanismo, invece, è quello **diffusivo**, che è legato alla viscosità del fluido e si manifesta attraverso gli effetti degli sforzi viscosi. Questi due processi di trasporto operano congiuntamente in specifiche aree del campo di moto, in particolare dove si verificano intensi gradienti di velocità, come negli strati limite o nelle scie. Al di fuori di queste zone, i meccanismi convettivi tendono a dominare su quelli diffusivi. Nei punti in cui si hanno anche i termini diffusivi, si osservano gradienti di velocità significativi, che richiedono l'uso di celle di calcolo di dimensioni molto ridotte rispetto a quelle necessarie in presenza di termini convettivi predominanti. Per questo motivo, è essenziale generare una griglia di calcolo più densa vicino alle pareti solide, per poter risolvere accuratamente le equazioni che descrivono il moto del fluido in tali regioni.

Dal punto di vista strettamente matematico, le equazioni di Navier-Stokes sono **equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine nello spazio e del primo ordine nel tempo**.

In ambito numerico, le equazioni di governo sono comunemente formulate attraverso la loro **rappresentazione vettoriale**. Questo approccio è particolarmente evidente quando si considerano le equazioni conservative, le quali, pur essendo espresse in termini vettoriali, adottano una forma distintiva rispetto all'analisi vettoriale tradizionale dell'equazione della quantità di moto. Per esemplificare, si consideri la seguente espressione dell'equazione in **coordinate cartesiane**:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \mathbf{S} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}_v}{\partial z}$$

In questa formulazione, il vettore \mathbf{U} , detto **vettore delle variabili conservative**, consiste in un vettore colonna composto da 5 elementi: la densità, le componenti della quantità di moto e l'energia totale per unità di volume. I vettori \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} corrispondono ai **flussi convettivi**. Ognuno di questi è un vettore colonna che contiene i flussi convettivi relativi alle 3 equazioni, orientati rispettivamente nelle direzioni X , Y e Z . Inoltre, l'ultimo termine menzionato si riferisce al termine convettivo associato all'equazione dell'energia, il quale è considerato sempre nelle 3 direzioni spaziali per ciascun flusso.

$$\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E]^T$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{bmatrix}$$

Infine, S è il **vettore dei termini sorgenti**, che fa riferimento le forze di volume:

$$\mathbf{S} = [0, g_x, g_y, g_z, g_x u + g_y v + g_z w]^T$$

Di seguito si riportano anche i **vettori di flusso viscosi** nelle 3 direzioni dello spazio:

$$\mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xx}u + \tau_{yx}v + \tau_{zx}w \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{xy}u + \tau_{yy}v + \tau_{zy}w \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xz}u + \tau_{yz}v + \tau_{zz}w \end{bmatrix}$$

Il primo termine iniziale è 0 per tutte e tre le direzioni considerate, poiché l'equazione di continuità non include termini di sorgente. Nei termini successivi compaiono gli sforzi che agiscono sulle giaciture normali alle direzioni menzionate. Per quanto l'ultimo termine, che riguarda l'equazione dell'energia, rappresenta un insieme complesso che incorpora la somma delle potenze derivanti dal lavoro degli sforzi viscosi, oltre al termine che descrive lo scambio termico lungo la direzione specificata.

È conveniente riformulare le equazioni di governo in un **sistema di riferimento curvilineo** che risulta essere più generale e dal quale possono essere ricavate direttamente le altre formulazioni in coordinate cartesiane, sferiche, ecc. Questa formulazione inoltre è la più conveniente per i metodi alle differenze finite poiché facilita la discretizzazione. In un metodo ai volumi finiti questo passaggio non è strettamente necessario; tuttavia, molti solutori moderni fanno uso di quantità che è più conveniente formulare in coordinate curvilinee.

2.5. Navier-Stokes Equations in curvilinear coordinates

Risulta necessario effettuare un mapping del sistema curvilineo (ξ, η, ζ) rispetto a quello cartesiano (x, y, z) :

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y, z) \\ \eta = \eta(x, y, z) \\ \zeta = \zeta(x, y, z) \end{cases}$$

La formulazione in coordinate curvilinee conserva una struttura simile a quella espressa in coordinate cartesiane, grazie all'impiego della formulazione vettoriale. Pertanto, nella formulazione in coordinate curvilinee, F rappresenta il vettore dei flussi convettivi lungo la direzione ξ , G indica il vettore dei flussi convettivi lungo la direzione η , e H denota il vettore dei flussi convettivi lungo la direzione ζ .

$$\frac{\partial J^{-1}U}{\partial t} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{H}}{\partial \zeta} = J^{-1}S + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{G}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{H}_v}{\partial \zeta}$$

- I **vettori dei flussi convettivi** si riferiscono ciascuno ad una coordinata curvilinea. Ad esempio, ξ_x, ξ_y, ξ_z sono definite dalla metrica della trasformazione del sdr. Le singole componenti dei vettori flusso convettivo mantengono una formulazione analoga alla precedente però adesso la componente di velocità che trasporta è nella direzione curvilinea (indicate con la maiuscola):

$$\mathcal{F} = \mathbf{F}\xi_x + \mathbf{G}\xi_y + \mathbf{H}\xi_z = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + p\xi_x \\ \rho v U + p\xi_y \\ \rho w U + p\xi_z \\ \rho U H \end{bmatrix} \quad \mathcal{G} = \mathbf{F}\eta_x + \mathbf{G}\eta_y + \mathbf{H}\eta_z = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + p\eta_x \\ \rho v V + p\eta_y \\ \rho w V + p\eta_z \\ \rho V H \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H} = \mathbf{F}\zeta_x + \mathbf{G}\zeta_y + \mathbf{H}\zeta_z = \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + p\zeta_x \\ \rho v W + p\zeta_y \\ \rho w W + p\zeta_z \\ \rho W H \end{bmatrix}$$

- I vettori U, V, W sono dette **componenti controvarianti della velocità** definite come in termini di componenti cartesiane della velocità e termini metrici:

$$U = u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z \quad V = u\eta_x + v\eta_y + w\eta_z \quad W = u\zeta_x + v\zeta_y + w\zeta_z$$

- J rappresenta invece il reciproco del **determinante dello Jacobiano della trasformazione** che correla il volume in un sistema di riferimento al volume calcolato in un altro sistema di riferimento:

$$J^{-1} = x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\xi z_\eta - x_\xi y_\zeta z_\eta - x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\zeta y_\eta z_\xi$$

- I **vettori dei flussi diffusivi** sono definiti analogamente a quelli convettivi ed hanno la seguente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_v &= \mathbf{F}_v \xi_x + \mathbf{G}_v \xi_y + \mathbf{H}_v \xi_z = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx}\xi_x + \tau_{xy}\xi_y + \tau_{xz}\xi_z \\ \tau_{yx}\xi_x + \tau_{yy}\xi_y + \tau_{yz}\xi_z \\ \tau_{zx}\xi_x + \tau_{zy}\xi_y + \tau_{zz}\xi_z \\ \beta_x\xi_x + \beta_y\xi_y + \beta_z\xi_z \end{bmatrix} \\ \mathcal{G}_v &= \mathbf{F}_v \eta_x + \mathbf{G}_v \eta_y + \mathbf{H}_v \eta_z = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx}\eta_x + \tau_{xy}\eta_y + \tau_{xz}\eta_z \\ \tau_{yx}\eta_x + \tau_{yy}\eta_y + \tau_{yz}\eta_z \\ \tau_{zx}\eta_x + \tau_{zy}\eta_y + \tau_{zz}\eta_z \\ \beta_x\eta_x + \beta_y\eta_y + \beta_z\eta_z \end{bmatrix} \\ \mathcal{H}_v &= \mathbf{F}_v \zeta_x + \mathbf{G}_v \zeta_y + \mathbf{H}_v \zeta_z = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx}\zeta_x + \tau_{xy}\zeta_y + \tau_{xz}\zeta_z \\ \tau_{yx}\zeta_x + \tau_{yy}\zeta_y + \tau_{yz}\zeta_z \\ \tau_{zx}\zeta_x + \tau_{zy}\zeta_y + \tau_{zz}\zeta_z \\ \beta_x\zeta_x + \beta_y\zeta_y + \beta_z\zeta_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Per facilitare la comprensione e la scrittura, nell'equazione dell'energia si utilizzano i coefficienti β_x , β_y e β_z . Questi rappresentano i termini associati alla **viscosità** e allo **scambio termico**. La loro formulazione è data dalla somma della potenza dovuta agli sforzi viscosi e quella relativa allo scambio termico, calcolate in riferimento a specifiche direzioni all'interno di un sistema di coordinate cartesiane:

$$\beta_x = \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w + \kappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\beta_y = \tau_{yx}u + \tau_{yy}v + \tau_{yz}w + \kappa \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\beta_z = \tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \tau_{zz}w + \kappa \frac{\partial T}{\partial z}$$

2.6. Navier-Stokes Equations in rotating curvilinear system

In molti casi conviene esprimere le equazioni di governo in un **riferimento non inerziale**; le 3 direzioni del sistema di riferimento curvilineo dipenderanno oltre che da (x, y, z) anche dal tempo. Il caso più importante di riferimento non inerziale è quello di riferimento rotante rispetto ad un asse fisso (le turbomacchine). In altre parole, è stata introdotta una nuova **variabile temporale** nel contesto del sistema di riferimento mobile, che si rivela identica alla variabile temporale del sistema di riferimento fisso. Questa aggiunta serve esclusivamente come strumento matematico per facilitare la formulazione delle equazioni all'interno del sistema di riferimento curvilineo mobile, senza implicazioni fisiche reali. Pertanto, l'uso di questa variabile temporale aggiuntiva è vantaggioso unicamente per la sua capacità di semplificare matematicamente la derivazione delle equazioni nel sistema di riferimento mobile, rendendo il processo più diretto e meno complesso.

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y, z, t) \\ \eta = \eta(x, y, z, t) \\ \zeta = \zeta(x, y, z, t) \\ \tau = t \end{cases} \quad \begin{aligned} &\bullet \ t: \text{time in the inertial cartesian frame} \\ &\bullet \ \tau: \text{time in the curvilinear rotating frame} \end{aligned}$$

La metrica della trasformazione rimane esattamente la stessa con l'aggiunta dei termini di derivata delle componenti curvilinee rispetto al tempo (fisicamente questi termini hanno il significato di velocità di trascinamento).

L'equazione di governo in forma vettoriale diventa:

$$\frac{\partial J^{-1}\mathcal{U}}{\partial t} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{F}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{H}}{\partial \zeta} = J^{-1}\mathcal{S} + J^{-1}\mathcal{I} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{F}_v}{\partial \epsilon} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{G}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{H}_v}{\partial \zeta}$$

- \mathcal{I} è il vettore delle forze d'inerzia ($\mathcal{I} = [0, 0, -\rho\Omega w, \rho\Omega v, 0]^T$). Andando a controllare il significato fisico dei termini all'interno del vettore \mathcal{I} si nota che questi termini sono la metà della forza di Coriolis; quindi, la forza centrifuga e l'altra metà della forza di Coriolis sono conglobate nei termini convettivi. Questo rappresenta un vantaggio a livello numerico in quanto in questo modo \mathcal{I} diventa un termine puramente lineare e così si tratta in modo molto semplice.
- Il vettore delle variabili conservative è lo stesso che per il sdr fisso; in questo modo la soluzione è direttamente espressa nel sistema di riferimento inerziale.
- I flussi convettivi hanno una struttura simile a quella ricavata per il sistema inerziale con l'aggiunta ovviamente della dipendenza dal tempo.
- I flussi diffusivi rimangono identici al sistema inerziale

Per **flussi incomprimibili** la forma vettoriale dell'equazione di Navier-Stokes è la stessa, ma devono essere fatte alcune considerazioni: il termine \mathcal{U} delle variabili conservative perde il primo termine in quanto l'equazione di continuità non ha più un termine evolutivo. Inoltre, sparisce l'equazione dell'energia perché disaccoppiata.

$$\mathbf{\Gamma} \frac{\partial J^{-1}\mathcal{U}}{\partial t} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{H}}{\partial \zeta} = J^{-1}\mathcal{S} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{G}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{H}_v}{\partial \zeta}$$

$$\mathcal{U} = [p, u, v, w]^T$$

La premoltiplicazione della derivata temporale delle variabili dipendenti per la matrice $\mathbf{\Gamma}$, che è una matrice diagonale con elementi unitari lungo la diagonale principale e 0 altrove, ad eccezione del primo elemento che è legato alla comprimibilità e presenta un valore di $1/\beta$ (dove beta rappresenta il **coefficiente di comprimibilità artificiale**), comporta una riformulazione dell'equazione originale. In questa nuova formulazione, la pressione p sostituisce la densità nel vettore delle variabili dipendenti. Tale riscrittura, pur non apportando modifiche sostanziali al modello, rivela interessanti aspetti matematici. In particolare, la matrice $\mathbf{\Gamma}$ mette in luce la natura matematica del metodo della comprimibilità artificiale, fungendo da **matrice di preconditionamento**. Questo approccio è rilevante perché, una volta adottato il metodo della comprimibilità artificiale, la riscrittura dell'equazione in questi termini permette di interpretare la matrice $\mathbf{\Gamma}$ come un metodo di preconditionamento. Di conseguenza, si apre la possibilità di estendere l'approccio utilizzando diverse matrici di preconditionamento che potrebbero offrire vantaggi aggiuntivi in termini di convergenza del metodo rispetto alla semplice comprimibilità artificiale.

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I **metodi di preconditionamento** sono tecniche matematiche impiegate per affrontare o attenuare il fenomeno della **stiffness**. La stiffness è spesso associata all'incomprimibilità dei fluidi, che può essere considerata una fonte di difficoltà computazionale. Per esempio, nel trattamento dei flussi incomprimibili, questi possono essere approssimati come comprimibili per facilitare la convergenza numerica; tuttavia, il termine stazionario dovrebbe tendere a 0 al raggiungimento della convergenza, ma la presenza di stiffness impedisce che ciò avvenga.

Una strategia per superare questa sfida è l'uso di una **matrice di preconditionamento** generalizzata, come quella impiegata nel metodo della comprimibilità artificiale. In questo contesto, si utilizza una matrice diagonale per preconditionare non solo l'equazione di continuità, ma anche le tre componenti dell'equazione della quantità di moto mediante secondo parametro, denominato α .

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u}{\alpha} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{v}{\alpha} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{w}{\alpha} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.7. Euler equations

Un modello che, sebbene non sia abbastanza generale per essere applicato nell'industria, risulta estremamente interessante per lo sviluppo di schemi numerici è il **Modello delle Equazioni di Eulero**. Queste equazioni sono fondamentali per descrivere i **flussi non viscosi** e **non conduttivi**. In pratica, questo implica l'eliminazione di tutti i termini viscosi dalle equazioni di Navier-Stokes. Generalmente, per fini di studio, sviluppo e valutazione di schemi numerici, si considerano queste equazioni anche prive di termini sorgenti. Pertanto, all'interno di un sistema generalizzato di coordinate curvilinee, le equazioni assumono la forma specificata di seguito:

$$\frac{\partial J^{-1}\mathcal{U}}{\partial t} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial J^{-1}\mathcal{H}}{\partial \zeta} = 0$$

Nell'analisi emerge la presenza del **termine non stazionario** legato alla derivata temporale di U , accompagnato esclusivamente dai termini convettivi. L'assenza dei termini diffusivi è di notevole rilievo, sia dal punto di vista fisico che matematico, poiché determina la perdita dei termini di 2° ordine, semplificando le equazioni a semplici **relazioni convettive di 1° ordine**. Questa semplificazione ha conseguenze significative sulle condizioni al contorno applicabili:

- Le equazioni di secondo ordine richiedono un numero maggiore e tipologie diverse di condizioni al contorno rispetto a quelle di primo ordine.
- Le Equazioni di Eulero, quindi, si configurano come Equazioni Differenziali Parziali di 1° ordine, con una natura esclusivamente convettiva, sia nel tempo che nello spazio.

Il riferimento alle equazioni di Eulero piuttosto che a quelle di Navier-Stokes si giustifica considerando la **discretizzazione spaziale**: i termini convettivi rappresentano il punto critico, non quelli viscosi. Infatti, la maggior parte delle sfide, sia analitiche che numeriche, nella risoluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes risiede nei termini convettivi. La difficoltà principale consiste nel trovare un metodo di discretizzazione che tratti in modo accurato e coerente con la fisica le derivate di 1° ordine, piuttosto che quelle di 2° ordine.

Le equazioni di Eulero possono essere **linearizzate**. Questa trasformazione si realizza attraverso l'espansione delle derivate dei flussi convettivi. Tale processo si avvale della regola di derivazione delle funzioni composte, considerando che i flussi convettivi sono funzioni vettoriali delle variabili in gioco. Attraverso questa riformulazione, diventa possibile analizzare in maniera più approfondita le caratteristiche matematiche delle equazioni, permettendo così di stabilire condizioni al contorno precise e di formulare vettori di flusso numerici che siano coerenti con il comportamento fisico del sistema studiato.

Facendo l'esempio per F avremo:

$$\frac{\partial J^{-1}\mathcal{F}}{\partial \xi} = \frac{\partial J^{-1}\mathcal{F}}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial \xi} = \mathcal{A}(U) \frac{\partial U}{\partial \xi}$$

dove la matrice $\mathcal{A}(U)$ è chiamata **Jacobiano inviscido dei vettori di flusso convettivo**:

$$\mathcal{A}(U) = \frac{\partial J^{-1}\mathcal{F}}{\partial U} \quad \mathcal{B}(U) = \frac{\partial J^{-1}\mathcal{G}}{\partial U} \quad \mathcal{C}(U) = \frac{\partial J^{-1}\mathcal{H}}{\partial U}$$

- Se $A, B, C \neq \text{cost}$: ottengo **Equazioni di Eulero Quasi-Lineari**
- Se $A, B, C = \text{cost}$: ottengo **Equazioni di Eulero Lineari**

Allora raggruppando tutti i termini sopra discussi si ottengono le equazioni di Eulero Linearizzate:

$$\frac{\partial J^{-1}\mathcal{U}}{\partial t} + \mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \zeta} = 0$$

Modelli di equazioni differenziali scalari alle derivate parziali che possono essere utili per lo sviluppo di schemi numerici per CFD sono quelli riportati qui sotto:

- Simple advection equation: $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (a constant advection velocity)
- Advection equation: $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
- Burger's (advection/diffusion) equation: $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

La prima equazione presentata è la **Avvezione Semplice**, caratterizzata da una velocità di trasporto costante, rappresentando il modello più elementare per le equazioni di Eulero in una dimensione. La seconda equazione, invece, descrive una **Avvezione con velocità di trasporto variabile** u , offrendo un modello scalare più raffinato per le stesse equazioni di Eulero monodimensionali. La terza equazione è quella di **Burgers**, che in un contesto monodimensionale, si riferisce a un **modello convettivo-diffusivo**, comprendendo un termine temporale (derivata prima rispetto al tempo), un termine convettivo (derivata prima rispetto allo spazio) e un termine diffusivo (derivata seconda rispetto allo spazio). La ν rappresenta una grandezza scalare positiva, interpretata come una forma di viscosità. Infine, l'ultima equazione menzionata è un modello scalare semplificato delle equazioni di Navier-Stokes. A differenza del modello precedente, non è monodimensionale poiché le equazioni di Navier-Stokes non sono definibili in una sola dimensione a causa dei termini viscosi, che implicano immediatamente un contesto bidimensionale. Il trasporto diffusivo di quantità di moto (QDM) avviene prevalentemente in direzione trasversale al flusso. Per le equazioni di Navier-Stokes, un'analisi monodimensionale è fattibile solo se si ignorano i termini viscosi o se si modellano gli effetti viscosi come nei tubi, introducendo un fattore di attrito e non considerando direttamente gli sforzi di taglio, i quali non avrebbero significato in un contesto unidimensionale, dato che sono connessi alle derivate della velocità in direzione trasversale.

3. Mathematical properties of the equations of Fluid Dynamics

In generale la maggior parte dei problemi fisici (non di fluidodinamica specifica, ma di fisica classica in generale, cioè quella fisica che fa riferimento alla Meccanica dei Continui) possono essere raggruppati in 2 grandi categorie:

- **Problemi di equilibrio:** sono descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo ellittico. In sostanza, una variazione dei valori in un punto al confine (cioè, sulla frontiera) si riflette, in misura variabile, su tutto il dominio in cui l'equazione è definita. I problemi di equilibrio sono caratterizzati dal fatto che l'informazione legata a una perturbazione al confine non si trasmette in direzioni preferenziali, ma si propaga istantaneamente in tutto il dominio di calcolo, in tutte le direzioni. Sono tipicamente problemi stazionari come la distribuzione delle temperature in un solido (governata dalla Legge di Fourier) oppure le equazioni che regolano il flusso a potenziale in un fluido incompressibile. Per tali problemi le equazioni possono essere sempre ricondotte ad una forma di equazione di Laplace, ovvero l'equazione di Poisson ($\nabla^2 U = S$), in cui S è il termine sorgente, mentre U è il termine incognito.
- **Problemi di propagazione:** possono essere governati da equazioni paraboliche o iperboliche. I problemi di propagazione si dividono ulteriormente in **problemi ai valori iniziali**, dove la soluzione è nota a un certo istante iniziale e sono governati da equazioni iperboliche, e **problemi misti ai valori iniziali e al contorno**. Questi ultimi possono essere regolati sia da equazioni iperboliche che paraboliche. Un esempio tipico di equazione iperbolica è l'equazione delle onde, nota anche come equazione di D'Alembert.

Per riconoscere il carattere matematico di una data equazione differenziale si può partire considerando una generica equazione differenziale lineare alle derivate parziali del secondo ordine che può essere scritta con una formulazione generale del tipo:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{lower order terms} = s$$

Con u funzione incognita e l'equazione riferita ad un sistema di riferimento cartesiano; se a, b, c sono costanti l'equazione è **puramente lineare** mentre se a, b, c sono a loro volta funzioni di x, y, z e della soluzione u l'equazione è detta **quasi lineare**. I termini di ordine inferiore contengono le derivate prime di u . Considerando il discriminante costruito con i coefficienti del secondo ordine $\Delta = b^2 - 4ac$. Possiamo avere tre casi:

| Δ | PDE type |
|----------|------------|
| <0 | elliptic |
| =0 | Parabolic |
| >0 | hyperbolic |

Ora, basandoci su quanto discusso, desideriamo esaminare le proprietà matematiche delle equazioni di Eulero, sia nella loro forma lineare che in relazione a un sistema generale di coordinate curvilinee (ξ, η, ζ) :

$$\frac{\partial J^{-1}U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial \xi} + B \frac{\partial U}{\partial \eta} + C \frac{\partial U}{\partial \zeta} = 0$$

Questa equazione vettoriale, composta da più equazioni scalari, può essere riformulata come un **sistema di equazioni di propagazione**. Questo processo, noto come "**Decomposizione delle equazioni di Eulero in equazioni d'onda semplice**", è fondamentale per comprendere il carattere matematico delle equazioni di Eulero e per avere una chiara visione delle proprietà di propagazione del sistema di equazioni che intendiamo risolvere, dato che la propagazione delle perturbazioni definisce in gran parte il comportamento della soluzione.

La condizione di iperbolicità del sistema di equazioni di Eulero si traduce nell'esistenza di **soluzioni di tipo onda semplice**, come mostrato di seguito, che rappresentano un'onda semplice che si propaga nella direzione generica k con pulsazione ω :

$$U = \hat{U} e^{k \cdot s - \omega t}$$

dove \hat{U} è il termine che dipende dalle coordinate, mentre S è la ascissa curvilinea misurata lungo la direzione k di propagazione dell'onda.

Per garantire che una soluzione d'onda semplice soddisfi il sistema di equazioni di Eulero e assicuri l'iperbolicità del sistema, è necessario che gli **autovalori** della matrice A_k (matrice relativa alla direzione k) siano **reali** e abbiano **autovettori linearmente indipendenti**. In altre parole, se la matrice A_k ha autovalori reali con autovettori linearmente indipendenti, esiste una soluzione per l'equazione di Eulero in questa forma, garantendo così l'iperbolicità del sistema.

$$\mathbf{A}_k = \mathcal{A}_{k\xi} + \mathcal{B}_{k\eta} + \mathcal{C}_{k\zeta}$$

Dove A, B e C sono le matrici Jacobiane dei termini convettivi lungo le proiezioni del versore k sui 3 assi del sistema di riferimento curvilineo.

Gli **autovalori della matrice A_k** si ottengono annullando il polinomio caratteristico. Se λ_k rappresenta un autovalore generico, il determinante della matrice $|\lambda_k I - A_k|$ deve essere uguale a 0. Calcolando gli autovalori, si può dimostrare che, sia in 2 che in 3 dimensioni, questi sono tutti reali e hanno la forma riportata qui:

$$\lambda_{\kappa}^{(1)} = (Q_n - a)S_{\kappa} \quad \lambda_{\kappa}^{(2)} = \lambda_{\kappa}^{(3)} = \lambda_{\kappa}^{(4)} = Q_n S_{\kappa} \quad \lambda_{\kappa}^{(5)} = (Q_n + a)S_{\kappa}$$

dove $a = \sqrt{\gamma RT}$ rappresenta la velocità del suono, mentre n costituisce il versore normale alla superficie.

Sotto queste specifiche condizioni Q_n corrisponde alla velocità normale alla superficie $k = cost$, cioè alla **velocità del flusso** lungo la direzione n . La componente di velocità Q_n si ottiene normalizzando rispetto al valore dell'area S_k , la velocità controvariante nella direzione k :

$$Q_n = U_{\kappa}/S_{k\kappa} = u \frac{\kappa_x}{S_{\kappa}} + v \frac{\kappa_y}{S_{\kappa}} + w \frac{\kappa_z}{S_{\kappa}}$$

Gli autovalori $\lambda_k^{2,3,4}$ associati alla matrice A_k relativa alla generica direzione k , a meno della normalizzazione (cioè, a meno di S_k), coincidono praticamente con la velocità del flusso in direzione k mentre gli autovalori $\lambda_k^{1,5}$ contengono anche la velocità del suono che va, una volta, a sottrarsi alla velocità del flusso e, un'altra volta, a sommarsi alla velocità del flusso.

Una volta noti gli autovalori, possiamo procedere alla **diagonalizzazione e fattorizzazione** della matrice jacobiana A_k . Per prima cosa si introduce la **matrice diagonale Λ_k degli autovalori**, con gli autovalori disposti sulla diagonale:

$$\Lambda_{\kappa} = \text{Diag} \{ \lambda_{\kappa}^{(1)}, \lambda_{\kappa}^{(2)}, \lambda_{\kappa}^{(3)}, \lambda_{\kappa}^{(4)}, \lambda_{\kappa}^{(5)} \}$$

Si ottiene che $\mathbf{A}_k \mathbf{R}_k = \mathbf{R}_k \Lambda_k$ e $\mathbf{L}_k \mathbf{A}_k = \Lambda_k \mathbf{L}_k$ dove con \mathbf{R}_k si indica la **matrice degli autovettori destri** e con \mathbf{L}_k la **matrice degli autovettori sinistri**. Infine, cambiando le due espressioni si ottiene:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{\kappa} \Lambda_{\kappa} \mathbf{L}_{\kappa}$$

Ad esempio, il prodotto della matrice degli autovettori destri per quella degli autovettori sinistri dà la matrice identità, poiché la matrice degli autovettori destri è l'inversa di quella degli autovettori sinistri.

Questa fattorizzazione ci consente di diagonalizzare il sistema delle equazioni di Eulero in forma linearizzata, trasformandolo in un **sistema di equazioni scalari di advezione disaccoppiate**. In altre parole, possiamo decomporre le equazioni di Eulero in equazioni d'onda semplice.

Nel caso monodimensionale, per una generica direzione k le equazioni in forma monodimensionale pre-moltiplicate per la matrice costituita dagli autovettori sinistri \mathbf{L}_k risultano:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\kappa} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathbf{L}_{\kappa} \mathbf{A}_{\kappa} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \kappa} &= \mathbf{L}_{\kappa} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \Lambda_{\kappa} \mathbf{L}_{\kappa} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \kappa} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \Lambda_{\kappa} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \kappa} &= 0 \quad (2.2) \end{aligned}$$

Praticamente sono passato dall'aver un sistema fatto dalle equazioni di Eulero ad un sistema di equazioni semplici scalari di convezione, disaccoppiate l'una dall'altra (2.2). Dove, dal momento che gli autovettori sono indipendenti dal tempo, si può portare \mathbf{L}_k all'interno del segno di derivata ottenendo il vettore $\mathcal{W} = \mathbf{L}_k * \mathcal{U}$, detto **Vettore delle Variabili Caratteristiche**.

Le variabili che compongono il vettore W sono dette **Variabili Caratteristiche**. Il Vettore delle Variabili Caratteristiche è definito nel seguente modo:

$$\delta W = \mathbf{L}_\kappa \delta U = \left[\delta p - \frac{\delta p}{a^2}, \frac{1}{2a^2}(\delta p - \rho a \delta Q_n), \frac{\rho}{a} \delta Q_{T1}, \frac{\rho}{a} \delta Q_{T2}, \frac{1}{2a^2}(\delta p + \rho a \delta Q_n) \right]^T$$

(Nel termine tra parentesi tonde dell'ultima componente sostituire + con -)

La disposizione dei 5 termini che compongono il Vettore delle Variabili Caratteristiche dipende direttamente dalla numerazione degli autovalori. Se si cambia la numerazione degli autovalori, le Variabili Caratteristiche si scambiano di posto all'interno del vettore. Utilizzando questo procedimento e sfruttando il fatto che le equazioni di Eulero sono iperboliche, con 5 autovalori reali e 2 set completi di autovettori destri e sinistri linearmente indipendenti, è possibile decomporre il sistema di equazioni di Eulero in un sistema di equazioni disaccoppiate di onda semplice, ovvero in equazioni scalari di convezione disaccoppiate tra loro.

La **variazione** della variabile caratteristica fornisce l'**ampiezza dell'onda viaggiate** ad essa associata (δw_i), mentre l'autovalore corrispondente fornisce la **velocità di propagazione dell'onda** λ_k^i . Per l' i -esima variabile caratteristica si può scrivere:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_\kappa^{(i)} \frac{\partial w_i}{\partial \kappa} = 0$$

Il processo di decomposizione permette quindi di ottenere un sistema di 5 equazioni di trasporto (equazioni d'onda), ciascuna con ampiezza corrispondente alla variabile caratteristica w_i , e velocità pari al corrispondente autovalore λ_k^i .

Inoltre, invertendo la relazione e sfruttando la matrice degli autovettori destri, si ottiene una relazione che esprime la decomposizione delle variabili conservative in funzione delle ampiezze delle onde, ovvero delle variabili caratteristiche:

$$\delta U = \delta W \mathbf{R}_\kappa = \delta w_i \mathbf{R}^{(i)}$$

Questa relazione è particolarmente interessante perché descrive come la variazione delle variabili conservative δU in un punto del dominio possa essere scomposta in contributi derivanti da soluzioni d'onda semplice. In altre parole, la variazione dello stato di moto del sistema in un punto specifico del dominio è determinata dalle onde che raggiungono quel punto. Queste onde hanno un'ampiezza corrispondente alle variabili caratteristiche.

Quindi, ciascuna delle cinque onde che compongono la soluzione di quel sistema contribuisce, in parte, alla variazione dello stato fisico in ogni punto del dominio. il significato fisico di quest'onde è riassunto nella tabella seguente:

| Wave amplitude | Characterization | Phase velocity |
|---|---|------------------------------|
| $\delta w_1 = \delta p - \frac{\delta p}{a^2}$ | Entropy wave | $\lambda^{(1)} = Q_n S$ |
| $\delta w_2 = \frac{1}{2a^2}(\delta p - \rho a \delta Q_n)$ | Slow acoustic (upstream running) wave | $\lambda^{(2)} = (Q_n - a)S$ |
| $\delta w_3 = \frac{\rho}{a} \delta Q_{T1}$ | Vorticity wave | $\lambda^{(3)} = Q_n S$ |
| $\delta w_4 = \frac{\rho}{a} \delta Q_{T2}$ | Vorticity wave | $\lambda^{(4)} = Q_n S$ |
| $\delta w_5 = \frac{1}{2a^2}(\delta p + \rho a \delta Q_n)$ | Fast acoustic (downstream running) wave | $\lambda^{(5)} = (Q_n + a)S$ |

- ω_1 (**onda di entropia**): La prima variabile caratteristica, la cui variazione $\delta \omega_1$ è data dall'espressione riportata sopra, mostra chiaramente come l'onda che trasporta questa informazione leghi le **variazioni di densità a quelle di pressione**. Pertanto, si tratta di un'onda di entropia, che trasporta informazioni sull'entropia stessa. Questa informazione, e quindi l'onda, viaggia alla velocità del flusso nella direzione considerata, a meno della normalizzazione S . Le variazioni di entropia si muovono lungo le traiettorie delle linee di flusso. L'entropia è una variabile trasportata per convezione pura, e lungo la traiettoria dell'elemento fluido (streamline) si muovono sia la massa dell'elemento fluido che le variazioni di entropia.

- ω_2 (**onda acustica lenta**): La seconda variabile caratteristica, la cui variazione $\delta\omega_2$ è data dall'espressione riportata sopra, mostra chiaramente come l'onda che trasporta questa informazione leghi le **variazioni di velocità con quelle di pressione**. Questo indica che si tratta di un'onda rappresentativa di un **fenomeno isoentropico**, basato su un meccanismo simile al teorema di Bernoulli. Inoltre, anche in un ambiente con fluido in quiete ($Q_n = 0$), tale contributo può esistere, sebbene l'informazione di velocità non venga trasportata. L'onda si propaga con una velocità pari a quella del suono, quindi è un'onda acustica, nota come onda acustica lenta. Questa denominazione deriva dal fatto che, nel caso di flusso non in quiete, l'onda si propaga con una velocità pari a quella del flusso meno quella del suono, risultando in un'onda acustica che si propaga verso monte.
- ω_3, ω_4 (**onde di vorticità**): Consideriamo ora la terza variabile caratteristica, la cui variazione $\delta\omega_3$ è data dall'espressione riportata sopra. Si può subito notare come l'onda che trasporta questa informazione tratti le variazioni delle **componenti di velocità trasversali** rispetto alla direzione locale (n) del moto del flusso. Pertanto, essa è associata a un'onda di vorticità, poiché è legata a uno swirl del moto. La quarta variabile caratteristica ha lo stesso significato della precedente, ma è responsabile della **propagazione dell'informazione dell'altra componente di vorticità**. Nel caso di flusso irrotazionale, con vorticità nulla, entrambe rimangono nulle. Questo suggerisce che esse rappresentino onde di vorticità legate alle 2 componenti di vorticità normali alla direzione k che si propagano alla velocità locale.
- ω_5 (**onda acustica veloce**): la variazione $\delta\omega_5$, ha la stessa espressione della variazione $\delta\omega_2$, ma con segno opposto. Anche in questo caso si tratta di un'onda acustica, poiché collega la **variazione di pressione con la variazione di velocità**. Questa onda si propaga con una velocità pari all'autovalore $\lambda_5 = (Q_n + a)S$. Pertanto, indipendentemente dal fatto che il flusso sia subsonico o supersonico, la direzione di propagazione è quella del flusso, ma con una velocità maggiore. In questo contesto, si parla di onda acustica veloce che si propaga a valle.

Queste considerazioni sono valide sia per il caso **subsonico** che per quello **supersonico**, poiché non sono state fatte ipotesi o assunzioni che escludano uno dei due. Tuttavia, non sono applicabili al **caso incomprimibile**, che non può essere semplicemente ricondotto a un problema di propagazione delle onde.

Interpretando le equazioni di Eulero decomposte come un **sistema di equazioni di advezione semplice**, ovvero di propagazione delle onde, la relazione $\frac{\delta w_i}{dt} + \lambda_k^i \frac{\delta w_i}{\delta k} = 0$ può essere vista come la **derivata materiale** di ciascuna delle variabili caratteristiche mentre l'onda percorre la sua traiettoria:

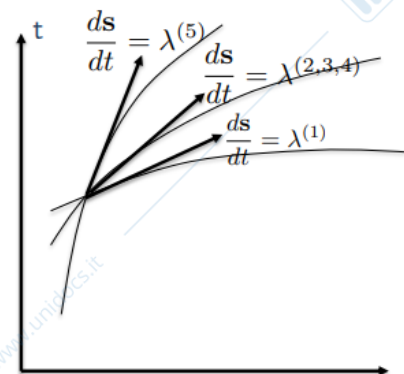
$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_{\kappa}^{(i)} \frac{\partial w_i}{\partial \kappa} = 0$$

Scrivere che $\frac{dw_i}{dt} = 0$ significa che le caratteristiche rimangono costanti durante la loro propagazione lungo le cosiddette linee caratteristiche, definite dalla seguente equazione:

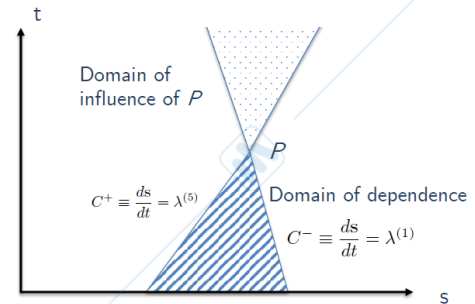
$$\frac{ds}{dt} \cdot \kappa = \lambda^{(i)}$$

Con s vettore tangente a dette linee caratteristiche.

Consideriamo un semplice problema monodimensionale. Riferiamolo a un **piano ST** , dove la distanza percorsa dalle onde lungo la loro traiettoria è sull'asse delle ascisse e il tempo sull'asse delle ordinate. Ogni punto di questo **piano ST** viene raggiunto a un certo istante da una delle linee caratteristiche di ciascun tipo, non più di una, poiché ciò non avrebbe alcun senso fisico. La pendenza delle linee caratteristiche è definita dagli autovalori, quindi la **pendenza minore** $\lambda^2 = (Q_n - a)S$ corrisponde all'**onda acustica lenta**, mentre la **pendenza maggiore** $\lambda^5 = (Q_n + a)S$ corrisponde all'**onda veloce**. Quella intermedia alle due onde di vorticità e all'onda di entropia.



Ogni punto P del piano ST rappresenta, in un dato istante, lo **stato fisico** del flusso in una specifica posizione spaziale. Questo punto è raggiunto da un insieme di linee caratteristiche, come mostrato in figura. La caratteristica C^- ha la pendenza minore (autovalore minimo λ^1), mentre la linea C^+ ha la pendenza massima (autovalore massimo λ^5). L'altra linea caratteristica si trova nel mezzo. La porzione di piano campita è l'insieme dei punti del piano s - t , il cui stato fisico ha un effetto sullo stato fisico del punto P all'istante considerato (in quanto ogni caratteristica che si origina in uno di questi punti va a passare per P) ed è detto **dominio di dipendenza del punto P** . Viceversa, l'area puntinata, che si origina superiormente dal punto P , comprende tutti i punti che sono influenzati dalle condizioni in P ; perciò, è detto **dominio di influenza di P** . Quest'ultimo evidenzia visivamente le caratteristiche propagative del sistema dell'equazione di Eulero.



Una variazione dello stato fisico del flusso nel punto P sarà percepita, in istanti diversi, da tutti i punti nel Dominio di Influenza di P . Questa caratteristica è comune a tutti i problemi di tipo iperbolico, non solo a quelli di fluidodinamica, e ci aiuta a comprendere il significato fisico del problema iperbolico: un problema iperbolico è caratterizzato da zone del dominio che non interagiscono con altre zone del dominio. Al contrario nei problemi ellittici qualsiasi perturbazione che si generi in un qualsiasi punto si ripercuote su tutto il dominio.

In questo modo, abbiamo caratterizzato il **sistema delle equazioni di Eulero linearizzate in forma non stazionaria** dal punto di vista delle sue proprietà propagative:

$$A \frac{\partial U}{\partial \xi} + B \frac{\partial U}{\partial \eta} + C \frac{\partial U}{\partial \zeta} = 0$$

Come anticipato nelle precedenti lezioni, questo non semplifica la vita, anzi, la complica notevolmente. A differenza della **forma non stazionaria**, la **forma stazionaria** delle equazioni di Eulero linearizzate non ha un carattere matematico ben definito. Infatti, le equazioni di Eulero stazionarie risultano **ellittiche** per **flussi subsonici** e **iperboliche** per **flussi supersonici**. Quindi, se sono sicuro di avere un campo di moto subsonico, userò solutori per problemi ellittici; viceversa, per un flusso supersonico, userò solutori per problemi iperbolici. Il problema nasce nei casi frequenti in cui, in un determinato dominio di calcolo, coesistono entrambi i regimi di flusso, ovvero nei **casi transonici**. Questo rende estremamente complicata la risoluzione numerica delle equazioni di Eulero poiché richiedono l'integrazione di due diversi schemi di soluzione e la gestione delle zone di transizione tra i due metodi.

La **formulazione Time-Dependent** è molto più adeguata ai nostri scopi. Essendo **iperbolica**, ha un carattere matematico ben definito e beneficia di una vasta gamma di schemi numerici sviluppati per la risoluzione di problemi di propagazione ondosa, comuni in molte discipline della fisica classica. Pertanto, l'equazione di Eulero in forma dipendente dal tempo è preferibile anche per problemi stazionari. Per **problemi non stazionari**, è ovvio che si deve utilizzare una formulazione dipendente dal tempo. Nel **caso stazionario**, si adottano i cosiddetti metodi "**time dependent**" o "**time marching**", dove si parte da una soluzione iniziale non fisica e si procede iterativamente nel tempo, mantenendo condizioni al contorno fisse, fino a raggiungere asintoticamente la soluzione stazionaria.

Le equazioni di Eulero per **flussi incomprimibili**, siano essi stazionari o non stazionari, mantengono un carattere **misto ellittico-iperbolico** a causa della perdita del termine evolutivo nell'equazione di continuità. Abbiamo già discusso come affrontare questo problema con metodi dipendenti dal tempo, come il **metodo della comprimibilità artificiale**. Inserendo la comprimibilità artificiale nelle equazioni di Eulero per il caso incomprimibile, il sistema misto ellittico-iperbolico si trasforma in un sistema puramente iperbolico, integrabile numericamente nel tempo con tecniche sviluppate per flussi comprimibili. Non si tratta più di equazioni per flussi incomprimibili, ma di equazioni per flussi artificialmente comprimibili. Una volta raggiunta la soluzione stazionaria, il termine dipendente dal tempo nell'equazione di continuità si annulla, recuperando la forma a divergenza nulla del campo di velocità.

Il metodo della comprimibilità artificiale può essere utilizzato anche per **flussi fisicamente incomprimibili**, come **liquidi** o **flussi di gas a velocità molto basse**. I problemi riscontrati con le equazioni incomprimibili rappresentano un limite teorico, poiché esiste una zona grigia in cui il flusso è poco comprimibile. Questa situazione presenta difficoltà che

possono essere superate con **metodi di preconditionamento**, utili per mitigare i problemi di **stiffness**. Per comprendere meglio, possiamo fare riferimento alle metodologie CFD. Queste si basano sulla discretizzazione delle equazioni di governo, trasformando le equazioni differenziali alle derivate parziali in un sistema di equazioni algebriche. Trattiamo casi lineari, risultando in un sistema di equazioni lineari risolvibili con metodi iterativi. Tuttavia, questi metodi possono incontrare difficoltà in assenza di dominanza diagonale, causando errori significativi e impedendo la convergenza. Per risolvere questo problema, si utilizza la tecnica del pivoting, scambiando le righe della matrice per ripristinare la dominanza diagonale, ovvero avere i coefficienti massimi sulla diagonale. In altre parole, il pivoting funge da preconditionamento, rendendo il sistema risolutivo a dominanza diagonale.

Per comprendere l'origine della **stiffness**, dobbiamo considerare gli autovalori, che rappresentano le velocità di propagazione delle onde, la cui ampiezza è definita dalle variabili caratteristiche. λ^1 è la velocità di propagazione dell'onda lenta, mentre $\lambda^{2,3,4}$ sono le velocità di propagazione rispettivamente dell'onda di entropia e delle due onde di vorticità, uguali alle velocità locali del flusso. Infine, λ^5 rappresenta la velocità di propagazione dell'onda acustica veloce. Nel caso di **flussi comprimibili**, sia subsonici che supersonici, l'ordine di grandezza di Q_n e a è lo stesso, comportando che le varie perturbazioni si propagano con velocità comparabili all'interno del dominio. Al contrario nel **caso incomprimibile o poco comprimibile** la velocità del suono risulta molto alta, ordini di grandezza maggiori della velocità locale del flusso e quindi ne consegue che le velocità di propagazione λ^1 e λ^5 risultano estremamente diverse, ovvero una fortemente positiva, l'altra fortemente negativa, ed entrambe in valore assoluto molto diverse dalle velocità di propagazione dell'altre tre onde (entropia e vorticità). Questo comportamento nei sistemi iperbolici prende il nome di stiffness. In queste condizioni, gli schemi numerici per la soluzione delle equazioni tendono a divenire instabili, a meno che non si ricorra a discretizzazioni spaziali e temporali estremamente fini.

Per mitigare il problema della **stiffness**, possiamo utilizzare **metodi di preconditionamento**, come il metodo della comprimibilità artificiale. Applicando questo metodo, la matrice jacobiana A_k , relativa a una direzione generica k , assume la forma mostrata qui di seguito:

$$\tilde{A}_k = S_k \begin{bmatrix} 0 & \beta n_x & \beta n_y & \beta n_z \\ n_x & n_x u + Q_n + n_t & n_y u & n_z u \\ n_y & n_x v & n_y v + Q_n + n_t & n_z v \\ n_z & n_x w & n_y w & n_z w + Q_n + n_t \end{bmatrix}$$

In definitiva, i 5 autovalori hanno nuovamente tutti lo stesso ordine di grandezza e tutte le perturbazioni si propagano con velocità comparabili. Abbiamo risolto il problema della stiffness. Per una taratura fine, in modo da equalizzare il più possibile le velocità di propagazione, possiamo agire sul valore del coefficiente β , che funge sostanzialmente da **parametro di rilassamento**. Questo può essere finemente modulato per massimizzare la velocità di convergenza. In genere, il valore ottimale di β non si discosta molto dall'unità.

4. Basics of finite-difference methods Consistency, stability, and convergence of numerical methods

Passiamo ora dai concetti teorico-matematici ai metodi numerici. Finora abbiamo stabilito delle linee guida che impongono vincoli ai metodi numerici per ottenere una soluzione numerica discreta del problema fisico trattato. Esamineremo quindi la consistenza, la stabilità e la convergenza di questi metodi.

Per questa trattazione, è utile ragionare in termini di **differenze finite**. Tuttavia, i codici di calcolo più diffusi a livello industriale, specialmente nei contesti dei metodi RANS e URANS, utilizzano il **metodo degli elementi finiti**. Per queste applicazioni, il metodo delle differenze finite è quasi del tutto abbandonato a causa della sua scarsa versatilità.

Un passo fondamentale per la soluzione numerica di un sistema di equazioni alle derivate parziali è la **discretizzazione**, che avviene inizialmente in 2 fasi. La discretizzazione è il processo mediante il quale un'equazione differenziale alle derivate parziali, espressa in forma analitica e con soluzione continua nel suo dominio, viene sostituita con un'espressione analoga ma differente, la cui soluzione è definita in un numero finito di punti discreti all'interno del dominio di calcolo.

Per chiarire il concetto, consideriamo un dominio bidimensionale riferito a un sistema di coordinate cartesiane (x, y) . Il metodo più semplice per discretizzare questo dominio è utilizzare una **griglia quadrata regolare ed equispaziata**, dove ogni quadrato rappresenta una cella di calcolo. La **soluzione** $u(x, y)$ della PDE viene quindi approssimata nel punto generico della griglia (x_i, y_i) con la funzione u_{ij} , definita solo nei nodi della griglia di calcolo.

Un'approssimazione alle differenze finite del problema differenziale iniziale può essere ottenuta tramite la serie di Taylor. Considerando un punto generico del dominio con coordinate (x, y) e spostandoci di un passo $\pm h$ della griglia, che supponiamo equispaziata (cioè, i nodi sono equidistanti sia lungo x che lungo y), la soluzione nel punto $(x \pm h, y)$ sarà data da:

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^3)$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^3)$$

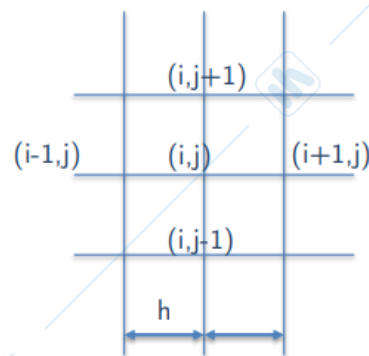
Se alla serie di Taylor continua sostituiamo la soluzione discreta si ottiene:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + O(h^3)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} + O(h^3)$$

Dagli sviluppi in serie di Taylor espressi in forma discreta si possono ottenere diverse approssimazioni per la derivata prima nel punto sotto analisi. In particolare, si distinguono tre casi:

1. Portando nella prima di queste formule, se si sottrae il termine u_{ij} al primo membro e si divide per h , si ottiene l'approssimazione della derivata di u rispetto alla x attraverso una **differenza su due punti in avanti al primo ordine di accuratezza** della derivata $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ij}$. L'ordine di accuratezza di questa discretizzazione è del primo ordine.
2. Procedendo analogamente con la seconda formula e cambiando segno, si ottiene l'approssimazione della derivata di u rispetto a x tramite **differenza su due punti all'indietro al primo ordine di accuratezza** della derivata $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ij}$. Anche questa formula è approssimata al primo ordine.



3. Sottraendo la seconda espressione dalla prima, otteniamo un'approssimazione della derivata di u rispetto a x centrale su 3 punti. Questa ha un **ordine di accuratezza** pari a h^2 cioè, del **secondo ordine**. Si dice su 3 punti perché la "molecola di calcolo" comprende 3 punti: quello precedente, quello successivo e il punto attuale/centrale (i, j) . Il coefficiente del punto attuale è 0, quindi non compare direttamente nell'espressione, ma coinvolge comunque 3 punti: quello in cui si valuta la derivata, quello a monte e quello a valle. Questa è un'approssimazione del secondo ordine.

| $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}$ | Order of accuracy | Approximation |
|--|-------------------|---------------------|
| $(u_{i+1,j} - u_{i,j})/h$ | $O(h)$ | 2-point forward FD |
| $(u_{i,j} - u_{i-1,j})/h$ | $O(h)$ | 2-point backward FD |
| $(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})/2h$ | $O(h^2)$ | 3-point central FD |

Per ottenere un'approssimazione di ordine superiore, è necessario ampliare la molecola di calcolo. La regola generale stabilisce che il numero di punti richiesti per ottenere un certo ordine è uguale all'ordine più 1. Ad esempio, per un'approssimazione di secondo ordine, sono necessari 3 punti. In questi casi, è possibile scegliere i coefficienti dei valori della funzione nei punti in modo tale che compaia implicitamente un ulteriore punto con coefficiente nullo, permettendo di ottenere ordini di approssimazione pari al numero di punti considerati. Questo metodo è noto come **schema alle differenze di tipo compatto**. La differenza centrale ha quindi un ordine di accuratezza maggiore, ma è definita su un maggior numero di punti. Differenze finite in avanti e indietro su tre punti sono accurate al secondo ordine. Gli schemi di calcolo più accurati per calcoli DNS arrivano fino al 12° ordine coinvolgendo quindi 13 punti per il calcolo delle derivate. Nei calcoli LES si usano schemi del 4°-6° ordine mentre per RANS e URANS si scende al 2°-3° ordine.

Considerando gli sviluppi di Taylor visti sopra e sommando le espressioni per $u_{i+1,j}$ e $u_{i-1,j}$ si può ottenere l'approssimazione al secondo ordine della derivata seconda di u :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

Otteniamo che il **termine del primo ordine** si annulla a causa del segno opposto, lasciando un'approssimazione al **secondo ordine**. È come interpolare la derivata seconda tramite una parabola passante per tre punti, che consente di ottenere un'approssimazione al secondo ordine della derivata seconda.

Per conferire consistenza e omogeneità nella simbologia delle trattazioni alle differenze finite, è tipico introdurre gli **operatori di differenza in avanti, differenza centrale e differenza all'indietro**:

$$\delta_i^+ = u_{i+1,j} - u_{i,j} \quad \delta_i^2 = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \quad \delta_i^- = u_{i,j} - u_{i-1,j}$$

4.1. Consistency, stability, and convergence

Per introdurre i concetti di **consistenza, stabilità e convergenza**, si considera un problema monodimensionale del secondo ordine, come ad esempio la conduzione non stazionaria del calore in una barra. Si suppone di voler risolvere numericamente l'equazione, con le appropriate condizioni al contorno, utilizzando un metodo alle differenze finite.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Il metodo più naturale per discretizzare la derivata temporale è tramite una differenza in avanti, mentre per la discretizzazione della derivata spaziale si può scegliere tra varie alternative: in questo caso si adotta una differenza seconda centrale al secondo ordine con riferimento all'istante temporale attuale. Si ottiene quindi un problema del **primo ordine nel tempo e del secondo ordine nello spazio**, lineare rispetto alle costanti (assumendo che $u = cost$, infatti il problema è lineare). Risolviamo questo problema con il metodo delle differenze finite. Lo schema di risoluzione più semplice si ottiene considerando nota la soluzione a un certo istante su tutto il dominio (derivata dalla soluzione all'istante precedente), quindi u_i è nota per ogni i all'istante temporale $n - \text{esimo}$ considerato. Un semplice schema

risolutivo dell'equazione può essere realizzato utilizzando una differenza centrale nello spazio per approssimare le derivate seconde e una differenza in avanti del primo ordine nel tempo per approssimare la derivata al primo membro. Indicando con Δx il **passo della griglia monodimensionale** e con Δt il **passo temporale**, supposti entrambi costanti, si ottiene:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \mu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

L'approssimazione FDE è uguale all'equazione originale (PDE) a meno di un **errore di troncamento** che contiene i termini di ordine superiore (secondo ordine nel tempo e terzo ordine nello spazio): esso è ovviamente presente in quanto nel passaggio da PDE a FDE si effettua un'approssimazione.

$$\overbrace{\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{PDE} = \overbrace{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \mu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x}}^{FDE} + \overbrace{\left[-\frac{\partial^3 u^n}{\partial t^3} \frac{\Delta t}{2} + \mu \frac{\partial^3 u^n}{\partial x^3} \frac{\Delta x^2}{12} + \dots \right]}^{\text{Truncation Error}}$$

Quello appena ottenuto viene detto **schema esplicito** per la soluzione dell'equazione alle differenze finite in quanto la soluzione al tempo $n + 1$ è funzione soltanto della soluzione al tempo n che si suppone essere nota; non sono necessarie quindi iterazioni per passare dal tempo n al tempo $n + 1$. L'equazione che segue è detta **equazione di ricorrenza**:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \beta (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad , \quad \beta = \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Se conosciamo la soluzione u_i^n , la soluzione al livello temporale successivo u_i^{n+1} la possiamo calcolarla immediatamente con la seguente equazione. Essa, infatti, restituisce la soluzione u_i^{n+1} in funzione della sola soluzione al livello temporale precedente. Inoltre, in tale equazione compare β , il quale è un parametro formato dalla **diffusività** che moltiplica il rapporto tra il **time step** e la **spaziatura della mesh** al quadrato. Questo è un esempio di schema esplicito. Uno schema esplicito, infatti, fornisce una soluzione in ogni punto del dominio di calcolo a ogni passo temporale, basandosi esclusivamente sulla soluzione del passo temporale precedente.

Quando costruiamo lo schema a partire dalle equazioni differenziali parziali (PDE), scegliamo di considerare nota la soluzione al livello temporale n e di scrivere il secondo membro dell'equazione tutto al livello temporale n . Tuttavia, questa è una nostra scelta e non necessariamente lo schema corretto. Potremmo, infatti, richiedere un'approssimazione della derivata seconda rispetto ad x al passo temporale attuale, cioè al passo temporale $n + 1$.

In alternativa, è possibile discretizzare la derivata seconda spaziale utilizzando una differenza in avanti riferita al tempo $n + 1$. In tali circostanze si ottiene la seguente formulazione:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \mu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

In questo schema, l'accuratezza è paragonabile a quella dello schema precedente; tuttavia, il valore della soluzione al tempo $n + 1$ è influenzato non solo dalla soluzione al tempo n , ma anche dalle soluzioni nei punti adiacenti al tempo $n + 1$. Tale schema è definito implicito. Nell'ambito delle equazioni lineari, uno **schema implicito**, come quello appena descritto, comporta la creazione di un **sistema lineare multidagonale**, la cui complessità dipende dall'ordine di discretizzazione scelto per i vari termini. Ad esempio, optando per una discretizzazione di secondo ordine per la derivata seconda, si ottiene un sistema tridiagonale; scegliendo invece un approccio di terzo ordine, il sistema diventa pentadiagonale, e così via.

$$-\beta u_{i+1}^{n+1} + (1 + 2\beta)u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} = u_i^n$$

Il **sistema tridiagonale** in questione presenta una buona condizione, essendo caratterizzato da **dominanza diagonale**. Ciò significa che i termini più significativi si trovano sulla diagonale principale, dove sono situati i termini che moltiplicano u_i al tempo $n + 1$. Sulla diagonale sinistra si posizionano i termini relativi u_{i+1}^{n+1} al tempo $n + 1$, mentre sulla diagonale destra si collocano quelli relativi u_{i-1}^{n+1} al tempo $n + 1$. Di conseguenza, il coefficiente di valore assoluto maggiore è associato al termine u_i^{n+1} al tempo $n + 1$ garantendo la stabilità del sistema.

Il **metodo esplicito** è generalmente più semplice da implementare poiché fornisce direttamente il valore della funzione al tempo $n + 1$ basandosi sui valori al tempo n . D'altra parte, il **metodo implicito**, pur essendo più complesso poiché richiede la soluzione di un sistema tridiagonale, offre vantaggi in termini di stabilità, specialmente per problemi stiff. Esistono algoritmi efficienti per risolvere sistemi tridiagonali, come l'**algoritmo di Thomas**, che sono noti per la loro alta efficienza computazionale. Nonostante ciò, il metodo implicito è intrinsecamente più complesso da formulare, programmare e risolvere, risultando più oneroso dal punto di vista computazionale. Inizialmente, potrebbe sembrare meno conveniente optare per un metodo implicito rispetto a uno esplicito, ma la scelta dipende dalle specifiche esigenze.

Quando si adotta un approccio numerico per risolvere un'equazione alle differenze finite mediante l'uso di un calcolatore, sia che si tratti di un **metodo implicito** o **esplicito**, la soluzione approssimata ottenuta, qui indicata con \tilde{u}_i^n differirà inevitabilmente dalla soluzione esatta. Questa discrepanza origina dalla rappresentazione limitata dei numeri reali all'interno dei calcolatori, i quali memorizzano i valori con un numero finito di cifre. Tale limitazione introduce un errore intrinseco, noto come **errore di troncamento**, che devia la soluzione numerica da quella teorica esatta.

In generale, è possibile affermare che la **soluzione esatta** di un problema, indicata con u_i^n , corrisponde alla **soluzione approssimata** \tilde{u}_i^n , calcolata attraverso metodi numerici, a cui si aggiunge un termine di **errore** ϵ . Tale termine rappresenta l'errore di arrotondamento, ovvero l'imprecisione che si verifica quando un calcolatore esegue una serie di operazioni aritmetiche, arrotondando i risultati a un numero limitato di cifre significative.

$$u_i^n = \tilde{u}_i^n + \epsilon$$

In accordo con ciò, una rappresentazione alle differenze finite di un'equazione alle derivate parziali si definisce **consistente** con l'equazione di partenza, qualora l'errore di troncamento associato tenda a 0 per passi temporali Δt e della discretizzazione spaziale Δx che tendano a 0 a loro volta. L'**errore di troncamento**, quindi, è la discrepanza tra l'equazione differenziale originale e la sua formulazione discreta ottenuta mediante l'applicazione del metodo delle differenze finite.

Altro concetto fondamentale è quello della **stabilità**. La stabilità è un principio cruciale, particolarmente rilevante per i problemi evolutivi (problemi di propagazione), che sono caratterizzati da equazioni iperboliche o paraboliche. Questo principio stabilisce che uno **schema numerico** si considera stabile quando **non permette l'amplificazione degli errori**, sia di troncamento che di arrotondamento, al procedere dei time step. In termini più specifici, la stabilità di uno schema numerico si verifica quando l'errore complessivo non aumenta man mano che si passa da un intervallo temporale all'altro. Questa proprietà è fondamentale perché assicura che le approssimazioni numeriche rimangano affidabili nel corso delle simulazioni temporali. Quando uno schema soddisfa questo criterio, viene definito stabile, garantendo così la coerenza e l'affidabilità dei risultati ottenuti.

Il terzo principio fondamentale da introdurre è quello di **convergenza**, che presenta analogie e differenze rispetto al concetto di consistenza. Mentre la consistenza si occupa del rapporto tra le equazioni analitiche e le loro controparti discretizzate, la convergenza si focalizza sulle soluzioni di tali equazioni. Uno schema numerico si definisce convergente quando, diminuendo progressivamente il time step e la dimensione della mesh verso 0, la soluzione dell'equazione discretizzata si avvicina sempre più a quella dell'equazione differenziale originale. In sostanza, mentre la consistenza valuta la fedeltà delle equazioni discretizzate rispetto a quelle analitiche, la convergenza esamina l'**accuratezza delle soluzioni ottenute** mediante tali equazioni discretizzate.

Nell'ambito dei **problemi lineari**, si può enunciare un teorema cruciale, noto come **teorema di equivalenza di Lax**. Questo afferma che, per un problema lineare ai valori iniziali ben definito, se si dispone di un'approssimazione discreta e consistente, allora la **stabilità diventa una condizione necessaria e sufficiente per garantire la convergenza**. In altre parole, se si adotta uno schema di soluzione che rispetta una forma discreta dell'equazione originale, mantenendo coerenza e stabilità, allora si può anche aspettare che tale schema sia convergente. La prova formale di questo teorema è fattibile unicamente nel contesto lineare; tuttavia, il teorema di Lax serve come preziosa linea guida anche per i problemi non lineari.

4.2. Stability analysis of numerical schemes

Vediamo di applicare questi concetti all'**equazione di avvezione semplice**, la quale rappresenta un modello monodimensionale di un'equazione del primo ordine (equazione di Eulero) che ha la forma che vedete qui riportata:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

dove a rappresenta una **velocità di propagazione delle perturbazioni** sulla soluzione u costante.

Si considerano diversi schemi di discretizzazione di questa equazione con il metodo delle differenze finite: la derivata prima nel tempo è discretizzata con una FDE decentrata in avanti nel tempo; per quanto riguarda la derivata prima nello spazio, si può avere una discretizzazione sia centrata che decentrata indietro. Per entrambi i casi si può avere uno schema esplicito o implicito.

1. Il primo metodo presentato è uno **schema centrale** che utilizza una **discretizzazione di secondo ordine** per la **derivata spaziale** e **di primo ordine** per quella **temporale**. Questo metodo è stato analizzato sia nella sua forma esplicita che in quella implicita, permettendo di esprimere la derivata di u rispetto x al tempo $n + 1$ nel caso implicito e rispetto ad x al tempo n nel caso esplicito:

a) Explicit:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} = -a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{\delta x}$$

b) Implicit:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} = -a \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\delta x}$$

2. Il secondo metodo, invece, è caratterizzato da uno **schema del primo ordine** che impiega **differenze all'indietro** per la discretizzazione. Quindi la derivata temporale è discretizzata come sopra mentre la derivata spaziale è discretizzata con una differenza all'indietro al primo ordine:

a) Explicit:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} = -a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\delta x}$$

b) Implicit:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} = -a \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\delta x}$$

È possibile constatare che per problemi lineari, l'**errore complessivo** ϵ , sia esso derivante da troncamento o arrotondamento, rispetta la stessa equazione del problema. Per dimostrarlo, si può semplicemente formulare l'equazione discreta per la soluzione approssimata e confrontarla con quella della soluzione esatta del problema originale. Se il metodo numerico adottato è coerente, entrambe le soluzioni dovranno necessariamente soddisfare l'equazione discreta. Attraverso la sottrazione delle due, si perviene all'equazione dell'errore, la quale si rivela essere strutturalmente simile all'equazione discreta iniziale.

Per quanto riguarda la **distribuzione spaziale dell'errore**, questa tende ad assumere un **comportamento aleatorio**. Tale distribuzione può essere descritta in termini analitici mediante l'impiego di una **serie di Fourier**, che permette di esprimere le fluttuazioni dell'errore in funzione dello spazio:

$$\epsilon(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m(t) e^{j\alpha_m x}$$

dove E_m è l'ampiezza delle varie armoniche funzioni del tempo, j è l'unità immaginaria ed α_m è il numero d'onda di ciascuna armonica.

Un sistema è definito **stabile** se l'errore misurato in un istante successivo (tempo $n + 1$) non supera quello registrato nell'istante precedente (tempo n). In altre parole, la stabilità è garantita quando l'errore non aumenta man mano che si passa da un intervallo temporale al successivo. Se calcoliamo il rapporto tra l'errore al tempo $n + 1$ e l'errore al tempo n , il risultato è un numero complesso. La **condizione di stabilità** è soddisfatta quando il modulo di questo numero complesso è inferiore o uguale a uno:

$$\left| \frac{\epsilon^{n+1}}{\epsilon^n} \right| = G(\alpha) \leq 1 \quad (\text{amplification factor})$$

Il **rapporto** tra l'errore al tempo $n + 1$ e l'errore al tempo n è funzione del **numero d'onda** e viene definito come **fattore di amplificazione** per quel dato numero d'onda. Questo criterio rappresenta la condizione essenziale di stabilità per lo schema in esame.

1. Studio della **stabilità** dello **schema 1a**, ovvero dello schema esplicito al secondo ordine.

Dal momento che l'errore soddisfa, come abbiamo detto, l'equazione discretizzata possiamo scrivere:

$$\frac{\epsilon_i^{n+1} - \epsilon_i^n}{\delta t} = -\frac{\alpha}{2\delta x} (\epsilon_{i+1}^n - \epsilon_{i-1}^n)$$

svolgendo i calcoli e definendo $\beta = \alpha\delta t/\delta x$ rappresenta quindi un numero (α è una velocità di propagazione, δt è un tempo mentre δx è la spaziatura della griglia) si ottiene che:

$$G^2 = \left| \frac{\epsilon^{n+1}}{\epsilon^n} \right|^2 = 1 + \beta^2 \sin^2 \alpha \geq 1$$

Lo **schema numerico 1a di secondo ordine centrale** è caratterizzato da una **instabilità intrinseca**, indipendentemente dalle condizioni iniziali o dai parametri scelti. Questo significa che, nell'intento di risolvere numericamente l'equazione di avvezione monodimensionale utilizzando tale schema, **non si raggiungerà mai la convergenza desiderata**. Vi è una ragione fisica per tale instabilità, ovvero la differenza centrale non considera il punto centrale di coordinata "i" e le soluzioni si influenzano a coppie; si manifesta quindi un disaccoppiamento dei nodi pari e dispari (questo concetto verrà ripreso più avanti). In termini più tecnici, secondo il teorema di Lax, la mancanza di stabilità di questo schema preclude la possibilità di ottenere una soluzione convergente. Pertanto, è essenziale selezionare uno schema numerico alternativo che garantisca la stabilità e, di conseguenza, la convergenza verso la soluzione corretta dell'equazione di avvezione.

2. Studio della **stabilità** dello **schema 1b**, ovvero dello schema implicito al secondo ordine:

$$\frac{\epsilon_i^{n+1} - \epsilon_i^n}{\delta t} = -\frac{\alpha}{2\delta x} (\epsilon_{i+1}^{n+1} - \epsilon_{i-1}^{n+1})$$

L'equazione, presentata alla pagina precedente per tale schema, mantiene la stessa forma dello schema 1a, tuttavia, il termine a secondo membro, ovvero la derivata spaziale, viene ora valutata al tempo $n + 1$. Procedendo con analoghe semplificazioni adottate nel caso precedente, si giunge a definire una relazione tra gli errori al tempo $n + 1$ e quelli al tempo n , espressa dal seguente rapporto:

$$G^2 = \left| \frac{\epsilon^{n+1}}{\epsilon^n} \right|^2 = \frac{1}{1 + \beta^2 \sin^2 \alpha} \leq 1$$

La transizione da un approccio esplicito a uno implicito ha reso lo **schema incondizionatamente stabile**. Tale stabilità si mantiene a prescindere dalle dimensioni di δt e δx scelte. Naturalmente, la precisione della soluzione sarà proporzionale alla dimensione di δt e δx , ovvero, una discretizzazione più dettagliata garantirà una soluzione discreta che si avvicina maggiormente alla soluzione analitica. In sintesi, l'adozione di una formulazione implicita trasforma uno schema che sarebbe altrimenti instabile in uno stabile in ogni condizione, il che è una verità assoluta per i problemi lineari. Inoltre, per i problemi lineari, uno schema implicito che sia consistente si dimostrerà stabile e, di conseguenza, convergente.

3. Studio della **stabilità** dello **schema 2a**, ovvero uno schema al primo ordine con differenza all'indietro:

$$\frac{\epsilon_i^{n+1} - \epsilon_i^n}{\delta t} = -\frac{\alpha}{\delta x} (\epsilon_i^n - \epsilon_{i-1}^n)$$

Il **fattore di amplificazione** β in questo caso può essere visto come un'equazione parametrica in α che rappresenta un cerchio centrato ($\xi_c = 1 - \beta, \eta_c = 0$) sull'asse reale e raggio β sul piano complesso:

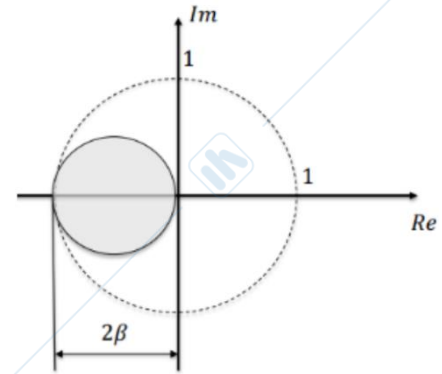
$$\frac{\epsilon^{n+1}}{\epsilon^n} = (1 - \beta) + \beta \cos \alpha - j\beta \sin \alpha = \xi + j\eta$$

Vediamo come interpretare questa situazione dal punto di vista della stabilità. Affinché lo schema sia **stabile** questa circonferenza deve essere contenuta nella **circonferenza con raggio unitario e centrato nell'origine**. Si va quindi ad imporre una condizione su β . Lo schema è condizionatamente stabile perché appunto è influenzata dal valore di β :

- Se $a > 0$ lo schema è **stabile** per $0 < \beta \leq 1$
- Se $a < 0$ lo schema è **incondizionatamente instabile**

Se andiamo invece ad affrontare lo schema con differenza in avanti le condizioni si scambiano.

Dato che il parametro β può essere determinato dall'utente, la strategia prevalente consiste nello stabilire un valore fisso per δx e calcolare il δt_{\max} consentito basandosi sulla condizione di stabilità. Per assicurare la stabilità, è necessario che $\beta \leq 1$; di conseguenza, il time-step massimo viene definito in funzione di questa limitazione.



4.3. Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition

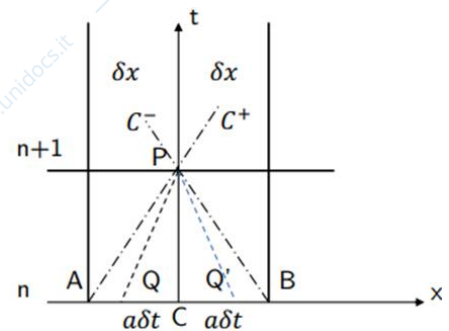
La **condizione CFL**, che prende il nome dalle iniziali di **Courant, Friedrichs e Lewy**, i tre matematici che la identificarono per la prima volta, è un criterio fondamentale per garantire la stabilità degli schemi numerici espliciti utilizzati per risolvere le equazioni differenziali parziali. Secondo questa condizione, **affinché uno schema esplicito sia stabile, è necessario che durante un singolo passo temporale, una perturbazione non si propaghi per una distanza maggiore di quella che separa due nodi consecutivi della griglia di calcolo**. In altre parole, la perturbazione non deve attraversare più di una cella di calcolo per ogni passo temporale.

$$CFL = \beta = \frac{a\delta t}{\delta x}, \quad \delta t = CFL \frac{\delta x}{a}$$

With $CFL < 1$ for stability

Nel caso particolare che si è appena discusso (schema $2a$) si ha che il valore massimo accettabile per la stabilità pari a 1. Nella formula $a\delta t$ corrisponde a quanto si sposta una perturbazione nell'intervallo di tempo, mentre δx è distanza fra celle di calcolo.

La condizione CFL offre un'interpretazione intrigante se analizzata alla luce delle **proprietà di propagazione delle equazioni di partenza** e della **struttura dello schema numerico**. Riprendendo la discussione sul *piano XT*, introdotto in precedenza con le linee caratteristiche, dove l'asse delle ascisse rappresenta lo spazio e quello delle ordinate il tempo, ci concentriamo ora sull'equazione in forma discretizzata. In questo contesto, la soluzione e lo stato del sistema sono definiti in punti discreti del piano. Analizziamo due istanti temporali consecutivi, il livello temporale n e $n + 1$, e prendiamo in considerazione un punto P a una data ascissa x al tempo $n + 1$.



I punti sul *piano XT* che influenzano lo stato di P sono quelli compresi nel suo dominio di dipendenza, come definito dalla teoria delle caratteristiche. Se esaminiamo le 2 caratteristiche, C^+ e C^- , che si intersecano in P al tempo $n + 1$, e individuiamo i loro punti di intersezione con l'asse delle ascisse al tempo n , identifichiamo i punti, Q e Q' . Il dominio di dipendenza di P , nella transizione dal tempo n a $n + 1$, è quindi delineato dal triangolo PQQ' . Quest'area rappresenta il **dominio di dipendenza fisico** di P , determinato dalle equazioni differenziali che governano il sistema.

Nell'analisi di uno schema numerico, è essenziale considerare la **discretizzazione** per stabilire il **dominio di dipendenza numerico** per un dato punto P . Le fluttuazioni all'interno dello schema si diffondono ad ogni intervallo di tempo δt , coprendo una distanza di $a\delta t$. Di conseguenza, il dominio di dipendenza numerico per il punto P è delineato dal triangolo PAB , con il punto A situato a δt prima del punto C , che rappresenta la condizione di P al tempo n . La condizione di Courant-Friedrichs-Lewy (**CFL**) stabilisce che per garantire la stabilità dello schema, il dominio di dipendenza fisico di ciascun punto nello *piano XT* deve rientrare nel dominio di dipendenza numerico corrispondente. Pertanto, è

necessario selezionare il rapporto $a\delta t/\delta x$ in modo che il dominio di dipendenza fisico di P , definito dall'equazione differenziale originale, sia contenuto all'interno del dominio di dipendenza numerico determinato dall'approssimazione discreta dell'equazione. In sostanza, lo schema numerico che calcola l'approssimazione u_i^{n+1} della soluzione nel punto i al tempo $n + 1$ deve incorporare tutte le informazioni che influenzano la condizione fisica in quel punto. Questa è l'interpretazione della condizione *CFL* basata sulla teoria delle caratteristiche e sulle proprietà di propagazione dell'equazione iperbolica iniziale.

Quando la condizione *CFL* è soddisfatta, il dominio di dipendenza numerico si espande.

Esaminando i risultati, si osserva che lo **schema esplicito centrale** è **intrinsecamente instabile**. Questo accade perché, secondo la teoria delle caratteristiche, lo schema utilizza informazioni esterne alla soluzione corrente. In particolare, se la a è positiva, le informazioni possono provenire solo da valle, compromettendo la stabilità del sistema. Questo significa che il punto $i + 1$ non può essere incluso nella discretizzazione senza informazioni sul punto i , riflettendo la natura direzionale della convezione. Per essere efficace, lo schema numerico deve essere in armonia con la fisica del problema, ovvero se la convezione è direzionale, lo schema deve rispettare questa direzionalità nella propagazione delle informazioni.

La **formulazione implicita** supera queste restrizioni **incorporando intrinsecamente la direzionalità**, considerando tutte le informazioni al livello temporale successivo. Analogamente, lo **schema all'indietro** è condizionato dalla stabilità del punto precedente se $a > 0$, ma se $a < 0$, il punto precedente nella mesh diventa il punto successivo in termini fisici. Pertanto, se la velocità cambia segno, anche la direzione della derivata deve cambiare. Quindi lo schema con derivata all'indietro è stabile se $a > 0$ e $CFL \leq 1$, ma è sempre instabile se $a < 0$.

Al contrario, uno **schema decentrato con derivata in avanti** è stabile se $a < 0$ e $CFL \leq 1$, ma instabile se $a > 0$. Di conseguenza, è necessario verificare il segno di a in ogni punto e applicare la derivata nella direzione appropriata. Per superare matematicamente questa sfida, si utilizza lo **schema upwind**. D'altra parte, il problema diffusivo non presenta direzionalità, quindi uno schema centrale sarebbe adeguato.

4.4. Upwind schemes

Per superare la sfida di dover conoscere il segno della velocità, che richiederebbe di calcolare la derivata in avanti o all'indietro basandosi sul segno di a negli schemi del primo ordine, si ricorre alla differenziazione upwind. Questo metodo prevede una **divisione della velocità** che rende la soluzione indipendente dal segno di a , permettendo allo schema di adattarsi automaticamente. In base al segno di a , lo schema sceglierà di applicare una **differenza in avanti** o **all'indietro**. La **stabilità** del sistema è garantita da una singola condizione sul numero di Courant-Friedrichs-Lewy (**CFL**), senza dipendere dalla **velocità di propagazione**. Per elaborare uno schema di ordine superiore, è sufficiente calcolare le differenze in avanti e all'indietro dell'ordine k desiderato.

- Consider one-sided difference schemes:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} = -a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\delta x} \begin{cases} \text{stable} & a > 0, \quad CFL \leq 1 \\ \text{unstable} & a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} = -a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\delta x} \begin{cases} \text{stable} & a < 0, \quad CFL \leq 1 \\ \text{unstable} & a > 0 \end{cases}$$

- Upwind differencing:

$$a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n \approx \frac{(a + |a|)}{2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\delta x} + \frac{(a - |a|)}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\delta x}$$

La tecnica del '**velocity split**' consente di separare le componenti di velocità all'interno dell'equazione, facilitando così l'analisi e la risoluzione dei problemi di flusso dinamico. Attraverso questa riscrittura, si ottiene una rappresentazione più chiara delle variabili in gioco:

$$a^+ = \frac{a + |a|}{2}, \quad a^- = \frac{a - |a|}{2}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + a^+ \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\delta x} + a^- \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\delta x} = 0 \quad \text{stable for } CFL \leq 1$$

Indipendentemente dal segno di a , conferisce uno schema stabile per $CFL \leq 1$ perché:

- Per $a > 0$: $a^+ = a$; $a^- = 0$ che porta ad avere il secondo termine nullo e si prende correttamente la derivata all'indietro.
- Per $a < 0$: $a^+ = 0$; $a^- = -a$ in cui si sfrutta la derivata in avanti.

Per scrivere formalmente uno schema upwind di ordine superiore basta eseguire le differenze in avanti e indietro di ordine superiore (ordine k):

$$\delta_n^+ u_i = -a^+ \delta^{(k)+} u^n - a^- \delta^{(k)-} u^n$$

In questa scrittura si può andare ad esplicitare a^+ e a^- sostituendoci le loro espressioni. Raggruppiamo al primo membro i termini moltiplicati da a e al secondo membro i termini con valore assoluto di a , si ottiene:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + a \underbrace{\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{\delta x}}_{\text{central difference}} = |a| \underbrace{\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\delta x}}_{\text{artificial dissipation}}$$

In questo modo, si ottiene nuovamente l'equazione alle differenze centrale del secondo ordine al primo membro, mentre il secondo membro è caratterizzato dalla presenza di un termine che include il coefficiente a moltiplicato per una derivata seconda centrale. Quest'ultimo contribuisce a stabilizzare l'equazione in maniera condizionata, agendo come un meccanismo di **dissipazione artificiale**, analogo a un **termine di viscosità** proporzionale alla scala della griglia computazionale. La stabilità di questo schema numerico deriva dal fatto che rispetta le proprietà propagative e direzionali dell'equazione originale, garantendo che le perturbazioni si diffondano in modo coerente con le previsioni teoriche. Sebbene la precisione della propagazione possa variare, la sua coerenza è assicurata. Al contrario, lo **schema centrale** non conserva queste proprietà e tende a generare onde spurie non fisiche che, se non adeguatamente smorzate, possono portare a instabilità. La dissipazione artificiale interviene proprio per attenuare queste onde non desiderate, consentendo allo schema di rimanere stabile sotto la condizione di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

Per equazioni semplici, come l'**equazione di advezione**, è possibile stabilire un **parallelo tra uno schema upwind e uno centrale con dissipazione artificiale**; uno schema upwind può essere interpretato come uno schema centrale arricchito da un termine dissipativo artificiale. Tuttavia, per problemi più complessi, questa corrispondenza non è sempre valida. Questa distinzione ha portato alla formazione di due scuole di pensiero distinte nell'ambito della simulazione numerica, una focalizzata sullo sviluppo di schemi upwind e l'altra su schemi centrali con dissipazione artificiale, entrambe perseguendo approcci differenti nella risoluzione di problemi numerici.

È importante notare che la **conversione inversa non è ammissibile**; gli schemi intrinsecamente centrali con dissipazione artificiale non possono essere riformulati come schemi upwind. Questa osservazione è fondamentale perché, una volta compresi i principi fisico-matematici che sottendono l'interpretazione dello schema upwind, le due filosofie nella definizione di uno schema numerico hanno intrapreso percorsi divergenti. Alcuni ricercatori si sono dedicati esclusivamente allo sviluppo di schemi centrali con dissipazione artificiale, mentre altri hanno optato per la progettazione di schemi upwind. Questa biforcazione metodologica riflette la diversità di approcci possibili nella risoluzione di problemi numerici complessi.

5. The Finite Volume Method

Nel campo dell'ingegneria, il **metodo delle differenze finite** è stato largamente sostituito dal **metodo dei volumi finiti**, che si distingue per la sua intuitività e flessibilità. Quest'ultimo è diventato lo standard nei software commerciali. Il metodo dei volumi finiti condivide con quello delle differenze finite l'idea di semplificare l'area di calcolo dividendo il dominio in una **rete di celle**. Ogni cella rappresenta un piccolo volume all'interno del quale le equazioni fondamentali sono discretizzate e risolte. A differenza del metodo delle differenze finite, dove l'elemento fondamentale è il nodo della mesh, nel metodo dei volumi finiti è il volume della cella di calcolo a essere preponderante. Il metodo dei volumi finiti si basa sul **sistema di equazioni di governo in forma integrale non stazionaria** con un riferimento ad un volume di controllo pari a V fisso nel tempo e delimitato da una frontiera S :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V S dV$$

In tale formula U è il **vettore delle variabili conservative**, F **vettore flusso** che include entrambi i contributi diffusivi e convettivi relativi ai flussi ed infine S che rappresenta un **vettore di termini sorgente**, quando questi sono presenti.

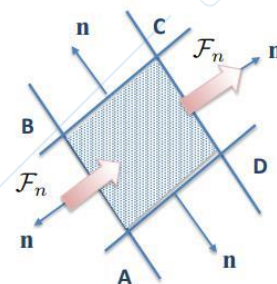
Nell'ambito della discretizzazione del dominio di calcolo, definiamo ogni **cella** di calcolo come un **volume di controllo**. Presumendo che la dimensione di ciascuna cella sia ridotta al minimo necessario, è ragionevole ipotizzare che all'interno di essa, ogni **variabile dipendente di tipo conservativo** mantenga un **valore uniforme**, corrispondente al valore medio. Analogamente, i valori dei **flussi** vengono considerati **costanti su ogni superficie della cella**. Sulla base di queste premesse, è possibile procedere con la discretizzazione delle equazioni fondamentali, giungendo a una **formulazione semi-discreta**, caratterizzata dalla persistenza della derivata temporale del vettore U , indicando che si è proceduto con una discretizzazione esclusivamente spaziale. Tale approccio permette di separare la discretizzazione spaziale da quella temporale, offrendo la flessibilità di trattarle indipendentemente l'una dall'altra, sebbene non sia obbligatorio, ma ne fornisce la possibilità.

$$V \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N_{faces}} \mathcal{F}_n^{(i)} S_i = S V$$

Componente di F perpendicolare alla faccia i -esima della cella

Superficie della faccia i -esima della cella

Vettore dei termini sorgente



Nella sommatoria, le S_i rappresentano le aree delle rispettive facce i -esime, mentre V denota il volume della cella considerata.

Il metodo dei volumi finiti offre il vantaggio di poter separare la discretizzazione spaziale da quella temporale. Tale separazione comporta due significative implicazioni:

- permette l'adozione dello schema di discretizzazione più idoneo, con un grado di precisione selezionabile indipendentemente per la dimensione spaziale e quella temporale, senza che le scelte operate in uno dei due ambiti influenzino l'altro;
- si rivela particolarmente adatto all'implementazione di strategie volte ad accelerare la convergenza del processo.

In un contesto **tridimensionale**, il termine V rappresenta il volume all'interno del quale i flussi vengono calcolati sulla superficie S_i che lo delimita. Al contrario, in un'analisi **bidimensionale**, V indica l'area e i flussi sono determinati lungo le linee perimetrali. Di conseguenza, gli integrali di volume si riducono a semplici moltiplicazioni del volume della cella per i valori medi definiti sull'intera cella. Per quanto riguarda gli integrali di superficie, che rappresentano i termini di flusso, questi si trasformano in somme effettuate sulle facce della cella dei flussi medi che entrano o escono da ogni faccia. Tale approccio di discretizzazione offre vantaggi notevoli:

- le coordinate dei nodi della cella, dove si calcola il vettore di flusso, non sono necessarie esplicitamente. Il valore U non deve essere inteso come riferito a un punto specifico del dominio, ma piuttosto come un valore medio

all'interno del volume della cella, indipendente quindi dalle coordinate dei nodi della mesh. Le coordinate della mesh diventano rilevanti solo nel calcolo dei volumi delle celle e delle aree delle facce.

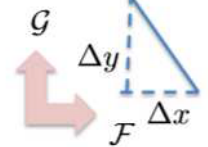
- il flusso normale che attraversa una faccia incide in maniera opposta su 2 celle contigue, garantendo così la **conservazione** perfetta del sistema, a differenza del metodo delle differenze finite (FDM), che non è conservativo.

Considerando un **caso bidimensionale** con celle quadrate, sviluppando la discretizzazione spaziale (somme al primo membro otteniamo:

$$\Omega \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^4 (\mathcal{F}_x \Delta y_i + \mathcal{F}_y \Delta x_i) = S \Omega$$

i va da 1 a 4 perché appunto è un quadrilatero. Quelle che in 3 dimensioni sono aree adesso diventano lunghezze, quello che è il volume adesso diventa un'area Ω della cella. Con riferimento alla schematizzazione precedente si ha che:

$$\Omega \frac{\partial U}{\partial t} + \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{x,AB} \Delta y_{AB} & + \mathcal{F}_{y,AB} \Delta x_{AB} + \\ \mathcal{F}_{x,BC} \Delta y_{BC} & + \mathcal{F}_{y,BC} \Delta x_{BC} + \\ \mathcal{F}_{x,CD} \Delta y_{CD} & + \mathcal{F}_{y,CD} \Delta x_{CD} + \\ \mathcal{F}_{x,DA} \Delta y_{DA} & + \mathcal{F}_{y,DA} \Delta x_{DA} \end{bmatrix} = S \Omega$$



Dove tutto il termine fra parentesi quadrate è la **somma dei flussi attraverso le varie facce**, e in particolare Δy_{AB} è la proiezione della faccia lungo y essendo F_{AB} diretto lungo x (stesso ragionamento per gli altri termini).

La configurazione in esame si rivela particolarmente efficace per le **metodologie immersed-body**, le quali prevedono l'impiego di griglie cartesiane omogenee che interagiscono con la superficie esterna dell'oggetto analizzato. La sfida principale si presenta nel trattamento delle superfici esterne in contatto con volumi adiacenti, richiedendo un'attenzione specifica. Per calcolare l'**area di una cella**, si procede determinando il modulo del prodotto vettoriale tra le diagonali:

$$\Omega = \frac{1}{2} |(D - B) \times (C - A)| = \frac{1}{2} |\Delta x_{AC} \Delta y_{BD} - \Delta x_{BD} \Delta y_{AC}|$$

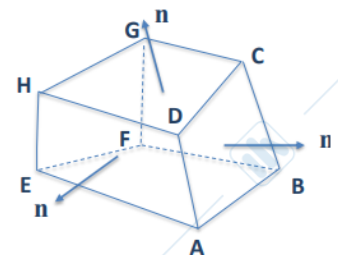
La generalizzazione al **caso tridimensionale** considera celle esaedriche:

$$V \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \mathcal{F}_n^{(i)} S_i = S V$$

Ogni faccia del poliedro possiede una propria normale n e la formula generale per il calcolo del flusso non cambia; tuttavia, si considerano 3 componenti di flusso corrispondenti alle 3 dimensioni dello spazio. Le aree S_i di ciascuna faccia possono essere determinate utilizzando il prodotto vettoriale tra le diagonali della faccia stessa:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} |(D - B) \times (C - A)|$$

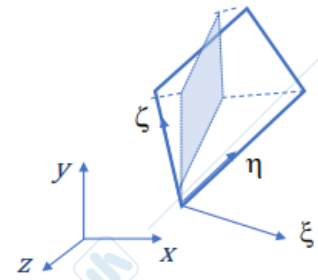
Il calcolo del volume di una cella poliedrica può essere effettuato mediante la somma dei volumi di 6 tetraedri che compongono la cella esaedrica. Questo processo è reso possibile grazie alla struttura della cella, la quale permette che le coordinate dei suoi nodi siano impiegate esclusivamente per il calcolo dei volumi e dei nodi stessi. Tale calcolo è realizzabile utilizzando le coordinate cartesiane dei nodi della mesh. **Il metodo dei volumi finiti, a differenza del metodo delle differenze finite, non richiede un mapping dal dominio fisico al dominio computazionale, ovvero non necessita di trasformare le equazioni in coordinate curvilinee.** Questa caratteristica è particolarmente vantaggiosa quando si lavora con **mesh non strutturate**, le quali possono assumere forme diverse, come celle esaedriche o tetraedriche, e non richiedono un mapping per il calcolo. Tuttavia, nella pratica, i moderni metodi numerici per la formulazione dei flussi spesso si avvalgono di riferimenti curvilinei, rendendo talvolta utile il mapping delle equazioni da un sistema cartesiano a uno curvilineo generico. Questa distinzione è fondamentale quando si considerano le 2 principali tipologie di mesh: quelle strutturate, che richiedono un mapping e sono quindi più adatte al metodo delle differenze finite, e quelle non strutturate, che sono preferibili per il metodo dei volumi finiti e richiedono un'adeguata indicizzazione delle celle.



La **metrica della trasformazione in coordinate curvilinee** può essere associata con la proiezione delle facce delle celle nelle direzioni del sistema cartesiano:

$$\frac{\xi_x}{J} = (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)$$

Can be regarded as the area of the projection in the x cartesian direction of a cell face at a fixed x location



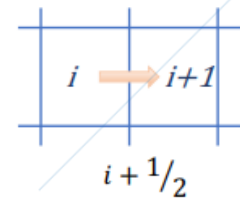
Il volume della cella coincide con il determinante Jacobiano della trasformazione. La trasformazione risulta utile perché per esprimere i flussi numerici secondo gli schemi più utilizzabili c'è bisogno di coordinate curvilinee.

Nel contesto del metodo dei volumi finiti (*FVM*), i **flussi** sono generalmente valutati sulle **facce delle celle di controllo**, tuttavia, il valore della variabile U su queste superfici non è direttamente noto, poiché il *FVM* fornisce informazioni solamente sullo stato interno delle celle. Di fronte a questa sfida, emergono due principali metodologie:

- La prima metodologia propone di definire i flussi all'interno delle celle e successivamente interpolare questi valori sulle interfacce tra le celle adiacenti. Questo approccio richiederebbe la creazione di facce fittizie per poter calcolare i flussi corrispondenti.
- La seconda metodologia, invece, suggerisce di interpolare direttamente i valori delle variabili conservative dalle celle sui loro bordi e poi utilizzare questi valori interpolati per il calcolo dei flussi. Questo metodo è generalmente considerato più semplice e diretto rispetto al primo.

Sebbene entrambe le metodologie siano valide, la seconda opzione è spesso preferita per la sua semplicità operativa. È importante notare che i risultati ottenuti con i due metodi possono differire significativamente a causa della non linearità dei flussi; pertanto, l'estrapolazione delle variabili prima del calcolo del flusso può portare a risultati differenti.

Nella **indicizzazione standard** comunemente adottata nel metodo ai volumi finiti alle celle vengono assegnati valori interi degli indici. Quindi avremo rispettivamente la cella i , la cella $i - 1$ e la cella $i + 1$. Alle interfacce viene invece dato valore semi-intero, quindi la faccia a comune nella direzione i fra le celle i ed $i + 1$ avrà indice $i + 1/2$. Per determinare il valore di U al bordo, indicato come $U_{i+1/2}$, si può calcolare una media aritmetica dei valori di U nelle 2 celle adiacenti. Questo valore medio sarà poi utilizzato nel calcolo del flusso.



In the standard finite volume mesh indexing, cells are identified by integer index values while cell faces are identified by semi-integer index values

Per cui, il flusso attraverso la superficie specificata è determinato calcolando il valore del vettore delle variabili conservative. Questo valore viene interpolato sulla superficie con indice $i + 1/2$, che corrisponde al valore interpolato del vettore delle variabili conservative sulla stessa superficie:

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \mathcal{F}(u_{i+1/2})$$

Si ricordi che i valori delle variabili conservative delle incognite competono alla cella e non alla faccia, dove invece vi vanno riportati i valori ottenuti dall'interpolazione.

L'ordine dell'interpolazione definisce l'ordine dello schema e quindi la sua accuratezza. Di fatto se i valori delle variabili dipendenti verranno definiti sulle facce attraverso interpolazione lineare, lo schema corrispondente sarà del primo ordine e così via. Se invece li definisco con una ricostruzione quadratica avrò uno schema del secondo ordine.

In seguito, è essenziale esprimere il flusso in modo che lo schema numerico soddisfi i **criteri di consistenza, stabilità e convergenza**. Verranno quindi esplorati sia gli schemi upwind, che tendono a introdurre una dissipazione numerica per stabilizzare la soluzione, sia gli schemi centrali, che possono includere una dissipazione artificiale per lo stesso scopo. La discretizzazione spaziale sarà accompagnata da una discretizzazione temporale adeguata, con l'impiego di schemi temporali specifici per garantire l'integrità della soluzione nel tempo.

6. Computational grids

La generazione della griglia computazionale è il primo passo da affrontare quando si vuole effettuare un calcolo CFD in quanto è la fase in cui si realizza la discretizzazione geometrica del dominio di calcolo: si passa da un dominio continuo ad uno discretizzato ricoprendolo con un insieme ordinato di elementi di dimensione finita sulla base dei quali sarà effettuata la discretizzazione delle equazioni di governo. L'unione di tutte le celle di calcolo dovrà coincidere con l'intero dominio di calcolo (continuo) e dovranno essere a due a due disgiunte (non si devono sovrapporre).

Ci sono due differenti tipologie di mesh:

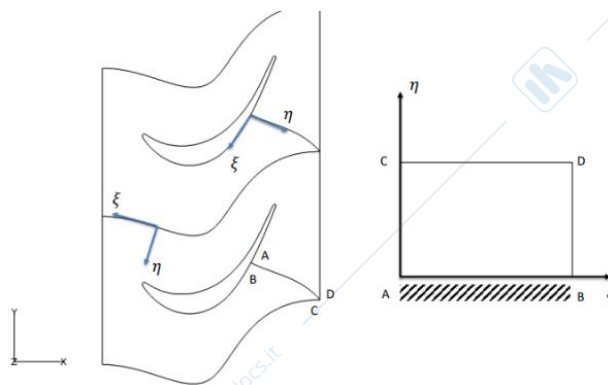
- **griglie di calcolo strutturate** dette body fitted per le quali si ha una trasformazione di coordinate che mappa il dominio fisico in un rettangolo sul dominio computazionale.
- **griglie non strutturate**, in cui è necessario stabilire solo un ordine per gli elementi per la discretizzazione e stabilire come queste sono connesse.

6.1. Body-fitted grids

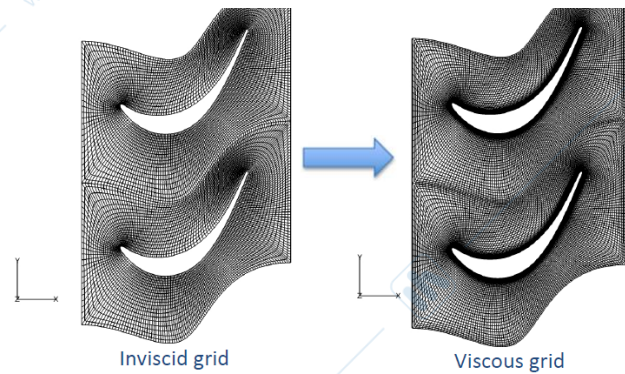
Una griglia strutturata è definita tale quando le sue celle di calcolo sono organizzate lungo linee che seguono un ordine preciso, permettendo ai nodi della griglia di essere identificati attraverso indici i, j, k . Questi indici facilitano la memorizzazione e l'accesso ai dati, consentendo di distinguere ogni direzione all'interno del sistema di riferimento. In tali griglie, si utilizza una **trasformazione di coordinate** per convertire il **dominio fisico** in una **forma rettangolare** all'interno del piano computazionale. Se l'intero dominio fisico è rappresentato da un unico rettangolo, si parla di **griglia strutturata monoblocco**; al contrario, se il dominio è suddiviso in più rettangoli contigui, si definisce una **griglia multiblocco**. Questo tipo di griglia, adattata alla forma dell'oggetto studiato, è conosciuta come body-fitted. La relazione tra i bordi del dominio fisico e quelli del dominio computazionale stabilisce la **topologia della griglia**, che nei problemi aerodinamici assume comunemente le configurazioni H , C o O , a seconda della forma e delle necessità del problema analizzato.

6.1.1. Single block O-type grids

La sezione interna della pala è definita da un **contorno solido (contorno interno)** che inizia dal punto A e segue la forma della pala ritornando al punto di partenza, B, che è coincidente con A. Questo contorno rappresenta una superficie **fisicamente omogenea**, in quanto è tutta parete solida. Diversamente, il **contorno esterno** inizia da C, si estende attorno alla pala e termina in D, identico a C. Questo contorno esterno è caratterizzato da una **non omogeneità**: esistono due contorni di periodicità separati da una distanza definita, oltre a un contorno di ingresso e uno di uscita. Il **branch-cut**, ovvero il taglio della griglia, può essere posizionato in qualsiasi punto del contorno interno senza interrompere la continuità della parete solida. Tuttavia, per il contorno esterno, è preferibile che il branch-cut non intersechi i contorni di periodicità o quelli di ingresso/uscita, ma piuttosto passi attraverso un punto di intersezione. Le coordinate del dominio computazionale sono orientate come mostrato nella figura: la **direzione ξ** segue il profilo della palettatura e il contorno esterno, mentre le linee di griglia che incrementano in **direzione η** sono idealmente perpendicolari a ξ , estendendosi dal profilo al contorno esterno. I valori discreti dei nodi della mesh e delle variabili dipendenti sono determinati da due indici, i e j , che diventano 3 in un contesto tridimensionale, associati rispettivamente a ξ e η . L'indice i aumenta lungo le linee dove cresce ξ , mentre j aumenta lungo quelle dove cresce η . Con questa configurazione, la superficie del profilo corrisponde a una linea di η costante e minima, mentre la superficie esterna del dominio corrisponde a una linea di η costante e massima. La coordinata ξ aumenta da A verso B lungo la pala, e da C verso D lungo il profilo esterno.

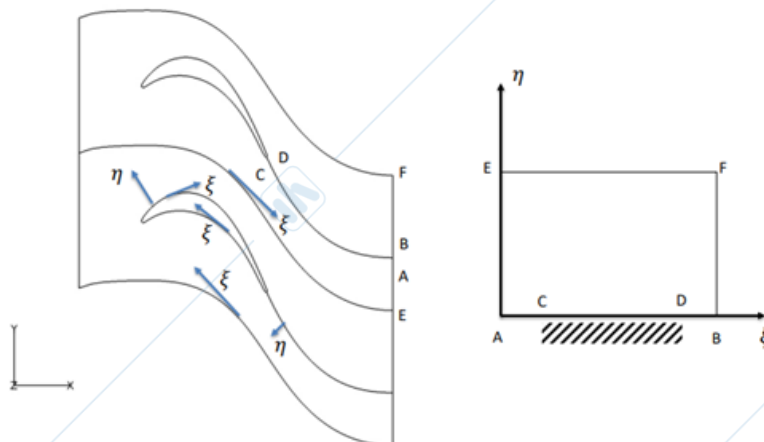


La figura illustra il confronto tra una **griglia non viscosa** e una **viscosa**. Nella griglia viscosa, è evidente il **clustering** delle linee di griglia a η costante attorno alla superficie solida, che aumenta la risoluzione nello strato limite per catturare efficacemente i gradienti di velocità significativi. Questo viene effettuato a partire da una mesh non viscosa alla quale si va a realizzare un infittimento delle linee ad η costante al fine di ottenere una mesh più densa in prossimità delle interfacce o delle pareti solide. Un'alternativa potrebbe essere una griglia uniforme con spaziature ridotte ovunque, ma ciò comporterebbe una risoluzione non necessaria in aree dove i **termini convettivi** dominano su quelli **diffusivi** e i gradienti sono meno intensi. Pertanto, l'**aspect ratio** delle celle deve essere modificato gradualmente lungo le linee a η costante. Idealmente, la dimensione della mesh dovrebbe essere scelta per riprodurre i gradienti più elevati, ma ciò porterebbe a una mesh eccessivamente fine in zone dove non è richiesta, aumentando il costo computazionale. Di conseguenza, si realizza un clustering delle linee guida vicino alle pareti solide per risolvere i gradienti in modo ottimale, con un addensamento che diminuisce man mano che ci si allontana dalle pareti. Tuttavia, questo può aumentare la stiffness e influire negativamente sulla convergenza dei metodi numerici utilizzati. Questo approccio è valido nel contesto delle simulazioni RANS e URANS, ma non è applicabile alle simulazioni LES, dove le dimensioni della griglia sono determinate dalle scale di turbolenza che si intendono risolvere.



6.1.2. Single block C-type grids

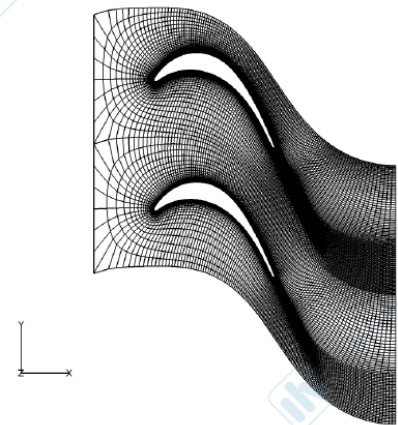
Le linee a η costante delineano sia il contorno interno che quello esterno. Il **contorno interno** si estende dal punto A al punto B, che coincide con A, descrivendo un percorso che circonda la pala senza chiudersi su di essa, ma lungo un branch-cut che segue l'andamento della scia. Invece, il **contorno esterno** si estende da E a F. Le linee BF e AE non sono a η costante, ma rappresentano ξ costante ai valori minimi e massimi. Questa configurazione della griglia nel dominio computazionale mostra che la parete si trova tra i punti C e D, mentre tra AC e DB c'è un **segmento di contorno interno fittizio**. I contorni di periodicità si trovano sul contorno esterno, così come il bordo di ingresso, ma non quello di uscita. Il **contorno di uscita** è diviso in due parti: AE e BF, che non sono inclusi in EF. Così, il percorso da A a C rappresenta un contorno interno di accoppiamento, da C a D si trova la parete, e da D a B c'è un altro segmento di branch-cut, geometricamente sovrapponibile al segmento AC (AC e BD coincidono, ma sono percorsi in direzioni opposte). Il segmento EF rappresenta 3 lati del contorno esterno, che include il bordo inferiore di periodicità, il contorno di ingresso e il bordo superiore di periodicità. Il contorno di uscita, invece, è composto da due sotto-contorni corrispondenti ai lati AE e BF del rettangolo che rappresenta il dominio di calcolo nel piano computazionale.



La configurazione proposta si articola come segue:

- Il contorno interno è definito dall'indice i che origina nel punto A, aumenta progressivamente circolando attorno alla palettatura e si conclude nel punto B, che coincide con il punto A. Questo crea un percorso chiuso che inizia e termina nello stesso punto.
- Per quanto riguarda il contorno esterno, l'indice i prende avvio in E, si incrementa seguendo il tracciato di periodicità, poi cresce ulteriormente lungo il contorno d'ingresso. Prosegue il suo incremento lungo il secondo tracciato di periodicità e si conclude in F, delineando così il perimetro esterno della configurazione.
- Infine, il contorno di uscita è caratterizzato da un indice i costante; in questo caso, i assume il valore di 1 e, in un altro punto, il valore massimo i_{max} . Lungo questo contorno, l'indice j è quello che varia, incrementandosi da 1 fino al valore massimo j_{max} per ciascun lato del contorno, completando la descrizione della configurazione.

È possibile osservare un evidente clustering nelle vicinanze della palettatura. Si nota che, a valle della palettatura e lungo il branch-cut, la densità delle linee di griglia clusterizzate sulla superficie aumenta progressivamente, permettendo così di seguire più fedelmente il fenomeno fisico di miscelazione presente nella scia. Questo comportamento è caratteristico di una topologia a C, la quale si rivela particolarmente adatta per l'analisi di questo genere di problematiche. Infatti, la topologia a C offre una rappresentazione efficace di vari fenomeni di interesse, come il ristagno che si verifica in prossimità del bordo d'attacco, il comportamento dello strato limite lungo la palettatura e l'evoluzione della scia nella zona a valle.

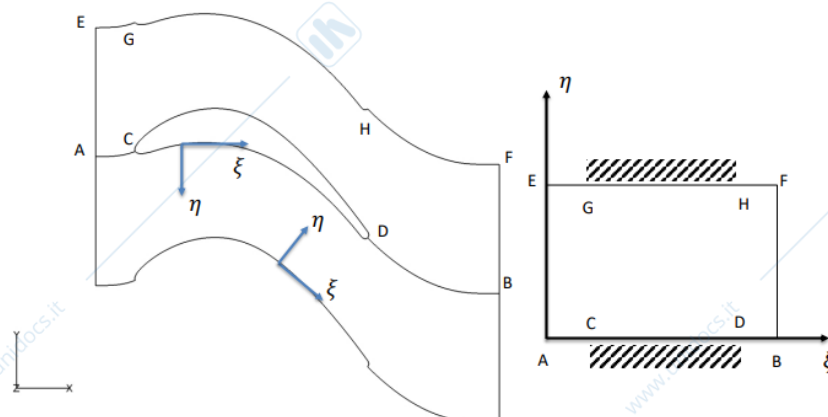


6.1.3. Single block H-type grids

In questo caso le linee a η minimo e η massimo appartengono a due diversi lati del profilo.

Sulla linea a η minimo, l'indice i (coordinata ξ) si origina in A, raggiunge la parete solida inferiore in C lungo la parte del contorno di periodicità inferiore, e corre lungo la suction side fino a D, e poi di nuovo lungo il contorno di periodicità inferiore fino al contorno di uscita del dominio in B. Per il tratto a η massimo è del tutto analogo, η si origina in E, arriva in G, corre lungo la pressure side (tratto GH) e raggiunge il contorno di uscita nel dominio F. Il singolo blocco griglia è quello tra la suction side di una pala e la pressure side della pala successiva. La linea a ξ costante in cui si incrementa η rappresenta il contorno di ingresso del dominio di calcolo, analogamente FB rappresenta il contorno di uscita.

Le griglie ad H rappresentano uno degli strumenti più flessibili e adattabili, nonostante non siano le più precise. Nel settore delle turbomacchine, trovano ampia applicazione grazie alla loro versatilità; le configurazioni a griglia O e C si dimostrano particolarmente efficaci per pale corte e robuste, tipiche delle macchine assiali. Al contrario, la griglia H offre una notevole adattabilità a un'ampia varietà di configurazioni. Quest'ultima, in particolare, permette di ottenere una qualità di griglia accettabile anche con mesh non particolarmente fitte. Tuttavia, un limite di questa topologia è la rappresentazione non ottimale dei bordi di attacco e di uscita delle pale.



6.2. Mesh quality criteria

Per una corretta discretizzazione del dominio di calcolo, è essenziale che questa soddisfi specifici criteri che garantiscono un calcolo preciso dei flussi attraverso le facce della mesh. I requisiti fondamentali sono:

- **Ortogonalità:** le linee coordinate della mesh dovrebbero intersecarsi il più ortogonalmente possibile per minimizzare gli errori di troncamento e rispettare l'ortogonalità dei flussi numerici.
- **Aspect ratio:** le mesh impiegate nei calcoli RANS e URANS presentano notevoli variazioni dell'aspect ratio. Vicino alla parete, dove le linee della griglia sono condensate per analizzare lo strato limite, l'aspect ratio è significativamente ridotto, introducendo una forma di stiffness nelle equazioni discretizzate. Man mano che ci si allontana dalla parete verso il nucleo del flusso, l'aspect ratio aumenta, raggiungendo valori più elevati poiché in queste aree i termini convettivi predominano su quelli diffusivi, i gradienti sono meno intensi e si può tollerare una risoluzione della mesh meno dettagliata. Questa variazione della griglia, nota come **stretching**, è definita come il rapporto tra le dimensioni di due celle adiacenti in una data direzione. Un eccessivo stretching della griglia può portare a errori di troncamento nel calcolo dei termini metrici, che sono, in ultima analisi, delle derivate.
- **Stretch della griglia** (variazione dell'aspect ratio): è il rapporto tra le dimensioni di due celle adiacenti in una specifica direzione, o equivalentemente, il rapporto tra due aree o lunghezze di facce corrispondenti. Rappresenta un parametro critico nella definizione della mesh. Un valore elevato di stretch può introdurre errori significativi di troncamento nel calcolo dei termini della mesh. Quando lo stretch supera il valore di 1,5, l'errore di troncamento può compromettere seriamente l'accuratezza della soluzione. Idealmente, si mira a mantenere lo stretch entro un intervallo di $1,2 \div 1,3$ per preservare l'integrità dei risultati. Tuttavia, mantenere lo stretch entro questi limiti può comportare un aumento delle dimensioni totali e della densità della mesh, portando a un incremento del costo computazionale. Al contrario, accettare valori più elevati di stretch permette una transizione più rapida nella dimensione delle celle, riducendo così il numero totale di celle necessarie e potenzialmente diminuendo il costo computazionale.

6.3. Grid topologies (single block) pros/cons

- Le **griglie ad O** sono note per le loro eccellenti proprietà e rappresentano generalmente la topologia di griglia che garantisce la **migliore qualità della mesh**. Questo tipo di griglia permette un controllo completo su tutti gli aspetti della mesh, risultando sempre **ortogonale** e consentendo di definire spaziature e densità desiderate con precisione. Inoltre, offre una **risoluzione superiore ai bordi di attacco e di uscita delle pale**. Tuttavia, la griglia ad O presenta **limitazioni nella risoluzione della scia**; il clustering intorno alla pala porta a una rapida apertura della griglia a breve distanza dalla parete, riducendo la risoluzione in quelle aree. Questo fenomeno si accentua allontanando il contorno di uscita dal bordo di uscita, poiché le linee di griglia tendono ad aprirsi maggiormente, influenzando così la distanza ottimale a cui posizionare i piani di ingresso e uscita rispetto ai bordi della palettatura. Per ottenere una risoluzione ideale in tutti gli aspetti utilizzando griglie ad O, è prassi posizionare i **contorni di ingresso e uscita molto vicino al bordo di attacco (LE) e al bordo di uscita (TE)** delle pale. Le condizioni al contorno sono note e definite nelle posizioni specifiche, non necessariamente dove si preferirebbe per ottenere una griglia di qualità. Per estendere il dominio a monte e a valle senza compromettere la risoluzione, si possono **integrare blocchi rettangolari ad H** (stitch ad H) alla griglia ad O. Questa soluzione consente di mantenere la risoluzione ottimale e di estendere la griglia fino ai contorni desiderati, anche quando la distanza dal LE è maggiore e le condizioni del flusso sono note solo in punti specifici. Aggiungendo un blocco ad H, si può quindi allungare la griglia fino al contorno necessario senza sacrificare la qualità della mesh. Inoltre, la personalizzazione del blocco H è notevolmente flessibile, consentendomi di regolare le spaziature con grande precisione. Tuttavia, questo approccio non si limita a una singola griglia per blocco, ma si estende a una **configurazione multiblocco**, richiedendo una gestione accurata della connettività tra i vari domini. L'impiego delle griglie ad O, nonostante le loro intrinseche qualità superiori, presenta delle sfide. Le griglie ad O sono ideali per la creazione di mesh di alta qualità, ma per ottenere risultati eccellenti, è spesso necessaria una

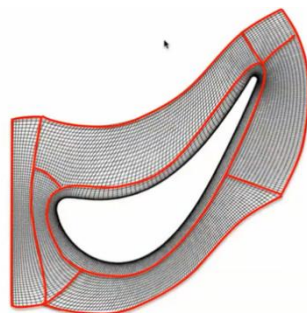
densità di griglia significativa. Queste griglie sono ottimali per calcoli dettagliati che giustificano l'uso di risorse computazionali proporzionate. D'altra parte, se le risorse sono limitate e si deve operare con mesh di dimensioni e densità moderate, le griglie ad O potrebbero non essere la scelta più adatta.

- Le **griglie di tipo C** rappresentano un **compromesso** tra le configurazioni a O e a H. Queste griglie sono state sviluppate specificamente per **applicazioni nell'aerodinamica esterna**, come i profili alari, dove eccellono grazie alla loro capacità di **modellare accuratamente il bordo d'attacco e la scia del flusso**. Tuttavia, la loro rappresentazione del bordo di uscita è meno efficace, e le ragioni di questa limitazione saranno esaminate in seguito. Un problema simile a quello riscontrato con le griglie a O è la determinazione della posizione ottimale per il contorno d'ingresso. Analizzando le griglie di tipo C, si nota che allontanandosi dal bordo d'attacco, le celle tendono ad aumentare di dimensione, il che può essere problematico se è necessaria una maggiore risoluzione vicino ai contorni. Per ovviare a questo, è possibile avvicinare il contorno d'ingresso al bordo d'attacco. Pertanto, l'uso delle griglie a C, così come quelle a O, presenta delle limitazioni in termini di posizionamento del contorno d'ingresso. In situazioni estreme, è possibile ricorrere all'utilizzo di una griglia a H combinata mediante la tecnica dello stitch per superare tali limitazioni.
- Le **griglie di tipo H** sono note per la loro **versatilità**, essendo adatte a una vasta gamma di applicazioni, in particolare nel settore delle turbomacchine. Queste griglie possono gestire efficacemente le palettature di macchine sia assiali che radiali. Tuttavia, nonostante la loro flessibilità, le griglie ad H tendono a offrire una **precisione inferiore rispetto ad altri tipi di griglie**. Ad esempio, nel caso di una palettatura lunga e sottile di un compressore centrifugo, una griglia ad O potrebbe essere adeguata, ma una griglia ad H può essere realizzata in meno tempo e con una qualità soddisfacente. Le griglie ad O e le griglie a C sono generalmente preferite per palettature più corte e spesse, come quelle trovate nelle macchine assiali. Nonostante ciò, le griglie ad H possono **adattarsi a diverse configurazioni**, pur non raggiungendo quasi mai la precisione delle griglie ad O. Con dimensioni di griglia contenute, è possibile ottenere risultati di qualità accettabile. Tuttavia, le griglie ad H incontrano **difficoltà nella risoluzione dei bordi di attacco e di uscita**, un problema condiviso con le griglie a C nel bordo d'uscita. In definitiva le griglie ad H riscontrano una minore efficienza nell'andare a rappresentare la scia e nella rappresentazione del bordo di attacco e di uscita. Allo stesso tempo però sono in grado di garantire una sufficiente qualità della griglia anche nel caso in cui questa risulti poco densa.

6.4. Multiblock structured grids

Le **griglie multiblocco** rappresentano una scelta ottimale per garantire un'elevata qualità della griglia. Queste griglie consentono l'**assemblaggio di blocchi di diverse topologie**, posizionati uno accanto all'altro, per ottenere una maggiore ortogonalità e regolarità rispetto alle griglie monoblocco. Ad esempio, una configurazione tipica può includere 7 blocchi, con un layer ad O attorno alla palettatura che assicura un'elevata ortogonalità della mesh a parete e un controllo preciso delle spaziature. Allo stesso tempo, i blocchi ad H esterni sono progettati per massimizzare le prestazioni della mesh.

Tuttavia, l'impiego delle griglie multiblocco non è sempre possibile o pratico. La creazione di una griglia monoblocco di qualità richiede una profonda conoscenza dei metodi di generazione e una vasta esperienza. Inoltre, nella pratica del calcolo CFD, la generazione della griglia è spesso la fase più lunga e complessa. Questa complessità cresce esponenzialmente con l'adozione delle griglie multiblocco. Durante la progettazione dei componenti, la forma finale del componente può non essere definita, richiedendo che la griglia si adatti a modifiche successive, anche attraverso processi automatizzati. Con le griglie multiblocco, l'adattamento a tali cambiamenti non è sempre semplice o immediato.



7. Boundary Conditions for the Navier-Stokes Equations

La **definizione fisica** dei **confini** di un **dominio di calcolo** è intrinsecamente legata alla metodologia adottata nella costruzione del dominio computazionale. Durante la definizione dei contorni, è essenziale considerare diversi fattori critici:

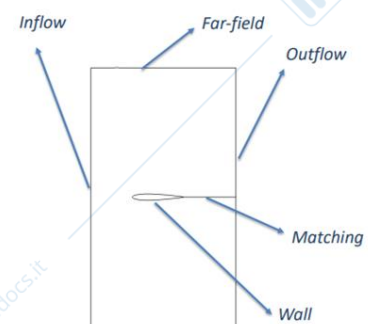
- Il numero e il tipo di condizioni da applicare, particolarmente nei problemi iperbolici, dove è richiesta una notevole precisione.
- La selezione delle quantità fisiche da imporre sui confini, che deve essere coerente con il numero e la tipologia delle condizioni.
- La scelta dello schema numerico da utilizzare.

Impostare condizioni al bordo che riflettano accuratamente i fenomeni fisici in esame è cruciale per garantire l'efficacia dei modelli computazionali. Tra le condizioni al contorno più frequentemente utilizzate troviamo:

- **INFLOW/OUTFLOW**: condizioni che regolano l'entrata e l'uscita dal dominio di calcolo, spesso rappresentano la sfida maggiore.
- **FAR FIELD**: condizioni che descrivono un flusso non perturbato, comuni nei problemi di aerodinamica esterna, dove si presume che il flusso sia indisturbato a una distanza pari a 40 volte la corda del profilo alare.
- **WALL (CONDIZIONI DI PARETE)**: condizioni imposte sui confini solidi, basate sull'ipotesi di aderenza del flusso alla superficie. Sostanzialmente si impone una **No-Slip** impostando velocità nulla in prossimità della parete.
- **SYMMETRY**: condizioni di simmetria applicate quando si studia solo una sezione di un problema simmetrico, interrompendo il dominio lungo l'asse di simmetria.
- **PERIODICITY**: condizioni di periodicità, tipiche nei problemi di turbomacchine, dove il flusso uniforme all'ingresso mantiene le stesse proprietà spostandosi tangenzialmente di una determinata misura. In presenza di condizioni esterne uniformi, è possibile analizzare il flusso in una singola sezione imponendo la periodicità.
- **MATCHING**: una condizione numerica che non corrisponde a un confine fisico reale del dominio, ma viene applicata ai contorni interni, come nei tagli di brunch o nelle linee di griglia condivise tra blocchi differenti in una griglia multiblocco. Nello specifico si va ad imporre l'appartenenza delle celle di confine ad entrambi i blocchi di mesh confinanti. In altre parole, si impone la **continuità** delle variabili attraverso il confine tra due griglie adiacenti.

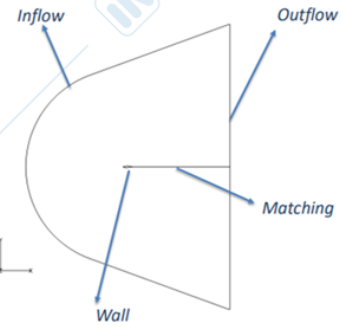
Questi principi sono fondamentali per assicurare che le simulazioni riflettano fedelmente i comportamenti fisici reali.

- **Figura 1**: Il dominio di calcolo, di forma rettangolare, circonda il profilo aerodinamico ed è suddiviso da una griglia strutturata di tipo C o, in alternativa, di tipo O. Questa griglia è caratterizzata da un brench-cut che si estende dal bordo di uscita del profilo fino al limite esterno del dominio. Immaginando un flusso che si muove da sinistra a destra, parallelo all'asse x , il profilo simmetrico è investito da un flusso anch'esso simmetrico. Il primo limite che il flusso incontra è il contorno di ingresso. Intorno al profilo si applicano le condizioni di parete, che prevedono l'adesione del flusso (no-slip condition), risultando in una velocità nulla in prossimità della superficie del profilo. Di conseguenza, la pressione diventa l'unica variabile rilevante per descrivere il flusso lungo la parete, poiché il trasporto di quantità di moto e di energia sono nulli. Sebbene la velocità tangenziale sia nulla, il contributo della pressione persiste. Proseguendo, se il flusso rimane allineato con l'asse x , esso scorre parallelo ai contorni esterni del dominio, che possono quindi essere considerati come contorni di flusso indisturbato, a patto che siano sufficientemente distanti dal profilo. Questi limiti sono definiti da condizioni di far field. Infine, incontriamo il contorno di uscita,

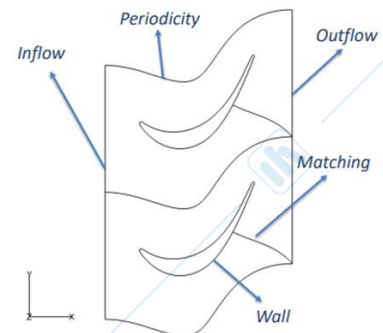


perpendicolare alla direzione del flusso, che rappresenta il limite finale del dominio di calcolo. Lungo il branch-cut della griglia di tipo C, si impongono condizioni di matching per garantire la continuità delle variabili di flusso, permettendo così il passaggio attraverso il contorno di uscita.

- Figura 2:** Il dominio di calcolo è delineato da un contorno esterno inclinato, presenta un angolo positivo rispetto alla direzione del flusso indisturbato. Questo implica che il flusso entra nel dominio, definendo così un contorno completamente di ingresso, senza la presenza di contorni "far-field". La terminazione del dominio è caratterizzata da un contorno di uscita. Sulle superfici dell'airfoil sono applicate le consuete condizioni di parete, mentre lungo il taglio della linea si applicano condizioni di matching. È evidente come la configurazione fisica dei contorni e le relative condizioni al contorno varino in funzione della struttura del dominio. Un dominio configurato in questo modo rimane invariato fintanto che il flusso rimane allineato con l'asse del profilo, ossia nella direzione "x". Tuttavia, analizzando il profilo in condizioni di incidenza, si osserva una modifica nella natura dei contorni. Tale cambiamento non è facilmente prevedibile, in quanto dipende dall'ampiezza del dominio e dal grado di incidenza, che alterano la classificazione dei contorni, non più identificabili come "far field".



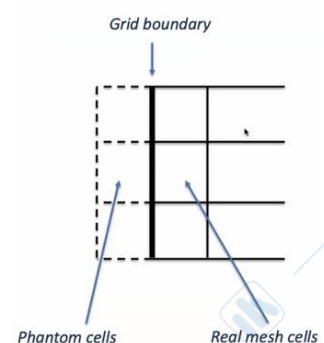
- Figura 3:** In questa griglia, si osserva una diversificata gamma di contorni, i quali, nonostante la loro tendenza a presentare caratteristiche fisiche relativamente stabili e definite, introducono una varietà significativa. Si presenta dunque un contorno iniziale, con condizioni di parete stabilite sui profili delle pale. L'esempio corrente utilizza una griglia a forma di "O", che comporta la presenza di una linea di matching. Attraverso questa linea, è necessario garantire la continuità delle variabili di flusso. È prassi comune, e non particolarmente complessa in questo contesto, assicurare sia la continuità della variabile in esame sia quella della sua derivata prima. I contorni laterali del dominio di calcolo sono configurati, in generale, per fungere da limiti di periodicità.



7.1. The treatment of boundary conditions

Nel metodo dei volumi finiti, l'implementazione delle condizioni al contorno si realizza attraverso un approccio consolidato. Questo prevede l'introduzione di **celle virtuali**, note anche come **celle fantasma**, posizionate lungo i confini del dominio di calcolo. Tali celle sono impiegate esclusivamente per applicare le condizioni al contorno e non possiedono una geometria definita. Questo perché, nel contesto del metodo dei volumi finiti, i valori delle variabili di interesse non sono legati a specifici punti fisici all'interno del dominio, ma piuttosto all'intera cella. Inoltre, mentre i flussi sono normalmente associati alle superfici delle celle, l'unico flusso rilevante in questo contesto è quello che si verifica lungo il contorno, che corrisponde a una linea fisica all'interno del dominio di calcolo. All'interno delle celle fantasma non avviene la risoluzione delle equazioni; piuttosto, i valori al loro interno sono dedotti direttamente dalle condizioni al contorno fisiche stabilite dall'operatore. Nei nodi situati sui contorni non si definiscono valori specifici, ma piuttosto flussi, i quali facilitano l'applicazione del metodo dei volumi finiti rispetto al metodo degli elementi finiti. In sostanza, le condizioni al contorno che vengono imposte servono a determinare i valori delle variabili nelle celle fantasma.

Il **calcolo del flusso** si effettua definendo le variabili sulla superficie della cella. Attraverso l'assegnazione dei valori alle celle fantasma, si determina l'influenza sulle variabili ai confini del dominio di calcolo. Questo processo consente di stabilire la condizione al contorno desiderata. In altre parole, la manipolazione delle variabili nelle celle adiacenti al



bordo permette di controllare le condizioni ambientali all'interno del dominio di interesse, garantendo che il flusso attraverso la cella rispecchi accuratamente la situazione fisica che si vuole simulare.

In un sistema che utilizza uno **schema centrale con dissipazione artificiale**, il valore determinato sulla superficie di interesse è la media aritmetica tra il valore presente nella cella fantasma e quello nella cella di bordo. Per esempio, se l'obiettivo fosse quello di azzerare una variabile specifica al confine del dominio, sarebbe necessario assegnare alla cella fantasma un valore negativo e uguale in valore assoluto rispetto a quello calcolato per la cella di bordo. Questo approccio evidenzia come le condizioni al contorno siano direttamente dipendenti dai valori ottenuti nelle celle di bordo. Di conseguenza, è essenziale che tali condizioni al contorno vengano regolarmente aggiornate ad ogni passo temporale per riflettere le variazioni dinamiche del sistema.

Affrontare un **problema iperbolico** (problema di natura propagativa) significa gestire una situazione governata dalla trasmissione di informazioni e perturbazioni attraverso il dominio di calcolo. Questo comporta la necessità di adottare **schemi di trattamento dei contorni** che siano **fisicamente coerenti**, basati su 3 principi fondamentali:

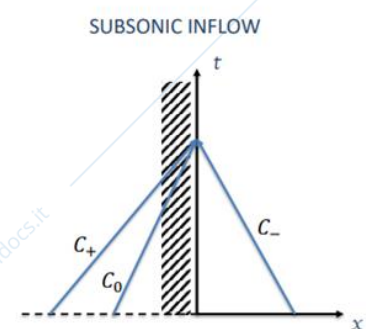
1. Il **numero di condizioni al contorno da imporre** deve essere adeguato alla natura del problema iperbolico, caratterizzato dalla propagazione di onde. Queste condizioni devono riflettere il dominio di dipendenza delle variabili di flusso, che sono influenzate solo da alcune celle adiacenti e non da tutte. Un trattamento dei contorni che non rispetta questa dinamica rischia di essere fisicamente incoerente. In generale, il numero di condizioni al contorno imposte sarà inferiore al numero totale di variabili.
2. Per le **variabili alle quali non è possibile applicare direttamente una condizione al contorno**, è necessario definire un metodo alternativo che ne determini i valori in modo coerente con la fisica del problema.
3. Assicurarsi che le **equazioni di governo** con le condizioni al contorno imposte risultino in uno **schema di trattamento dei contorni** tale da impostare **problema analiticamente ben definito**. Questo è essenziale per garantire che le approssimazioni numeriche siano stabili e consistenti. Un problema mal posto comprometterebbe la stabilità e la coerenza dell'algoritmo di risoluzione e delle relative condizioni al contorno.

Per assicurare che un problema sia definito correttamente e per garantire la stabilità e la coerenza degli schemi numerici, è essenziale che le variabili fisiche applicate ai limiti del problema siano indipendenti. In questo contesto, **la teoria delle caratteristiche** può essere utilizzata per determinare quali variabili siano necessarie e come imporle in modo che il problema rimanga ben definito e le soluzioni siano affidabili.

Andiamo quindi a vedere come si trattano i contorni da un punto di vista della teoria delle caratteristiche. In un **sistema di flusso monodimensionale**, ogni punto all'interno del dominio di calcolo è influenzato da 3 linee caratteristiche distinte. Queste linee rappresentano le traiettorie lungo le quali si propagano le informazioni di stato fisico, come la pressione e la velocità. In un dato momento, lo **stato** in qualsiasi punto è il risultato dell'**interazione di 3 onde** che si spostano lungo queste linee. Pertanto, è fondamentale riconoscere se il flusso che entra nel dominio è subsonico, con velocità inferiore a quella del suono, o supersonico, con velocità superiore. Questa distinzione è cruciale perché determina la natura delle onde che si propagano nel dominio e, di conseguenza, le tecniche di calcolo necessarie per analizzare il flusso.

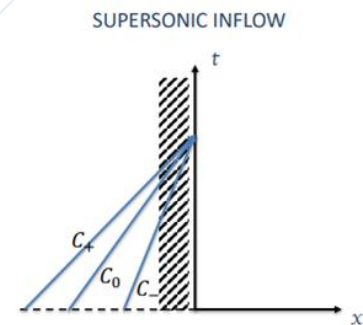
Consideriamo il **contorno di ingresso (Condizioni di Inlet)** nel dominio di calcolo facendo riferimento ad un caso monodimensionale:

- **Caso Subsonico:** In un sistema monodimensionale, un punto generico del contorno è influenzato da 3 tipi di onde, ciascuna seguendo un percorso definito come caratteristica. Le prime due onde, indicate come C_+ e C_0 , si muovono in sincronia con la direzione del flusso principale. La terza onda, contrassegnata come C_- , si propaga invece in direzione contraria al flusso. Questo fenomeno si verifica in un dato istante temporale t . In particolare, l'**onda di entropia** segue il flusso raggiungendo il punto considerato attraverso la caratteristica C_+ o C_0 . Analogamente, l'**onda acustica veloce** si propaga nella stessa direzione del flusso, mentre l'**onda acustica lenta**



percorre la caratteristica C_- , muovendosi contro la direzione del flusso principale. Quindi, in condizioni subsoniche, si osserva che la velocità a cui si propaga un'onda acustica lenta è in realtà inferiore a zero. Questo fenomeno si verifica poiché tale velocità è determinata dalla differenza tra la velocità del flusso e quella del suono; nel caso in cui il flusso sia subsonico, la velocità del suono supera quella del flusso, risultando in una velocità di propagazione negativa per l'onda acustica lenta. Ciò implica che le informazioni veicolate da questa onda originano dall'interno dell'area di calcolo. Al contrario, le altre due direzioni caratteristiche dell'onda mostrano una pendenza positiva, indicando una propagazione in direzione opposta.

- **Caso supersonico:** In una situazione supersonica, tutte le **linee caratteristiche** mostrano una **pendenza positiva**, indicando che provengono dall'esterno del dominio. Questo contrasta con il caso subsonico, dove, in un'analisi monodimensionale, si possono stabilire al massimo 2 condizioni al contorno e la 3° deve essere recuperata dall'interno del dominio di calcolo. In un contesto bidimensionale, il numero di condizioni al contorno che possiamo definire aumenta a 3 e a 4 in uno tridimensionale. Tuttavia, una condizione deve sempre essere derivata dall'interno, specificamente quella associata all'onda acustica lenta, che si propaga in direzione contraria al flusso principale. Per i flussi supersonici, nessuna linea caratteristica origina dall'interno, pertanto tutte le variabili di contorno devono essere stabilite imponendo le condizioni al contorno. Diversamente, nei casi di flusso subsonico, una delle caratteristiche emerge dall'interno del dominio, mentre nei flussi supersonici tutte le caratteristiche si originano esternamente al dominio.



C^- = onda acustica lenta

C_0 = caratteristiche lungo le quali le onde si propagano con la velocità del flusso

C^+ = onda acustica veloce

Ricapitolando, in condizioni subsoniche è necessario assegnare 3 condizioni al contorno per configurazioni bidimensionali (2D) o 4 per quelle tridimensionali (3D). Inoltre, per completare la ricostruzione di tutte le variabili di flusso al contorno, si richiede un'informazione supplementare che deve essere derivata dall'interno del dominio e applicata alle celle fantasma. Invece, per condizioni supersoniche, non è possibile utilizzare informazioni provenienti dall'interno del dominio di calcolo. Pertanto, tutte le variabili di flusso relative alle celle fantasma devono essere definite attraverso l'assegnazione di condizioni al contorno specifiche. Questo assicura che il modello di flusso sia accuratamente rappresentato in entrambi i regimi di volo, garantendo la validità dei risultati ottenuti dalle simulazioni.

Esaminiamo il **bordo di uscita**, che presenta differenze significative tra le **condizioni subsoniche** e **supersoniche**. Nella **situazione subsonica**, una singola caratteristica, nota come onda acustica lenta, origina dall'esterno del dominio, mentre le restanti caratteristiche emergono dall'interno. Di conseguenza, si richiede l'imposizione di un'unica condizione al contorno. Al contrario, in **condizioni supersoniche**, non si registra l'arrivo di onde dall'esterno, poiché tutte le caratteristiche hanno una pendenza positiva; pertanto, non è necessario imporre condizioni al contorno. Per stabilire le variabili caratteristiche nelle celle fantasma, sarà necessario estrapolare i dati necessari dall'interno del dominio di calcolo.

7.2. Inlet and Outlet Boundaries

Per stabilire le condizioni al contorno più opportune, è essenziale comprendere quali variabili o grandezze del flusso assegnare. Se si necessitano 4 condizioni al contorno, è imperativo definire **4 variabili indipendenti**. Generalmente, all'**ingresso del dominio** si hanno informazioni sulle **grandezze totali** e sugli **angoli del flusso**, che permettono di determinare le ampiezze delle onde di pressione, entropia, acustiche e di vorticità. Emergono, quindi, due ulteriori questioni:

- la prima riguarda l'elaborazione di un metodo per applicare le condizioni al contorno desiderate;
- la seconda implica l'identificazione delle variabili fisiche più adatte da utilizzare come condizioni al contorno.

Frequentemente, il dominio di calcolo può essere esteso a tal punto che i bordi d'ingresso, d'uscita e all'infinito siano posizionati a distanze significative dall'oggetto di studio. In tali circostanze, il flusso nei contorni tende ad essere **uniforme**, consentendo l'applicazione di un trattamento monodimensionale basato sulla teoria delle caratteristiche.

Per il **contorno d'ingresso**, si forniscono:

- la **pressione totale**;
- la **temperatura totale**;
- gli **angoli di flusso**;
- In alcuni casi, può risultare vantaggioso assegnare anche il valore della **portata**.

Queste 4 variabili possono essere modificate senza dover andare ad intaccare le restanti essendo tutte variabili indipendenti.

Nell'analisi di un **flusso subsonico**, si utilizzano queste variabili per determinare 4 delle 5 **linee caratteristiche principali**: le **onde di entropia**, di **vorticità** e l'**onda acustica veloce**. La 5° linea, rappresentata dall'**onda acustica lenta**, viene invece calcolata all'interno del dominio di calcolo. Diversamente, in un **regime supersonico**, è necessario calcolare tutte e 5 le caratteristiche utilizzando le condizioni al contorno stabilite.

Per quanto riguarda il **contorno d'uscita** in un **flusso subsonico**, l'unico salto caratteristico che si può determinare tramite le condizioni al contorno è quello associato all'**onda acustica lenta**. Questo viene generalmente calcolato imponendo la **pressione statica**. Le altre curve caratteristiche, invece, sono calcolate a partire dall'interno del dominio di calcolo, seguendo un approccio analitico che permette di definire il comportamento del flusso in maniera più accurata e dettagliata.

Il metodo di calcolo per determinare le variabili distintive procede attraverso **iterazioni**: partendo dalle grandezze definite, si procede al calcolo della caratteristica associata all'onda acustica veloce, nonché quelle relative all'entropia e alla vorticità. Quindi, per costruire uno schema efficace per il trattamento delle condizioni al contorno che soddisfi questi requisiti, l'approccio più diretto e fisicamente accurato consiste nell'utilizzare le **variabili caratteristiche**. In particolare, in corrispondenza di un **contorno di ingresso**, si impiegano queste variabili per determinare i **3 salti caratteristici** associati all'onda di entropia, alle onde di vorticità e all'onda acustica veloce. La 4° o 5° caratteristica, rappresentata dall'onda acustica lenta, viene calcolata all'interno del dominio computazionale, generalmente nella prima cella, e successivamente estesa alle celle fantasma. Disponendo di queste 5 variabili caratteristiche, possiamo eseguire un'**operazione matriciale** relativamente semplice per calcolare le 5 variabili dipendenti: **densità**, **componenti della quantità di moto** e **temperatura specifica**, essenziali nel contesto subsonico.

Il **processo si sviluppa iterativamente**: a ogni livello n , si calcolano le **variabili caratteristiche** all'interno del dominio di calcolo per azzerare specifici **residui limite** nelle **cellule fantasma**:

$$\begin{cases} R_{in,1} &= T_{0,in} - T_0^n \\ R_{in,2} &= p_{0,in} - p_0^n \\ R_{in,3} &= v^n - \tan \alpha_{in} u^n \\ R_{in,4} &= w^n - \tan \beta_{in} u^n \end{cases}$$

- Il **residuo R_1** rappresenta la discrepanza tra il valore prescritto di **temperatura totale** e quello calcolato al passo precedente nelle cellule fantasma.
- Il **residuo R_2** si riferisce alla differenza tra la **pressione totale** imposta e quella calcolata precedentemente.
- Per quanto riguarda l'imposizione degli angoli, si utilizzano i **residui R_3 e R_4** : α_{in} e β_{in} sono gli **angoli assegnati**, mentre u , v , w sono le **componenti di velocità** calcolate al passo precedente. R_3 è utilizzato per fissare l'**angolo di swirl**, con v^n e u^n che rappresentano le **componenti assiale e tangenziale** della velocità nella cella fantasma, derivanti dal passo precedente. R_4 , d'altra parte, si occupa della **direzione dello span**, dove si impone il valore di β .

I residui indicati rappresentano la **variazione locale**, nelle celle fantasma, delle grandezze in questione tra il passo n e il passo $n + 1$. La **variazione corrispondente delle variabili caratteristiche**, necessaria per ottenere l'azzeramento dei residui, viene calcolata mediante un'iterazione del **metodo di Newton-Raphson**:

$$\mathbf{R}_{in}^n + \frac{\partial \mathbf{R}_{in}}{\partial (w_1, w_2, w_3, w_4)} \delta [w_1, w_2, w_3, w_4]^T = 0$$

dove:

- R_{in} è il vettore formato dai residui al passo temporale n ;
- $\frac{\partial R_{in}}{\partial (w_1, w_2, w_3, w_4)}$ costituisce la derivata del residuo rispetto alle variabili caratteristiche e rappresenta la matrice di trasformazione delle fluttuazioni caratteristiche dai residui;
- $\delta [w_1, w_2, w_3, w_4]^T$ rappresenta il vettore delle variazioni caratteristiche;

Si ottiene quindi un **sistema lineare** che, una volta invertito, permette di determinare le variabili caratteristiche w_i . Generalmente, per ridurre il carico computazionale, non si procede con l'inversione completa del sistema lineare; piuttosto, si acquisiscono le caratteristiche eseguendo un singolo passaggio del metodo per ogni intervallo temporale. La **5° caratteristica** è dedotta dall'interno del dominio di calcolo e viene calcolata nella prima cella del dominio e poi assegnata alle celle fantasma, o calcolata nelle prime due celle e successivamente interpolata nelle celle fantasma. Di conseguenza, si forma un **insieme di variazioni delle variabili caratteristiche** $\delta (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$. Convertendo queste variazioni in variazioni delle variabili conservative dipendenti, si procede all'aggiornamento dei valori nelle celle fantasma.

Per quanto riguarda il **contorno di uscita**, il processo è analogo ma semplificato, dato che si deve imporre una sola caratteristica (il sistema lineare si riduce a una singola equazione), ossia la **pressione statica**. A partire da questa, si può calcolare il delta della caratteristica corrispondente all'**onda acustica lenta**, mentre gli altri delta caratteristici sono ottenuti dall'interno del dominio, solitamente calcolati sulla cella fisica che li trasporta, o sulle ultime due celle fisiche che stiamo estrapolando, per poi trasportarli nelle celle fantasma. Una volta ottenute tutte le variabili caratteristiche delle celle fantasma, si calcolano le variabili dipendenti attraverso un'**operazione matriciale** semplice. Questo rappresenta l'unico approccio fisicamente coerente per imporre le condizioni al contorno.

Nell'ambito dei problemi di calcolo fluidodinamico, specialmente in settori avanzati come quello turbomacchinistico, è fondamentale adottare un trattamento delle condizioni al contorno che eviti riflessioni spurie, le quali possono compromettere l'accuratezza dei risultati. Quando si lavora con domini di calcolo complessi e si posizionano i bordi di ingresso e uscita vicino ai profili aerodinamici, è cruciale riconoscere che il flusso non è uniforme a causa di fenomeni come scie e onde d'urto. Pertanto, un approccio monodimensionale per definire le condizioni al contorno si rivela inadeguato. Per prevenire riflessioni non fisiche, causate ad esempio da onde d'urto che raggiungono i bordi e si riflettono all'interno del dominio, è necessario implementare condizioni al contorno non uniformi. Queste devono essere progettate per assorbire tali discontinuità, mantenendo un comportamento non riflettente. A tal fine, si introducono **correzioni tridimensionali o bidimensionali** alle **variazioni delle variabili caratteristiche**, che contribuiscono a garantire un trattamento del contorno coerente con la realtà fisica del flusso, evitando così artefatti computazionali indesiderati.

$$\delta w_{\kappa} = \delta \bar{w}_{\kappa} + \delta w_{\kappa, NR}$$

Average one-dimensional change
Local non-reflecting change

Quindi, le caratteristiche monodimensionali sono determinate seguendo la medesima procedura precedentemente descritta. A questi, si sommano correzioni applicate alle variabili caratteristiche locali, sia in due che in tre dimensioni, per gestire i contorni in maniera non riflettente. Inizialmente, si calcolano i salti caratteristici monodimensionali, estendendo internamente ciò che necessita di essere esteso e applicando le condizioni al contorno note, ottenendo così un valore medio delle grandezze in questione ai bordi del dominio considerato. Successivamente, a questi salti

caratteristici, calcolati localmente, si aggiungono salti non riflettenti, risultanti da un'analisi bidimensionale e tridimensionale dei contorni, che introducono correzioni locali la cui media è nulla.

7.3. Wall boundary conditions

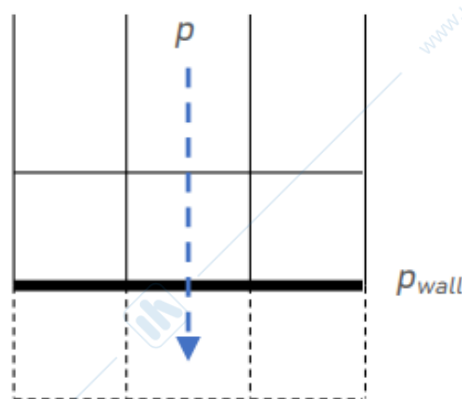
Nell'analisi dei **flussi viscosi**, le **condizioni al contorno** per una **parete solida (WALL)** impongono che la **velocità del fluido aderisca alla parete**. Ciò significa che, se la parete è immobile, anche la velocità del fluido in prossimità di essa sarà nulla. In questa situazione, le **componenti convettive del flusso** attraverso la parete sono nulle, lasciando come unico contributo quello della pressione. Per esempio, considerando un flusso generico nella direzione k del sistema di riferimento curvilineo, la sua rappresentazione vettoriale sarà:

$$\mathcal{F}_\kappa = \left[0, \rho u U_\kappa + p\kappa_x, \rho v U_\kappa + p\kappa_y, \rho w U_\kappa + p\kappa_z, 0 \right]^T \Rightarrow \mathcal{F}_\kappa = [0, p\kappa_x, p\kappa_y, p\kappa_z, -p\kappa_t]^T$$

Il termine nullo nella prima componente si riferisce all'**equazione di continuità**, che non include la pressione (i flussi convettivi dell'equazione di continuità sono nulli dato che contengono solo la velocità e non la pressione). Per la componente x della **quantità di moto** abbiamo il termine $p\kappa_x$, e lo stesso vale per le altre componenti della qdm. Nell'**equazione dell'energia**, il termine $p\kappa_t$ rappresenta il contributo metrico dipendente dal tempo.

Per quantificare l'effetto della pressione sui flussi lungo la parete, esistono diversi metodi. Uno dei più semplici ed efficaci consiste nell'estrapolare la pressione dalle celle interne adiacenti al dominio di calcolo verso le celle fantasma adiacenti alla parete solida. Questo approccio è coerente con la fisica dei flussi viscosi: infatti, all'interno dello strato limite che si forma sulla parete, la pressione statica rimane costante lungo la direzione normale alla parete. Pertanto, se le celle sono ragionevolmente ortogonali alla parete e disposte lungo linee di η costante, è possibile estrapolare la pressione. Questo è particolarmente valido per uno strato limite completamente sviluppato e stazionario. Tuttavia, nei problemi reali, l'equilibrio dello strato limite è raramente raggiunto e, in situazioni non stazionarie, l'effetto della variabilità temporale richiede un'estrapolazione non lineare, tipicamente di secondo ordine.

La densità vicino alla parete è determinata dalla temperatura. Esistono diverse condizioni termiche che possono essere applicate alla parete. Per pareti adiabatiche, è necessario che il flusso di calore attraverso la parete sia assente, il che si traduce in una derivata normale della temperatura pari a zero. In alternativa, se la temperatura della parete è nota, tale valore può essere assegnato direttamente per definire le condizioni al contorno del problema termico in esame.



8. Central Schemes and Artificial Dissipation for the Euler and Navier-Stokes Equations

Avendo già introdotto le generalità dei metodi ai volumi finiti, si vanno a trattare, per questo metodo, in modo più dettagliato, gli schemi introdotti per la FDM. In particolare, adesso ci si concentrerà sugli **schemi centrali con dissipazione artificiale**.

Riepilogando i concetti fondamentali della dissipazione artificiale:

- Gli schemi centrali di secondo ordine inducono oscillazioni a causa del disaccoppiamento delle soluzioni tra nodi alternati, pari e dispari.
- Oscillazioni significative possono manifestarsi in prossimità di nette discontinuità, come le onde d'urto, o dove si verificano gradienti intensi, ad esempio nei punti di stagnazione.
- Gli schemi di primo ordine sono caratterizzati da errori di troncamento che dipendono dal secondo derivato, agendo come una viscosità numerica supplementare. Di conseguenza, attenuano le oscillazioni ad alta frequenza e mitigano i gradienti pronunciati.
- Durante i calcoli che implicano viscosità, la dissipazione intrinseca deriva dai termini diffusivi. Tuttavia, lontano dagli strati limite, la diffusione fisica da sola spesso non basta a prevenire le oscillazioni. Per questo motivo, si introducono termini di dissipazione artificiale negli schemi centrali, che simulano l'effetto della viscosità fisica a livello della griglia di calcolo.
- Questi termini dovrebbero avere un ordine pari o superiore rispetto all'errore di troncamento dello schema nelle regioni lisce, per eliminare il disaccoppiamento tra nodi pari e dispari, mentre in zone con gradienti elevati è richiesta una dissipazione maggiore.

Per soddisfare i criteri precedentemente discussi, è fondamentale esprimere con precisione i **flussi convettivi** in termini numerici. Questi flussi sono particolarmente complessi da gestire a causa della loro **natura direzionale** e della loro **dipendenza dalla velocità**. I **termini diffusivi**, d'altro canto, sono di secondo ordine e seguono una caratterizzazione fisica del fenomeno di trasporto che è **indipendente dalla direzione**; pertanto, possono essere discretizzati centralmente senza compromettere l'accuratezza, la consistenza o la stabilità del modello. Un approccio di secondo ordine può essere adeguato utilizzando la formula iniziale su tre punti, ma per una maggiore precisione, sarà necessario un dominio di calcolo più esteso.

La creazione di flussi numerici convettivi che rispettino i requisiti richiesti è un processo molto più intricato. Ad esempio, una **discretizzazione centrale** è inadeguata poiché non tiene conto delle **proprietà di propagazione** dell'**equazioni di governo**, a meno che non venga modificata con un **termine di dissipazione artificiale**. Inoltre, non considera la **direzione di propagazione delle perturbazioni**, il che significa che lo schema di calcolo rimane formalmente invariato indipendentemente dalla direzione del flusso. Per essere più specifici, tali schemi non distinguono tra contributi **a valle** e **a monte**, trascurando le **proprietà propagative** delle equazioni di governo iperboliche, il che può portare a oscillazioni e instabilità causate dal disaccoppiamento delle soluzioni tra nodi pari e dispari, noto come **odd-even decoupling**. In altre parole, le informazioni non accurate introdotte nel calcolo del flusso sulla superficie della cella, derivanti dalla discretizzazione centrale, possono generare **onde spurie** che si diffondono attraverso il dominio di calcolo in modo non attenuato, causando la rapida divergenza del modello.

Nell'analisi dei sistemi di equazioni differenziali che governano i fenomeni fisici, si osserva che i nodi della griglia computazionale pari tendono a disaccoppiarsi da quelli dispari. Se trascuriamo le proprietà di propagazione delle equazioni, possiamo stabilizzare il sistema lasciando formare le onde e poi attenuandole. Questo approccio è valido per sistemi lineari, tuttavia, le equazioni di Eulero e Navier-Stokes sono intrinsecamente non lineari e danno origine a una gamma di fenomeni complessi, come le onde d'urto. Inoltre, la presenza di gradienti intensi in queste situazioni porta gli schemi numerici a generare oscillazioni spurie, che possono influenzare negativamente la convergenza della

soluzione. Queste oscillazioni sono particolarmente problematiche in presenza di gradienti elevati, come quelli incontrati nelle onde d'urto o nei punti di ristagno.

Gli **schemi numerici di primo ordine**, sia **centrati** che **decentrati**, introducono **errori di troncamento** proporzionali alla derivata seconda del campo di flusso, agendo di fatto come una **viscosità numerica aggiuntiva** (artificiale). Questa caratteristica li rende intrinsecamente dissipativi, capaci di smorzare le onde spurie e di smussare i gradienti forti. Tuttavia, per applicazioni pratiche e industriali, è spesso necessario ricorrere a schemi di almeno secondo ordine per ottenere risultati accurati. Nonostante ciò, mantenere schemi di primo ordine nei codici di calcolo è utile, poiché forniscono una soluzione approssimativa che può servire da verifica preliminare per il processo di calcolo in atto, garantendo che il metodo sia fondamentalmente corretto prima di procedere con schemi di ordine superiore più precisi.

È necessario sviluppare uno **schema centrale formalmente di secondo ordine**, dotato di una **dissipazione artificiale** progettata per eliminare le oscillazioni spurie che possono emergere in aree con gradienti di velocità elevati. Questi modelli sono stati inizialmente ideati per le equazioni di Eulero e successivamente adattati per quelle di Navier-Stokes, data la comune natura convettiva. È fondamentale considerare che nei **calcoli viscosi** esistono intrinsecamente **proprietà dissipative**, originate dalla viscosità naturale del fluido. Sebbene i termini diffusivi di secondo ordine siano efficaci nell'attenuare le oscillazioni, la loro azione è limitata a specifiche zone del dominio computazionale, come vicino alle pareti o nelle scie, e al di fuori di queste aree, i termini convettivi predominano su quelli diffusivi, rendendo la diffusione fisica insufficiente per smorzare le perturbazioni indesiderate. Per mantenere l'accuratezza di un modello di secondo ordine, è preferibile che la **dissipazione artificiale** sia di **ordine superiore**; utilizzando un modello di secondo ordine con dissipazione dello stesso ordine, si otterrebbe un risultato effettivo di primo ordine. Pertanto, si adatterà una **dissipazione di base di ordine pari o superiore all'errore di troncamento del modello**, che sia adeguata a sopprimere l'odd-even decoupling. In presenza di gradienti intensi, tuttavia, la dissipazione di base non è generalmente sufficiente a prevenire l'apparizione di oscillazioni spurie. Di conseguenza, sarà necessario definire un contributo diffusivo di secondo ordine aggiuntivo, che renda il modello localmente di primo ordine, assicurando così le proprietà di shock capturing desiderate.

8.1. Second-Order Central Schemes

Si consideri un'equazione monodimensionale di convezione semplice discretizzata ai volumi finiti con l'aggiunta del termine di dissipazione artificiale. Essa si ottiene andando a definire il vettore delle variabili di flusso all'interfaccia, come la media dei valori assunti nelle celle ad essa adiacenti:

$$U_{i+1/2} = \frac{1}{2} (U_{i+1} + U_i)$$

Il corrispondente flusso si calcola come:

$$F_{i+1/2} = F(U_{i+1/2})$$

Con tali schemi la forma semi-discreta delle equazioni di governo tipica del metodo dei volumi finiti diviene:

$$V \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N_{faces}} F_n S_i - D(U) = SV$$

dove $D(U)$ è l'**operatore dissipazione artificiale** e va a sottrarsi al primo membro.

Questa equazione viene spesso espressa utilizzando $R(U)$ detto **vettore residuo** e comprende tutti i termini discretizzati spazialmente:

$$V \frac{\partial U}{\partial t} + R(U) = 0, \quad R(U) = \sum_{i=1}^{N_{faces}} F_n^{(i)} S_i - D(U) - SV$$

Il **processo time-marching** consiste nel guidare la soluzione verso quella stazionaria, in modo da annullare il termine dU/dt . Quindi l'equazione stazionaria, che definisce la soluzione, è semplicemente $R(U) = 0$.

8.2. Jameson Scheme for Artificial Dissipation

Il modello di dissipazione artificiale più utilizzato è quello di Jameson, Schmidt e Turkel, in cui la **dissipazione artificiale** è scritta come mix di contributi al secondo e quarto ordine:

$$\mathcal{D}(U) = \sum_{\kappa} (\mathcal{D}_{\kappa}^2 - \mathcal{D}_{\kappa}^4) U, \quad \kappa = \xi, \eta, \zeta$$

In aree caratterizzate da significativi **effetti viscosi**, la diffusione fisica è già presente; pertanto, non è generalmente necessario introdurre un operatore di dissipazione artificiale, o almeno è sufficiente ridurlo al minimo. Per affrontare questa questione, Jameson e Turkel hanno suggerito un **metodo di scalatura** per i **termini dissipativi** da applicare in combinazione con le equazioni di Navier-Stokes. Tale scalatura, basata sugli **autovalori**, implica l'uso di un **fattore di scala variabile** determinato in funzione degli autovalori (o più precisamente dei raggi spettrali) delle matrici Jacobiane dei flussi convettivi, che a sua volta dipende dallo stretching della griglia.

Nei calcoli RANS/URANS, è vantaggioso concentrare la griglia (clustering) vicino alle pareti solide o agli strati di shear, dove i gradienti sono maggiori a causa della diffusione.

Il **fattore di scala variabile** per la dissipazione artificiale agisce come un **senore per lo stretching della griglia**: in presenza di stretching, il fattore di scala si riduce progressivamente, eliminando così la dissipazione artificiale. Pertanto, sarebbe inappropriato implementare un rafforzamento della griglia in aree prive di fenomeni viscosi significativi.

Le formule matematiche che descrivono gli operatori di secondo e quarto ordine sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\kappa}^2 U &= \delta_{\kappa}^+ \left(\Lambda_{k+1/2} \epsilon_{k+1/2}^{(2)} \right) \delta_{\kappa}^- U \\ \mathcal{D}_{\kappa}^4 U &= \delta_{\kappa}^+ \left(\Lambda_{k+1/2} \epsilon_{k+1/2}^{(4)} \right) \delta_{\kappa}^- \delta_{\kappa}^+ \delta_{\kappa}^- U \end{aligned}$$

Il fattore di scala è rappresentato dal termine $\Lambda_{k+1/2}$ mentre gli ϵ sono funzioni che controllano il livello della dissipazione artificiale introdotta. Il termine Λ è legato a dei **raggi spettrali r_k delle matrici Jacobiane** e si calcola come media delle celle adiacenti che hanno a comune l'interfaccia:

$$\Lambda_{k+1/2} = \frac{1}{2} [\Lambda_{k+1} + \Lambda_k] \quad \Lambda_{\kappa} = \Phi_{\kappa} r_{\kappa}$$

Il **raggio spettrale** può essere definito come il massimo valore assoluto tra gli autovalori della matrice Jacobiana. All'interno di questa matrice, il termine U_k denota la **componente controvariante** della **velocità lungo la direzione k** , mentre a rappresenta la **velocità del suono**. Inoltre, la radice quadrata che ingloba i termini metrici è indicativa dell'area dell'interfaccia in esame.

$$r_{\kappa} = |U_{\kappa}| + a \sqrt{(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2)}$$

Gli autovalori possono essere positivi o negativi in base alle soluzioni del polinomio caratteristico della matrice considerata mentre i raggi spettrali sono il valore assoluto dell'autovalore di valore assoluto massimo. L'effetto di questi termini è quello di rimuovere l'effetto della dissipazione artificiale laddove si ha uno stretching della griglia (infittimento).

$$\Phi_{\xi} = 1 + \left(\frac{r_{\eta}}{r_{\xi}} \right)^{\sigma} + \left(\frac{r_{\zeta}}{r_{\xi}} \right)^{\sigma} \quad \Phi_{\eta} = 1 + \left(\frac{r_{\xi}}{r_{\eta}} \right)^{\sigma} + \left(\frac{r_{\zeta}}{r_{\eta}} \right)^{\sigma} \quad \Phi_{\zeta} = 1 + \left(\frac{r_{\xi}}{r_{\zeta}} \right)^{\sigma} + \left(\frac{r_{\eta}}{r_{\zeta}} \right)^{\sigma}$$

L'esponente σ , che varia tra 0 e 1, assume un valore di 2/3 per flussi bidimensionali e 0,4 per quelli tridimensionali.

Questo parametro è cruciale nella definizione di Φ_k , dove si sottolinea l'importanza dell'aspect ratio della cella, indicato con $AR = r_i/r_j$. In particolare, l' AR influisce sulla dissipazione: quando è molto ridotto, come nello strato limite, la dissipazione viene diminuita. Questo è fondamentale nello strato limite, dove le celle vengono compresse per rappresentare accuratamente i gradienti intensi. In questa regione, la dissipazione fisica causata dalla viscosità è adeguata a stabilizzare il modello, rendendo superflua l'aggiunta di dissipazione artificiale. Tuttavia, comprimere la griglia

in aree esterne allo strato limite può portare a instabilità del metodo, dovuta alla mancanza di dissipazione artificiale necessaria.

I coefficienti ϵ utilizzano la pressione come sensore per gli urti e i punti di ristagno, conferendo allo schema delle proprietà shock-capturing.

$$\epsilon_{k+1/2}^{(2)} = k^{(2)} \max(\nu_{k-1}, \nu_k, \nu_{k+1}, \nu_{k+2}) \quad \nu_k = \frac{p_{k+1} - 2p_k + p_{k-1}}{p_{k+1} + 2p_k + p_{k-1}}$$

$$\epsilon_{k+1/2}^{(4)} = \max\left[0, \left(k^{(4)} - \epsilon_{k+1/2}^{(2)}\right)\right]$$

Il sensore ν_k , che rileva gli urti, opera sulla base di un gradiente di pressione. In condizioni in cui il flusso è regolare e i gradienti di pressione sono lievi, il valore di ν è ridotto, così come è minore il termine $\epsilon^{(2)}$, determinando che il modello operi prevalentemente a un ordine quarto. Al contrario, in prossimità di onde d'urto o punti di ristagno, dove i gradienti di pressione sono intensi, il valore di ν aumenta significativamente, così come quello di $\epsilon^{(2)}$, facendo sì che il modello agisca principalmente a un ordine secondo. Le costanti $k^{(2)}$ e $k^{(4)}$ sono impiegate per regolare il grado di dissipazione artificiale introdotto nel sistema. Generalmente, si adottano potenze di due per questi valori, con $k^{(2)}$ che viene comunemente impostato a $1/2$ e $k^{(4)}$ a $1/32$. Valori superiori di queste costanti corrispondono a livelli più elevati di dissipazione.

In ambito pratico, il termine dissipativo di quarto ordine è essenziale per neutralizzare l'effetto di decoupling tra componenti pari e dispari. Questo termine, pur essendo di un ordine superiore rispetto all'errore di troncamento dello schema numerico, non è da solo sufficiente a impedire l'emergere di oscillazioni nelle aree caratterizzate da gradienti pronunciati. Per questo motivo, si rende necessario introdurre un termine dissipativo di secondo ordine. La sua attivazione è regolata dalla presenza dei sensori ν_k : il termine di secondo ordine entra in gioco esclusivamente nelle regioni dove i gradienti sono significativi, mentre rimane trascurabile nelle zone con variazioni gradualmente del flusso. Il coefficiente $\epsilon_{k+1/2}^{(4)}$ è progettato in modo che, in presenza di gradienti elevati e con l'attivazione del termine di secondo ordine, tenda a zero, lasciando agire solamente la dissipazione di secondo ordine e annullando quella di quarto ordine. Inoltre, gli operatori dissipativi vengono annullati in corrispondenza delle pareti solide per minimizzare problemi di conservazione dello schema numerico e per evitare la generazione di movimenti non attenuati.

9. Upwind Schemes for the Euler and Navier-Stokes equations

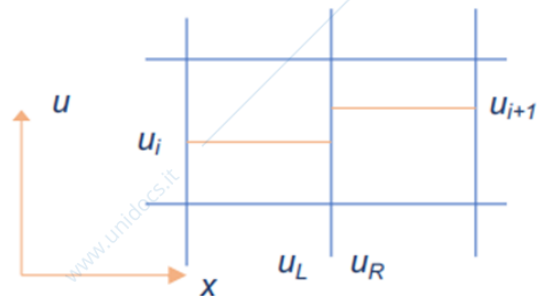
In questa sezione, l'intento è estendere le riflessioni sviluppate per i metodi upwind applicati alle differenze finite, al contesto dei volumi finiti. A differenza degli **schemi centrali**, che non differenziano le direzioni di propagazione delle perturbazioni e generano di conseguenza onde spurie causando il disaccoppiamento delle soluzioni tra nodi pari e dispari, i **metodi upwind** risolvono tale problema introducendo la dissipazione artificiale. Questi metodi **decentrano le derivate dei termini spaziali** in base alla direzione del flusso:

- si utilizza una differenza in avanti se la velocità del flusso è negativa;
- altrimenti una differenza all'indietro se la velocità del flusso è positiva.

Ciò conduce a uno **schema stabile di primo ordine** che, contrariamente agli schemi centrati, prende in considerazione la **direzione di propagazione** dell'informazione. Gli schemi upwind, infatti, integrano nelle **equazioni discretizzate** le proprietà fisiche di propagazione delle grandezze coinvolte, mirando a incorporare nella formulazione discreta dei flussi numerici la propagazione fisica intrinseca alle equazioni. La ragione di tale stabilità sta nel fatto che, se lo schema rispetta la **condizione CFL** è possibile soddisfare le condizioni di compatibilità,

Il metodo dei volumi finiti si distingue per l'assegnazione dei valori delle variabili conservative a tutta la cella di calcolo piuttosto che a un singolo punto spaziale, come un nodo della griglia. Questo approccio implica che il fulcro del metodo risiede nell'accurata definizione del flusso numerico all'interfaccia tra le celle. Dal punto di vista matematico, considerando che nel metodo dei volumi finiti lo stato fisico è rappresentato su tutta la cella, emerge che la soluzione è **costante a tratti**, con discontinuità all'interfaccia tra celle. Di conseguenza, l'**evoluzione temporale del flusso** è influenzata dal modo in cui queste discontinuità si muovono attraverso il campo di flusso. Questa situazione corrisponde a un **problema di Riemann**, ben noto in matematica, la cui soluzione è stabilita. Se le discontinuità fossero fisicamente realistiche, ci troveremmo di fronte a un problema di Riemann reale; tuttavia, nel contesto del metodo dei volumi finiti, si tratta di una questione puramente numerica.

In un **contesto monodimensionale**, si definiscono gli stati di riferimento "Left" e "Right" per descrivere le condizioni del fluido rispettivamente alle interfacce sinistra e destra di una superficie di calcolo arbitraria. Questi stati rappresentano esclusivamente **valori di interfaccia** e non corrispondono necessariamente agli stati nelle celle adiacenti, ovvero lo stato "Left" potrebbe non coincidere con lo stato nella cella " i " e lo stato "Right" potrebbe non riflettere lo stato nella cella " $i + 1$ ". Pertanto, non vi è una correlazione diretta con i valori delle variabili dipendenti nelle singole celle.



Nell'ipotesi di un problema monodimensionale e applicando uno **schema numerico di primo ordine**, il valore "Right" corrisponde alla cella " $i + 1$ " e il valore "Left" alla cella " $i - 1$ ". La scelta tra questi valori è determinata dalla direzione della velocità del flusso locale. Tuttavia, la situazione si complica quando si considerano problemi più articolati; in questi casi, per ricostruire i **valori delle variabili all'interfaccia**, ovvero i contributi che gli stati u_L e u_R devono rispettare, si ricorre all'approccio basato sulle **caratteristiche**. Questo è stato dedotto linearizzando le equazioni di Eulero. Ecco che, di fatto, questi requisiti possono essere soddisfatti in modo rigoroso solo ed esclusivamente per un problema lineare. Per quelli non lineari si devono soddisfare altri vincoli come quello di preservarne la conservazione. Tale metodologia è fondamentale per garantire che lo schema numerico sia in accordo con le **direzioni di propagazione delle perturbazioni**. Analizzando le fluttuazioni della soluzione come somma di **contributi di onde semplici**, è possibile tracciare l'origine di ciascun contributo e, di conseguenza, determinare la posizione da cui prelevarli.

9.1. Flux Splitting

Per determinare il valore del flusso F all'interfaccia, è essenziale considerare i valori provenienti sia dal lato destro che da quello sinistro. Questi contributi sono fondamentali per definire le variabili in gioco sull'interfaccia stessa. L'introduzione di tali contributi deve avvenire in maniera tale da rispettare le **proprietà di propagazione** dell'equazione in esame. Inoltre, la loro determinazione deve essere coerente con la **teoria delle caratteristiche**, assicurando che le condizioni al contorno siano soddisfatte e che il flusso risultante sia fisicamente plausibile e matematicamente consistente con il sistema di equazioni governativo.

In un contesto monodimensionale e in un'analisi di primo ordine, la variabile U nelle posizioni i o $i + 1$ è approssimata come $U_{i+1/2}$, a seconda della direzione del flusso. Tuttavia, generalmente il problema presenta una complessità maggiore. Per una corretta ricostruzione dei valori delle variabili all'interfaccia, si ricorre all'approccio basato sulle caratteristiche. Questo passaggio è fondamentale per garantire che lo schema adottato sia coerente con le direzioni di propagazione delle perturbazioni. Di conseguenza, la soluzione può essere destrutturata in contributi di onde semplici:

$$\delta U = \sum_k \delta \omega_k r^{(k)}$$

Il termine $r^{(k)}$ indica la direzione della perturbazione di ampiezza $\delta \omega_k$ della k -esima caratteristica.

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \mathcal{F}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$$

Introduciamo una serie di variabili tramite uno splitting del flusso:

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^- = \mathcal{F}(\mathbf{U}_L) + \delta \mathcal{F}^- \quad \mathcal{F}_{i+1/2}^+ = \mathcal{F}(\mathbf{U}_R) - \delta \mathcal{F}^+$$

dove:

$$\delta \mathcal{F}^- = \frac{1}{2} [\delta \mathcal{F} - |\delta \mathcal{F}|] \quad \delta \mathcal{F}^+ = \frac{1}{2} [\delta \mathcal{F} + |\delta \mathcal{F}|]$$

$$\delta \mathcal{F} = \delta \mathcal{F}^+ + \delta \mathcal{F}^-$$

I termini F^- e F^+ non corrispondono a $F(U_L)$ e $F(U_R)$, in quanto ciò renderebbe lo schema non conforme al principio upwind. In uno schema upwind, i **contributi al flusso all'interfaccia non sono simmetrici**, ma devono rispettare la teoria delle caratteristiche. Per questo motivo, si introduce un termine δ . Di conseguenza, il **flusso all'interfaccia** è dato dalla **media ponderata**, che tiene conto della discontinuità del flusso in quel punto:

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\mathcal{F}_{i+1/2}^- + \mathcal{F}_{i+1/2}^+)$$

In un contesto di **problemi lineari** governati da **equazioni iperboliche lineari**, quali le **equazioni di Eulero linearizzate**, la **variazione del flusso**, indicata con $\delta \mathcal{F}$, può essere descritta mediante l'impiego della **matrice Jacobiana**. Quest'ultima stabilisce un collegamento diretto tra le modifiche apportate al vettore flusso e quelle effettuate al vettore di stato. Di conseguenza, si perviene alla seguente espressione matematica:

$$\delta \mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{U}} \delta \mathbf{U} = \mathcal{A} \delta \mathbf{U} \quad \text{con} \quad \mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{U}}$$

dove \mathcal{A} è appunto la **matrice jacobiana**.

Conformemente alla **teoria delle caratteristiche**, si postula che qualsiasi variazione del vettore di stato in un dato punto del campo di flusso sia influenzata esclusivamente dall'intensità delle onde che pervengono a quel punto in un dato istante. Ciò implica che è fattibile scomporre δU in **soluzioni d'onde semplici**, seguendo i principi della teoria delle caratteristiche. Pertanto, la variazione del vettore di stato dovrebbe essere rappresentata attraverso variabili caratteristiche, come illustrato nella formula seguente:

$$\delta \mathbf{U} = \sum_{\kappa} \mathcal{R}^{(\kappa)} \delta \mathcal{W}^{(\kappa)} \quad \delta \mathcal{F} = \mathcal{A} \delta \mathbf{U} = \mathcal{A} \sum_{\kappa} \mathcal{R}^{(\kappa)} \delta \mathcal{W}_{\kappa} = \sum_{\kappa} \mathcal{A} \mathcal{R}^{(\kappa)} \delta \mathcal{W}_{\kappa} = \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa} \delta \mathcal{W}_{\kappa} \mathcal{R}^{(\kappa)}$$

Dove:

- $\delta\mathcal{W}$ rappresentano le variazioni delle ampiezze delle caratteristiche;
- $\mathcal{R}^{(k)}$ rappresenta la matrice degli autovettori destri della matrice jacobiana A per cui $AR^{(k)} = \lambda_k R^{(k)}$ in cui λ_k sono gli autovalori;

È possibile distinguere i contributi positivi e negativi λ_k^+, λ_k^- attraverso lo **splitting degli autovalori**, denotati con λ_k . Definendo $|A|$ come la **matrice diagonale** contenente i **valori assoluti degli autovalori** lungo la sua diagonale principale, e definendo $|A| = L|A|R$, dove L ed R rappresentano le matrici degli autovettori sinistri e destri, si ottiene una nuova rappresentazione matriciale:

$$\delta\mathcal{F}^- = \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa}^- \delta\mathcal{W}_{\kappa} \mathcal{R}^{(\kappa)} \quad \delta\mathcal{F}^+ = \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa}^+ \delta\mathcal{W}_{\kappa} \mathcal{R}^{(\kappa)} \quad \lambda_{\kappa}^{\pm} = \frac{1}{2} (\lambda_{\kappa} \pm |\lambda_{\kappa}|)$$

A questo punto:

$$\delta\mathcal{F}^- = \mathcal{A}^- \delta\mathbf{U}, \quad \mathcal{A}^- = \mathbf{L}\mathbf{A}^-\mathbf{R} \quad \delta\mathcal{F}^+ = \mathcal{A}^+ \delta\mathbf{U}, \quad \mathcal{A}^+ = \mathbf{L}\mathbf{A}^+\mathbf{R}$$

Sostituendo nell'espressione di $F_{i+1/2}$ si ottiene il flusso sulla generica faccia:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i+1/2} &= \frac{1}{2} [\mathcal{F}(\mathbf{U}_L) + \mathcal{F}(\mathbf{U}_R)] - \frac{1}{2} \sum_{\kappa} |\lambda_{\kappa}| \delta\mathcal{W}_{\kappa} \mathcal{R}^{(\kappa)} \\ &= \frac{1}{2} [\mathcal{F}(\mathbf{U}_L) + \mathcal{F}(\mathbf{U}_R)] - \frac{1}{2} |\mathcal{A}| [\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L] \end{aligned}$$

Il primo elemento dell'equazione rappresenta la **media ponderata dei flussi calcolati nelle celle adiacenti all'interfaccia**, utilizzando i vettori di stato Sinistro e Destro all'interfaccia (schema centrale). Questo termine stabilisce la base dello schema, mentre il secondo termine introduce un **fattore direzionale**, simile a una forma di **dissipazione artificiale**, che conferisce allo schema la sua caratteristica upwind. La specifica modalità di interpolazione degli U_R e U_L determina l'ordine dello schema numerico. Per quanto riguarda il **flux splitting** applicato a un **problema lineare** ($A = \text{costante}$), questo soddisfa tutte le proprietà richieste: è di tipo **upwind**, in quanto rispetta la direzione di propagazione delle onde, ed è **conservativo**, garantendo la coerenza fisica della soluzione.

Quando si affronta un **problema non lineare**, come quello rappresentato dalle **equazioni di Eulero**, caratterizzato da una marcata non linearità associata ai termini convettivi, l'approccio richiesto è più complesso. È essenziale che lo schema numerico adottato sia di tipo upwind e conservativo. Per realizzare uno schema upwind efficace, è necessario disporre di un insieme completo di **autovalori reali** e di **autovettori linearmente indipendenti**. Questo permette di scomporre la soluzione in onde semplici, facilitando l'individuazione della direzione da cui originano le perturbazioni che influenzano le variazioni nel vettore delle variabili conservative U . In questo contesto, la matrice A non è più unica e non corrisponde generalmente alla matrice Jacobiana.

$$\delta|F| = |\tilde{A}| \delta U$$

9.2. Roe Scheme

Per determinare la **matrice A**, è necessario imporre alcuni **vincoli supplementari**. Roe ha identificato specifiche proprietà che la matrice deve soddisfare:

- Deve essere **conservativa**, ovvero deve rispettare la seguente espressione:

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}_R) - \mathcal{F}(\mathbf{U}_L) = |\tilde{A}| [\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L]$$

- Deve essere **consistente** con il problema lineare, in modo che, in tale contesto, si riduca alla matrice Jacobiana, come espresso da:

$$\mathbf{U}_R = \mathbf{U}_L = \mathbf{U} \implies \tilde{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{U}}$$

- Lo schema numerico adottato deve mantenere l'iperbolicità delle equazioni discretizzate, il che significa che la matrice A deve possedere autovalori reali e autovettori linearmente indipendenti. In altre parole, la matrice A dovrebbe rappresentare una **decomposizione in soluzioni d'onda semplice**, avendo quindi **autovalori λ_k reali** e **autovettori $r_{(k)}$ linearmente indipendenti**.

Roe ha notato che queste proprietà garantiscono l'unicità della matrice solo nel caso di un gas perfetto. Ha osservato che, per un gas ideale, le **variabili conservative** e i **flussi** corrispondenti possono essere espressi come forme quadratiche delle componenti di un **vettore \mathbf{Z}** detto **vettore delle variabili di Roe**, e definito come:

$$\mathbf{Z} = \sqrt{\rho} [1, u, v, w, H]^T$$

Con l'ipotesi di **gas perfetto**, si sostituisce l'entalpia al termine di energia totale in modo da poter esprimere tutte le variabili come:

$$\rho = z_1^2, \quad \rho u = z_1 z_2, \quad \rho v = z_1 z_3, \quad \rho w = z_1 z_4$$

$$\rho E = \frac{z_1 z_5}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)$$

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(z_1 z_5 - \frac{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}{2} \right)$$

Tutti questi termini sono **quadratici** ed **omogenei** nelle componenti del vettore z .

Prendendo in considerazione una **variazione arbitraria** di una **funzione quadratica $\delta(z_i z_j)$** , è possibile esprimere tale variazione come:

$$\delta(z_i z_j) = \bar{z}_i z_j + z_i \bar{z}_j$$

dove il simbolo sopra le variabili indica la **media aritmetica**. Utilizzando questa notazione e proprietà, si può fornire una dimostrazione rigorosa dell'identità tra la **matrice modificata $\tilde{\mathbf{A}}$** , utilizzata nello schema di Roe, e la **matrice Jacobiana** quando espressa in termini di variabili specifiche, note come "**variabili medie alla Roe**":

$$\begin{cases} \bar{\rho} &= \frac{\sqrt{\rho_L \rho_R}}{(u\sqrt{\rho})_R + (u\sqrt{\rho})_L} \\ \bar{u} &= \frac{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}{(v\sqrt{\rho})_R + (v\sqrt{\rho})_L} \\ \bar{v} &= \frac{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}{(w\sqrt{\rho})_R + (w\sqrt{\rho})_L} \\ \bar{w} &= \frac{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}{(H\sqrt{\rho})_R + (H\sqrt{\rho})_L} \\ \bar{H} &= \frac{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \end{cases}$$

Se scriviamo la matrice Jacobiana del flusso convettivo utilizzando queste variabili si trova una matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ che soddisfa tutti i requisiti richiesti. Questa è la base di uno dei metodi upwind più famosi, che prende il nome di schema di Roe.

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [\mathcal{F}(\mathbf{U}_L) + \mathcal{F}(\mathbf{U}_R)] - \frac{1}{2} \sum_{\kappa} |\bar{\lambda}_{\kappa}| \delta \mathcal{W}_{\kappa} \bar{\mathcal{R}}^{(\kappa)} \\ \quad = \frac{1}{2} [\mathcal{F}(\mathbf{U}_L) + \mathcal{F}(\mathbf{U}_R)] - \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{A}}| [\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L] \\ \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}}) \end{cases}$$

9.3. Higher-order upwind schemes

L'ampliamento di questo modello per affrontare **questioni bidimensionali** e **tridimensionali** può essere formalizzato considerando separatamente il flusso in ognuna delle tre direzioni principali. Questo approccio, noto come upwind, tratta le direzioni come se fossero indipendenti l'una dall'altra. Di conseguenza, il problema originale si decompone in **3 distinti problemi monodimensionali**, ciascuno dei quali può essere risolto con maggiore facilità e precisione. Questa metodologia permette di semplificare la complessità intrinseca dei problemi multidimensionali, riducendoli a una serie di problemi più gestibili.

La determinazione dell'ordine di un metodo numerico è influenzata dalla definizione dei valori a destra e a sinistra dell'interfaccia, noti come U_R e U_L . La procedura più diretta consiste nell'uguagliare questi valori a quelli delle celle adiacenti all'interfaccia.

$$U_L = U_i \quad , \quad U_R = U_{i+1}$$

Tuttavia, tale approccio genera un **metodo del primo ordine**, il quale spesso non soddisfa i requisiti delle applicazioni di Fluidodinamica Computazionale (CFD). Di conseguenza, è essenziale elaborare **metodi upwind di ordine superiore**, che coinvolgano un insieme più ampio di celle. Per evitare l'emergere di **oscillazioni spurie di natura numerica**, è fondamentale che il metodo possa passare automaticamente dal suo ordine nominale al primo ordine in presenza di discontinuità. A tal fine, U_R e U_L vengono definiti mediante **estrapolazione lineare, quadratica o cubica**, a seconda dell'ordine desiderato. Si introducono inoltre delle **funzioni limitatrici** per controllare la pendenza adottata, in modo da ridurla o eliminarla quando necessario per ricondurre il metodo al primo ordine.

9.3.1. Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws

Il **MUSCL** (*Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws*) rappresenta il metodo di estrapolazione prediletto per la sua generalità e flessibilità, risultando particolarmente adatto per l'impiego in **scemi upwind di ordine moderato**, come il secondo o il terzo. Questo metodo definisce le variabili a sinistra e a destra (U_L e U_R) presso l'interfaccia $i + 1/2$, operando in un contesto localmente monodimensionale, il che è consentito dalla natura stessa dello schema. Le variabili sono calcolate seguendo formule specifiche che garantiscono la monotonia del flusso, evitando oscillazioni spurie e migliorando la precisione della soluzione numerica:

$$U_L = U_i + \frac{\vartheta}{4} [(1 - \kappa)\delta^+ U_i + (1 + \kappa)\delta^+ U_{i+1}]$$

$$U_R = U_{i+1} - \frac{\vartheta}{4} [(1 + \kappa)\delta^+ U_{i+1} + (1 - \kappa)\delta^+ U_{i+2}]$$

Gli stati destro e sinistro sono entrambi controllati da 2 parametri, ovvero ϑ (preso generalmente in valore unitario) e k (assume vari valori). Variando questi parametri siamo in grado di ottenere scemi diversi. Inoltre, l'operatore δ ha l'usuale significato di differenza in avanti o indietro a seconda se si considera l'operatore δ^+ o δ^- .

A seconda dei valori di k e ϑ si ottengono diversi scemi di estrapolazione delle variabili:

- $k = -1$: lo schema di estrapolazione lineare è decentrato e porta ad uno **schema upwind del secondo ordine**;
- $k = 0$: si ottiene ancora uno **schema al secondo ordine** basato su una estrapolazione che coinvolge una cella a monte e una cella a valle;
- $k = 1/2$: si ottiene uno schema noto che si è sviluppato indipendentemente dall'approccio MUSCL che prende il nome di **Quick Scheme**;
- $k = 1/3$: lo schema ottenuto è **upwind del terzo ordine compatto**, ovvero che utilizza tante celle quanto è l'ordine dello schema stesso (in generale per avere uno schema del terzo ordine ci vorrebbero quattro celle). È il valore di k più importante.;
- $k = 1$: lo schema ottenuto è **centrale del secondo ordine**.

Il persistente problema è che l'**approccio MUSCL** rimane **monotono** in assenza di discontinuità. Infatti, implementando schemi di ordine superiore al primo, nasce nuovamente il problema per il quale non sono in grado di prevenire la nascita di **oscillazione spurie** in prossimità delle discontinuità. Esse, se non smorzate, portano alla divergenza dello schema numerico. È essenziale sviluppare un meccanismo che permetta di passare al primo ordine in presenza di discontinuità. Questo richiede un metodo per limitare i gradienti nella soluzione, che non può essere affrontato solo matematicamente, ma necessita anche di una solida base fisica. Esistono vari metodi per affrontare questa sfida, tra i quali i due principali sono:

- Gli **schemi ENO (Essentially Non-Oscillatory)**, che si avvalgono di schemi upwind di ordine superiore al terzo. Questi schemi riducono la molecola di calcolo attraverso sensori che, avvicinandosi a una discontinuità, diminuiscono l'ordine fino al primo, minimizzando così le oscillazioni.
- La **condizione TVD (Total Variation Diminishing)**, il cui scopo è prevenire l'emergere di onde spurie vicino alle discontinuità, influenzando il loro meccanismo di generazione. A differenza degli schemi con dissipazione artificiale, che accettano l'emergere di tali oscillazioni per poi attenuarle, la condizione TVD introduce fattori di correzione non lineari che funzionano come limitatori della pendenza locale della soluzione. Per lo sviluppo di queste funzioni limitatrici, è indispensabile stabilire delle precise linee guida, delineate dalla condizione TVD stessa.

Per migliorare la qualità dello schema, è necessario non solo **aumentare il suo ordine**, ma anche garantire che sia **shock-capturing**. Mentre gli schemi di primo ordine non presentano questo problema grazie alla loro dissipazione intrinseca di secondo ordine, che attutisce le oscillazioni vicino a discontinuità o gradienti elevati, gli schemi di ordine superiore non beneficiano di tale dissipazione. Infatti, gli errori di troncamento in questi ultimi sono anch'essi di ordine superiore, il che li rende inefficaci nel sopprimere le oscillazioni indesiderate. Pertanto, è fondamentale implementare un meccanismo che possa adeguatamente smorzare tali oscillazioni nei metodi numerici di ordine superiore.

9.3.2. Total Variation Diminishing Condition

L'**approccio TVD (Total Variation Diminishing)** è una metodologia affermata e ampiamente adottata, particolarmente vantaggiosa nei calcoli RANS e URANS. Questa tecnica è progettata per attenuare progressivamente i gradienti emergenti nella soluzione numerica, evitando così l'incremento indefinito e preservando un comportamento monotono. A differenza dei metodi dissipativi, che permettono l'emergere di oscillazioni per poi attenuarle, l'approccio TVD **previene la formazione di termini oscillatori nella soluzione intervenendo direttamente sul processo di generazione**. Ciò si ottiene mediante l'introduzione di **fattori correttivi non lineari**, che funzionano come limitatori della variazione locale, garantendo la stabilità della soluzione.

Il principio fondamentale su cui si basa l'approccio TVD è che la **variazione totale** di qualsiasi soluzione fisicamente realistica **non deve aumentare nel tempo**. In un contesto unidimensionale, la variazione totale di una soluzione può essere espressa tramite una formula specifica:

$$TV = \int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \quad (\text{one dimension})$$

Analogamente, in forma discreta, la **soluzione al tempo n** è definita da un'altra equazione matematica:

$$TV(u^n) = \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n|$$

Un algoritmo numerico si conforma al criterio TVD se la **variazione totale al tempo $n + 1$ non supera quella al tempo n** , come indicato da:

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$$

Questo assicura che il **valore di un picco locale** (massimo locale) non aumenti e **quello di una depressione locale** (minimo locale) non diminuisca nel tempo. Un tale schema conserva la **monotonia della soluzione**: **se al tempo n la soluzione è monotona, lo sarà anche al tempo $n + 1$** . È stato dimostrato che, se un algoritmo è monotono, allora soddisfa la condizione TVD e, di conseguenza, mantiene la monotonia della soluzione, evitando l'apparizione di oscillazioni spurie.

Le proprietà distintive di uno **schema TVD** includono:

- L'impossibilità di generare nuovi estremi durante l'integrazione temporale.
- La prevenzione della creazione di nuovi massimi o minimi nella soluzione.
- Il mantenimento non decrescente del valore di un minimo locale nel tempo.
- La non crescita del valore corrispondente a un massimo locale nel tempo.

Il soddisfacimento della condizione TVD per flussi numerici si traduce in **vincoli** che l'**estrapolazione MUSCLE** deve soddisfare:

$$u_{i-1} \leq u_{i+1} \Rightarrow \begin{cases} u_{i-1/2}^R \geq u_{i-1} \\ u_{i+1/2}^L \leq u_{i+1} \end{cases}$$

In particolare, per assicurare che l'**estrapolazione MUSCL** rispetti la **condizione TVD**, è necessario introdurre dei **limitatori di pendenza Ψ** , noti anche come **Slope Limiters**, che hanno il compito di moderare i gradienti all'interno del calcolo numerico. Questi limitatori sono funzioni matematiche che si applicano ai rapporti tra le differenze dei valori calcolati, per evitare oscillazioni spurie nella soluzione numerica.

Ad esempio, considerando il vettore di stato sinistro, l'estrapolazione MUSCL può essere espressa attraverso la formula:

$$\mathbf{U}_L = \mathbf{U}_i + \frac{1}{4} \left[(1 - \kappa) \Psi_{i-1/2}^+ \delta^+ \mathbf{U}_i + (1 + \kappa) \Psi_{i+1/2}^- \delta^+ \mathbf{U}_{i+1} \right]$$

In cui la funzione limitatrice di pendenza Ψ è valutata in funzione di un parametro r , che rappresenta il rapporto tra le differenze successive dei valori discreti.

$$\Psi_{i-1/2}^+ = \Psi \left(r_{i-1/2}^+ \right) \quad , \quad \Psi_{i+1/2}^- = \Psi \left(r_{i+1/2}^- \right)$$

$$r_L = r_{i-1/2}^+ = \frac{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i}{\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}} = \frac{1}{r_{i+1/2}^-}$$

Questa funzione è cruciale per mantenere la proprietà TVD dello schema numerico, specialmente in presenza di soluzioni uniformi, come nel caso di un flusso laminare in una lastra piana, dove numericamente si potrebbe incontrare una situazione di tipo 0/0. Per evitare indeterminazioni, al denominatore si aggiunge un piccolo termine proporzionale all'unità di arrotondamento della macchina (zero macchina), garantendo così la stabilità numerica.

Applicando queste regole, la variabile a sinistra, indicata con l'indice $i + 1/2$, viene aggiornata secondo una specifica formula che incorpora il limitatore di pendenza:

$$\mathbf{U}_L = \mathbf{U}_i + \frac{1}{4} \left[(1 - \kappa) \Psi(r_L) \delta^+ \mathbf{U}_i + (1 + \kappa) \Psi \left(\frac{1}{r_L} \right) \delta^+ \mathbf{U}_{i+1} \right]$$

Analogamente, per le variabili a destra dell'intervallo, si utilizza una formula simile.

$$U_{i-1/2}^R = U_{i+1} - \frac{1}{4} \left[(1 - k) \psi_{i+3/2}^- (U_{i+2} - U_{i+1}) + (1 + k) \psi_{i-1/2}^- (U_{i+1} - U_i) \right]$$

non trattate
da
professori
Forse è anche
sbagliata

Per garantire che le funzioni Ψ rispettino la condizione *Total Variation Diminishing (TVD)*, è essenziale costruirle in modo che attenuino i gradienti tra le celle adiacenti. La conformità alla condizione TVD implica che, per ogni coppia di valori r e s , debba essere soddisfatta una specifica relazione matematica:

$$\frac{\Psi(r)}{r} - \Psi(s) \leq 2$$

È opportuno **circoscrivere ulteriormente l'insieme di valori ammissibili** per la funzione Ψ , limitandosi a quelle positive, ovvero che rispettano:

$$\begin{cases} \Psi(r) \geq 0 & r \geq 0 \\ \Psi(r) = 0 & r < 0 \end{cases}$$

Questo restringimento permette di semplificare la condizione TVD, richiedendo che $0 \leq \Psi(r) \leq 2r$. In aggiunta, si richiede comunemente che $\Psi(r) \leq 2$, il che trasforma la condizione TVD in quella espressa da:

$$0 \leq \Psi(r) \leq \min(2r, 2)$$

Tuttavia, questa non è l'unica condizione necessaria. Per ottenere uno **schema di almeno secondo ordine** nelle regioni smooth, dove i gradienti non sono pronunciati, deve essere verificata un'ulteriore condizione, indicata come:

$$r \leq 1 \Rightarrow r \leq \Psi(r) \leq 1, \quad r = 1 \Rightarrow \Psi = 1$$

Esaminare il **diagramma di Sweby**, che illustra l'area in cui le funzioni Ψ devono rientrare per soddisfare sia la condizione TVD che quella del secondo ordine, risulta particolarmente utile. **Le aree in grigio** nel diagramma rappresentano le zone in cui le funzioni Ψ devono situarsi affinché l'interpolazione MUSCL conduca a uno schema TVD di almeno secondo ordine. Le funzioni che aderiscono a queste condizioni sono elencate di seguito. **In generale, più le funzioni limite si avvicinano al bordo inferiore del diagramma di Sweby, più lo schema tende ad essere dissipativo, ma al contempo più robusto.**

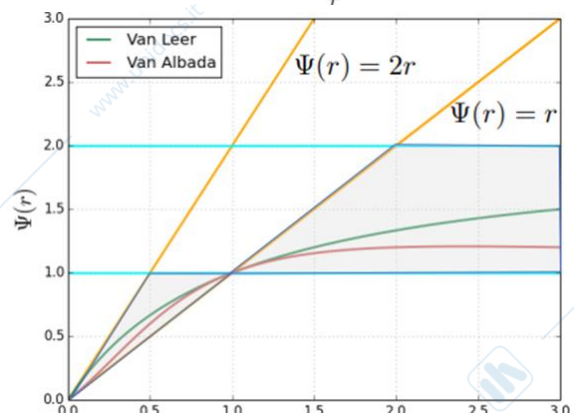
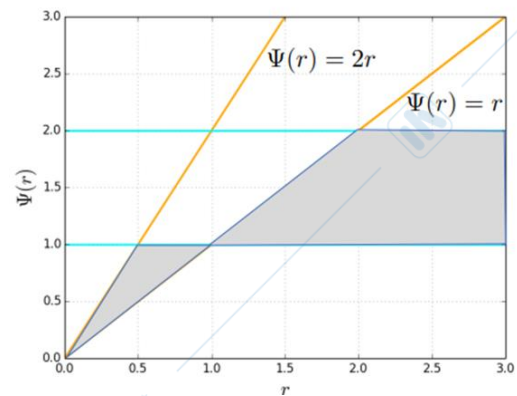
Le **funzioni più utilizzate** come **limiters** che rientrano nella zona grigia sono:

$$\text{Van Leer: } \Psi(r) = \frac{r + |r|}{1 + r}$$

$$\text{Van Albada: } \Psi(r) = \frac{r^2 + r}{1 + r^2}$$

$$\text{Minmod: } \Psi(r) = \max[0, \min(1, r)]$$

Gli schemi centrali che incorporano dissipazione artificiale si distinguono per la loro semplicità implementativa e per la loro applicabilità universale. Questi schemi sono efficaci in una vasta gamma di flussi, estendendosi dall'incomprimibile al supersonico, e si caratterizzano per la loro robustezza ed efficienza. Nonostante ciò, presentano una tendenza alla diffusività, che può risultare in imprecisioni nella modellazione di scie e strati limite esterni. D'altra parte, gli schemi Upwind possono essere sviluppati con livelli di accuratezza variabili e, sebbene siano computazionalmente più onerosi a causa della necessità di applicare l'upwinding ad ogni intervallo temporale, offrono una soluzione più precisa. Tuttavia, questi schemi non sono facilmente adattabili al contesto dei gas reali, poiché la diagonalizzazione della matrice Jacobiana non è un processo né semplice né definito in maniera univoca in tali situazioni.



10. Time-dependent methods for steady problems

Nell'ambito della risoluzione numerica di problemi fisici discretizzati, esistono due principali approcci che si traducono in altrettante categorie di algoritmi per l'integrazione temporale. Da un lato, abbiamo i metodi time-marching (o dipendenti dal tempo), impiegati da software come OpenFoam; dall'altro, i metodi di correzione della pressione, adottati da Fluent e CFX. In questa trattazione, ci concentreremo sui metodi time-marching, esplorando le loro caratteristiche e modalità di applicazione.

Per affrontare numericamente un problema fisico, che è stato discretizzato tramite i metodi precedentemente esaminati, generalmente si possono adottare due approcci distinti:

- I **Metodi Time Marching** trattano la questione come se fosse di natura evolutiva, anche per problemi di tipo stazionario, mantenendo le equazioni sempre nella forma iperbolica. Per i problemi stazionari, le equazioni diventano ellittiche in condizioni subsoniche e rimangono iperboliche in quelle supersoniche. Il processo viene inizializzato al passo 0 con una soluzione preliminare non fisica, che non corrisponde a uno stato di equilibrio. Tuttavia, man mano che la soluzione evolve nel tempo, essa tende asintoticamente verso la soluzione stazionaria desiderata. Quando l'interesse è rivolto alla soluzione stazionaria, la discretizzazione spaziale e quella temporale sono indipendenti, permettendo così di estendere il timestep a discrezione.
- I **Metodi di Pressure Correction**, d'altra parte, sono prevalentemente impiegati per flussi a basso numero di Mach e verranno discussi più approfonditamente in seguito.

10.1. The time-marching concept

Nei **metodi time-marching**, le equazioni vengono risolte nella loro **forma non stazionaria** anche per problemi stazionari, sfruttando così la loro **natura iperbolica** in tutti i regimi di flusso, da subsonico a supersonico. Questo approccio evita le complicazioni che emergono quando le equazioni stazionarie presentano caratteristiche ellittiche in flusso subsonico e iperboliche in supersonico, che possono ostacolare la risoluzione numerica. Di conseguenza, non si riscontrano metodi significativi che si basano esclusivamente sulla formulazione stazionaria delle equazioni.

Il processo viene inizializzato al passo zero a partire da una soluzione iniziale arbitraria non fisica e procede temporalmente con condizioni al contorno fisse, convergendo asintoticamente verso la soluzione stazionaria attraverso un transitorio non fisico. Durante questa fase, le soluzioni intermedie non hanno significato fisico fino alla convergenza. L'avanzamento temporale può essere gestito in modo **esplicito**, utilizzando solo la soluzione corrente per avanzare verso il time step successivo, o **implicito**, coinvolgendo anche la soluzione del passo successivo. I metodi impliciti, sebbene più complessi, presentano minori restrizioni sul passo temporale utilizzabile ai fini della stabilità e consentono l'uso di numeri CFL molto più elevati, migliorando la stabilità e rendendoli più robusti rispetto ai metodi espliciti, che sono limitati a CFL prossimi all'unità.

Nell'ambito dei metodi time-marching, la **precisione della discretizzazione temporale** e, di conseguenza, del metodo di integrazione nel tempo, non riveste importanza qualora l'obiettivo sia il raggiungimento di una **soluzione stazionaria**. Tra i vari schemi di integrazione temporale, emergono come particolarmente vantaggiosi quelli che presentano una **discretizzazione spaziale che non dipende da quella temporale**. Questa separazione permette l'impiego di differenti tecniche di discretizzazione spaziale in combinazione con metodologie variegiate di discretizzazione temporale. Un ulteriore beneficio di questo disaccoppiamento è che la soluzione stazionaria non viene influenzata dal valore del timestep scelto, rendendo questi schemi particolarmente efficaci per le strategie volte ad accelerare la convergenza.

L'analisi dei metodi di integrazione temporale inizia considerando un approccio che prescinde dalla discretizzazione spaziale. Ciò si traduce nel trattare il sistema di equazioni che regolano il fenomeno in esame come un insieme di equazioni differenziali ordinarie. Queste ultime sono espresse in una forma semi-discreta, che implica l'uso di coordinate generiche:

$$V \frac{dU}{dt} = \mathcal{R}(U) \quad \mathcal{R}(U) = - \sum_k \mathcal{F}_n^{(k)} S_k + SV$$

I termini $F_n^{(k)}$ rappresentano le componenti numeriche che descrivono i **flussi convettivi** e **diffusivi**, e possono includere anche un **termine di diffusione artificiale** (D) qualora si opti per un **approccio di discretizzazione spaziale centrale con dissipazione artificiale**. Tale termine non è presente se si preferisce utilizzare uno schema upwind. La **separazione** tra **discretizzazione spaziale** e **temporale** offre la flessibilità di applicare le due metodologie indipendentemente l'una dall'altra. Concentrandosi inizialmente sulla discretizzazione spaziale, il sistema di equazioni di governo si semplifica in un'equazione differenziale ordinaria. Dopo aver completato la discretizzazione, la derivata temporale di U si trasforma in una derivata totale, poiché i termini spaziali sono stati già considerati. Di conseguenza, è possibile adottare qualsiasi metodo di integrazione per equazioni differenziali ordinarie per procedere con l'integrazione temporale delle equazioni di governo. La scelta del metodo di integrazione temporale dovrebbe essere guidata dalla ricerca di una convergenza rapida verso la soluzione.

10.1.1. Runge-Kutta schemes

Esistono numerosi metodi espliciti per l'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie, che possono essere impiegati per disaccoppiare la discretizzazione spaziale da quella temporale. Questo processo ci consente di ridurre il problema a un'equazione differenziale ordinaria. Di conseguenza, qualsiasi metodo di integrazione per equazioni differenziali ordinarie può essere adottato per risolvere il nostro sistema di equazioni in forma semi-discreta. Tra i vari metodi disponibili, i **metodi di Runge-Kutta** rappresentano una soluzione comune e particolarmente efficace. Questi metodi sono caratterizzati da un **approccio multistage**, il che significa che l'integrazione non avviene in un unico passaggio, ma attraverso una serie di passi intermedi. Ogni passo corrisponde a un avanzamento parziale della soluzione, proporzionale a una frazione del time step totale. In generale, uno schema di integrazione Runge-Kutta si presenta con la seguente struttura, tenendo presente che si tratta di schemi espliciti:

$$\begin{cases} U^0 = U^n \\ \cdot \\ \cdot \\ U^q = U^0 + \alpha_q \frac{\delta t}{V} \mathcal{R}(U^{(q-1)}) \\ \cdot \\ \cdot \\ U^{n+1} = U^k \end{cases} \quad q = 1, \dots, k$$

Nel contesto attuale, la **soluzione iniziale** viene considerata come il punto di partenza, ovvero il passo zero. Procedendo al primo passo, la soluzione si evolve da U_0 aggiungendo un termine correlato al residuo calcolato nel passo immediatamente antecedente. Questo processo si ripete in maniera iterativa: al passo q -esimo, la soluzione si ottiene ancora partendo da U_0 e sommando un termine proporzionale al residuo, stavolta determinato al passo $q - 1$. Giunti al passo k -esimo, si raggiunge la soluzione per il time step successivo, $n + 1$.

È interessante notare che, durante le fasi successive di integrazione, il **punto di partenza** per l'avanzamento è sempre la **soluzione ottenuta al passo temporale iniziale**, indicata con U_0 per tutte le fasi del metodo di Runge-Kutta (RK). L'elemento che subisce una variazione è il residuo, che viene aggiornato in base al passo precedente di RK. Di conseguenza, è il **residuo** a essere **costantemente aggiornato sulla base della soluzione del passo antecedente**, e non l'integrazione stessa. Questa tecnica può quindi essere interpretata come un **metodo multi-passo**, dove in ogni fase si procede avanzando la soluzione di una porzione del time step. **Adottando questo approccio, che non prevede la copertura dell'intero time step con un singolo passo, si ha la possibilità di aumentare il valore del numero di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).**

I valori tipici di α_q per metodi di RK a 3,4,5 passi dipendono dal passo e dal numero di passi.

| | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | α_5 |
|---------|---------------|---------------|---------------|------------|------------|
| 3-stage | 0.15 | 0.4 | 1. | 0. | 0. |
| 4-stage | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1. | 0. |
| 5stage | 0.0695 | 0.1602 | 0.2898 | 0.506 | 1. |

I coefficienti α^q sono sempre numeri ≤ 1 . Si nota che il coefficiente dell'ultimo passo è sempre unitario. Il valore numerico di tali coefficienti è stato ottimizzato in modo tale che ciascuno schema sia accurato almeno al quarto ordine.

Aumentare il numero di passaggi temporali (time step) migliora l'accuratezza dell'approssimazione e la robustezza del modello, oltre a favorire una più rapida convergenza verso la soluzione. Tuttavia, l'incremento del time step è soggetto al vincolo del numero di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), poiché time step più elevati richiedono calcoli più frequenti dei termini residui, rallentando di fatto il processo. Si ha quindi un **effetto di trade-off**.

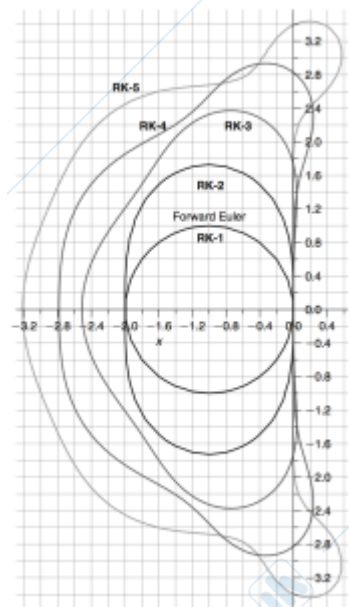
Gli **scemi di Runge-Kutta (R-K)**, caratterizzati dalla loro **natura esplicita**, sono vincolati da una **stabilità condizionata** che impone una limitazione attraverso la **condizione di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)**. Con l'incremento del numero di passi, si osserva un parallelo aumento del valore massimo del CFL applicabile, ma ciò comporta anche un incremento del carico computazionale. Analizziamo più dettagliatamente il **funzionamento di questo metodo**:

1. nel corso del passo attuale, si procede all'assemblaggio dei vettori relativi ai flussi diffusivi e convettivi, nonché dissipativi se presenti.
2. Successivamente, si calcola il residuo che viene integrato nello schema di R-K per determinare U^1 . Utilizzando questa U^1 , si ricalcolano i flussi e il residuo, che, inserito nuovamente nello schema, produce U^2 , e così via.

Questo metodo si rivela intrinsecamente oneroso, con un carico che cresce proporzionalmente al numero di passi dello schema. Di conseguenza, la selezione del numero ottimale di passi rappresenta un equilibrio tra il costo computazionale e la robustezza del metodo. Lo **schema di R-K più diffuso** è quello a **4 passi di Jameson-Schmidt-Turkel**, che consente un $CFL \leq 2\sqrt{2}$.

Nell'analisi della stabilità per metodi numerici applicati alle equazioni differenziali, le regioni di stabilità vengono rappresentate graficamente nel piano complesso. **Queste regioni indicano i valori del passo temporale per cui il metodo è stabile.**

- Nel **metodo di Eulero in avanti**, un metodo esplicito a un passo, la stabilità è garantita all'interno di un **cerchio** nel piano complesso con raggio unitario e centro sull'asse reale, a condizione che il fattore di amplificazione sia minore di uno e il numero di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) non superi l'unità.
- Con l'aumento dei passi, la regione di stabilità si modifica. Nel caso di un **metodo a due passi**, la regione assume una forma **ellittica**, pur mantenendo le stesse intersezioni con gli assi del caso a un passo. Questo ampliamento della regione di stabilità offre un vantaggio significativo, che diventa ancora più marcato con l'**approccio a tre passi**. In questo scenario, i limiti di stabilità si estendono ulteriormente, consentendo un incremento del CFL massimo ammissibile.
- Il **metodo a quattro passi** si distingue per la sua capacità di intersecare l'asse immaginario a un valore di $2\sqrt{2}$, il che permette di raggiungere il massimo CFL ammissibile. Tuttavia, per motivi di sicurezza, si raccomanda di adottare un CFL pari a 2.5. È importante sottolineare che queste considerazioni sono valide esclusivamente per sistemi lineari.
- Infine, il **metodo a cinque passi** consente di ottenere un valore di CFL ancora più elevato, ma ciò comporta un costo aggiuntivo in termini di calcolo, poiché richiede una valutazione supplementare del vettore residuo.



Esistono anche **scemi ibridi**, nei quali i flussi dissipativi e diffusivi non sono calcolati ad ogni passo, ma valutati solo in momenti specifici e mantenuti costanti negli intervalli intermedi, riducendo così il carico computazionale a scapito, in alcuni casi, della precisione. Per esempio, in situazioni dove le separazioni dello strato limite sono significative e gli effetti viscosi assumono un ruolo cruciale, può essere vantaggioso valutare i flussi diffusivi in più passi. I flussi dissipativi, se presenti, vengono generalmente calcolati durante il primo e il secondo passo, per poi essere mantenuti fissi nei passi successivi.

Nell'ottimizzazione del metodo Runge-Kutta, le **condizioni al contorno** vengono aggiornate ad ogni iterazione. Si è esplorata la possibilità di diminuire il carico computazionale aggiornando le condizioni al contorno solo in determinati momenti, mantenendole invariate negli intervalli intermedi. Questo approccio ha il vantaggio di ridurre il costo computazionale, ma può compromettere la robustezza del metodo e, in alcuni casi, aumentare il numero di iterazioni necessarie per raggiungere la convergenza. Sebbene ciascun passo temporale richieda meno tempo e risorse di calcolo, il numero totale di passi necessari per ottenere una soluzione stazionaria può risultare maggiore.

10.2. Implicit time-integration schemes

La discretizzazione temporale può essere implementata utilizzando schemi impliciti, i quali permettono di allentare i **vincoli sulla stabilità** e possono portare a significativi miglioramenti nella velocità di convergenza. Per formulare uno schema implicito, è necessario calcolare il **vettore residuo** non al passo temporale attuale, ma a quello successivo.

$$V \frac{\delta U}{\delta t} = \mathcal{R}(U^{n+1}) \quad \delta U = U^{n+1} - U^n$$

In questo contesto, il **residuo \mathcal{R}** non viene valutato al passo temporale corrente, ma piuttosto al passo successivo. Questo significa che, in principio, il residuo non è noto in quanto deve essere determinato utilizzando una soluzione che non è ancora stata ottenuta. Per risolvere questa problematica, il **residuo implicito** presente nel secondo membro dell'**equazione semi-discreta** viene **linearizzato** mediante uno **sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine**:

$$\mathcal{R}(U^{n+1}) = \mathcal{R}(U^n) + \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial U} \right)^n \left(\frac{\delta U}{\delta t} \right) \delta t + O[(\delta t)^2]$$

Ignorando i termini di ordine superiore e inserendo questa approssimazione nel sistema di equazioni semi-discrete, si giunge alla **forma generale di un metodo implicito** per l'**integrazione temporale**. In questa formulazione, l'**operatore implicito**, indicato tra parentesi quadre, è rappresentato da una **matrice 5x5**:

$$\left[\mathbf{I} + \frac{\delta t}{V} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial U} \right)^n \right] \delta U = \frac{\delta t}{V} \mathcal{R}^n$$

Nel primo membro dell'equazione troviamo la matrice identità, nonché il volume della cella V , e la derivata del residuo, che costituisce una matrice 5x5. Nel secondo membro, invece, compare \mathcal{R}^n , che è il **vettore residuo esplicito** calcolato in relazione al tempo precedente. Applicando la **linearizzazione del residuo implicito**, tutti i termini dell'equazione diventano calcolabili poiché sono valutati al tempo n .

Preciudendo dai termini di dissipazione artificiale e inglobando in un unico flusso F i termini diffusivi:

$$\mathcal{R}(U) = \sum \mathcal{F}_\kappa S_\kappa$$

Esprimendo poi la derivata di \mathcal{R} rispetto ad U tramite la matrice Jacobiana si ha:

$$\mathcal{A}_\kappa = \frac{\partial \mathcal{F}_\kappa}{\partial U}$$

dove k rappresenta l'indice delle facce della cella.

Il sistema precedente, che adesso è lineare per via della linearizzazione del residuo implicito, diviene:

$$\left[\mathbf{I} + \frac{\delta t}{V} \sum \mathcal{A}_\kappa S_\kappa \right] \delta U = \frac{\delta t}{V} \mathcal{R}^n$$

La matrice a primo membro è detta **operatore implicito** mentre a secondo membro ritroviamo il **residuo esplicito** (detto tale perché valutato al tempo n anziché al tempo $n + 1$ come quello implicito).

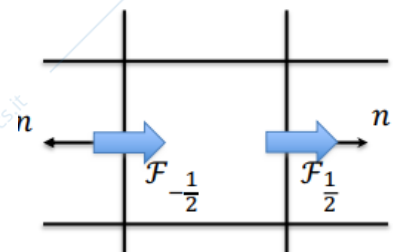
L'applicazione di questo metodo a un **problema lineare**, seguita da un'**analisi di stabilità**, rivela che il metodo è **incondizionatamente stabile**. Tuttavia, nella pratica, i **problemi non lineari** richiedono **limiti di stabilità**, specialmente quando la soluzione presenta discontinuità, come nel caso delle onde d'urto. È importante sottolineare che l'**operatore implicito**, così come formulato, non fa distinzione tra i **contributi dei flussi di faccia upstream o downstream**, ignorando quindi le **proprietà propagative** dell'equazione di governo, il che porta a proprietà di smorzamento insoddisfacenti. Per migliorare i limiti di stabilità del metodo, si può introdurre **dissipazione artificiale** nell'operatore implicito o **assemblare le matrici Jacobiane sulle facce in modo upwind**, utilizzando uno splitting che separa i contributi negativi da quelli positivi. Questo approccio dell'operatore implicito genera un **sistema lineare con una matrice dei coefficienti sparsa e a bande**. Risolvere efficacemente un sistema lineare con tali caratteristiche non è semplice, poiché la matrice dei coefficienti è estremamente grande, con un numero di righe e colonne proporzionale al numero di celle del dominio di calcolo. Per risolvere il sistema si ricorre a metodi iterativi, che, data la natura della matrice, si rivelano tuttavia poco efficienti e costosi. I metodi iterativi, sebbene comunemente utilizzati per affrontare tali sistemi, si rivelano inefficienti e onerosi quando applicati a matrici di questa natura. Inoltre, la computazione efficace della matrice rappresentativa in tre dimensioni implica la gestione di circa 50 variabili per ciascuna faccia del dominio, risultando in un totale di 300 variabili per cella, rendendo il metodo attuale quasi impraticabile. Per superare queste limitazioni, sono stati sviluppati diversi metodi alternativi per il calcolo della matrice dell'operatore implicito. Tra questi, si distinguono il **metodo delle fattorizzazioni** e il **metodo RK implicito**, che verranno esaminati per le loro capacità di ottimizzare il processo di calcolo.

- **METODO DELLE FATTORIZZAZIONI**

Il **metodo delle fattorizzazioni** permette di decomporre l'**operatore implicito** presente al primo membro in 3 distinti **operatori monodimensionali**. Esistono vari approcci per implementare questo metodo, e ci concentreremo sulla filosofia generale che sta alla base delle fattorizzazioni. Considerando un **approccio monodimensionale**, lo sviluppo dell'operatore implicito, assumendo per semplicità che le aree delle facce siano incorporate nella matrice Jacobiana corrispondente, si presenta come segue:

$$\left[\mathbf{I} + \frac{\delta t}{V} \sum \mathcal{A}_k \right] = \left[\mathbf{I} + \frac{\delta t}{V} \left(\mathcal{A}_{\frac{1}{2}} - \mathcal{A}_{-\frac{1}{2}} \right) \right] = \left[\mathbf{I} + \frac{\delta t}{V} \delta_{\xi} \mathcal{A} \right]$$

In questo contesto, le S_k vengono integrate nelle A_k , che sono le **matrici Jacobiane** associate ai flussi convettivi delle facce della cella. Per la **faccia destra**, il flusso segue la direzione del versore normale esterno, contribuendo positivamente alla somma totale, mentre il flusso attraverso la **faccia sinistra** è orientato in direzione opposta, risultando in una matrice Jacobiana di segno negativo. Di conseguenza, considerando i segni dei flussi, la somma si trasforma in una differenza, dove δ_{ξ} rappresenta l'**operatore differenza** lungo la **direzione ξ** .



Procedendo con lo sviluppo dell'operatore implicito per ciascuna direzione, otteniamo l'espressione seguente:

$$\left[\mathbf{I} + h\delta_{\xi} \mathcal{A}^n + h\delta_{\eta} \mathcal{B}^n + h\delta_{\zeta} \mathcal{C}^n \right] \delta \mathcal{U} = h \mathcal{R}^n \quad h = \frac{\delta t}{V}$$

La **fattorizzazione approssimata** si ottiene riscrivendo il termine implicito come la **somma di 3 contributi monodimensionali**, uno per ciascuna delle 3 direzioni:

$$\left[\mathbf{I} + h\delta_{\xi} \mathcal{A}^n + h\delta_{\eta} \mathcal{B}^n + h\delta_{\zeta} \mathcal{C}^n \right] = \left[\mathbf{I} + h\delta_{\xi} \mathcal{A}^n \right] \left[\mathbf{I} + h\delta_{\eta} \mathcal{B}^n \right] \left[\mathbf{I} + h\delta_{\zeta} \mathcal{C}^n \right] + O(h^2)$$

Ignorando i **termini di ordine superiore**, la forma dell'operatore implicito si esprime come il prodotto di 3 operatori impliciti, ciascuno specifico per una direzione del sistema di riferimento curvilineo:

$$\left[\mathbf{I} + h\delta_{\xi} \mathcal{A}^n \right] \left[\mathbf{I} + h\delta_{\eta} \mathcal{B}^n \right] \left[\mathbf{I} + h\delta_{\zeta} \mathcal{C}^n \right] \delta \mathcal{U} = h \mathcal{R}^n$$

In conclusione, l'**operatore implicito** risulta essere il **prodotto di 3 operatori impliciti distinti**, ognuno con una **struttura tridiagonale a blocchi**, e ciascuno corrispondente a una **direzione coordinata del sistema di riferimento curvilineo**.

L'inversione dei tre operatori impliciti può essere effettuata in sequenza.

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} + h\delta_\xi \mathbf{A}^n] \delta \mathbf{U}^{**} &= h\mathcal{R}^n \\ [\mathbf{I} + h\delta_\eta \mathbf{B}^n] \delta \mathbf{U}^* &= \delta \mathbf{U}^{**} \\ [\mathbf{I} + h\delta_\zeta \mathbf{C}^n] \delta \mathbf{U} &= \delta \mathbf{U}^* \end{aligned}$$

Procedura:

1. Inizialmente, si procede con l'inversione del sistema per il **primo passo**, ottenendo così $\delta \mathbf{U}^{**}$, che serve come vettore dei termini noti del secondo sistema tridiagonale a blocchi per la fase successiva.
2. Successivamente, l'inversione del sistema al **secondo passo** permette di calcolare $\delta \mathbf{U}^*$, il quale si basa sul valore precedentemente determinato di $\delta \mathbf{U}^{**}$;
3. Infine, all'**ultimo passo**, si effettua un'ulteriore inversione del sistema per dedurre $\delta \mathbf{U}$, che rappresenta la variazione di U tra il tempo n e il tempo $n + 1$.

Attraverso la fattorizzazione, si è ottenuta la conversione dell'ingombrante matrice sparsa, tipica del metodo generale, in **3 sistemi tridiagonali a blocchi**, ottenendo così una significativa riduzione dei tempi di calcolo. Tuttavia, questa soluzione non si rivela ancora completamente ottimale. È noto che, per massimizzare l'efficienza della discretizzazione spaziale in un dato dominio di calcolo, si utilizzano mesh densificate vicino alle pareti, dove si manifestano effetti diffusivi rilevanti, e più larghe nel nucleo del flusso, dove predominano i termini convettivi. Tale concentrazione di celle presso le pareti genera una rigidità del sistema, poiché le celle presentano aspect-ratio molto ridotti. Considerando, per semplicità, un contesto bidimensionale, un lato della cella (parallelo alla parete) risulta essere molto più lungo dell'altro, poiché si desidera risolvere gradienti direzionati normalmente alla parete. Ciò comporta notevoli disparità direzionali negli autovalori delle matrici jacobiane, inducendo stiffness. Gli autovalori, che rappresentano la velocità di propagazione delle perturbazioni, limitano il time-step. Di conseguenza, questa disparità implica l'adozione di time-step molto ridotti, una lenta convergenza e tempi di calcolo prolungati. **Un metodo implicito potrebbe, in teoria, essere insensibile alla stiffness direzionale causata dal clustering della griglia, ma l'errore introdotto dalla fattorizzazione compromette questa caratteristica, avendo trascurato alcuni termini.** Se il numero di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) per lo schema esplicito di Runge-Kutta a quattro passi è pari a 2, il CFL massimo per uno schema implicito fattorizzato potrebbe raggiungere valori di 50 o 100, che non sono sempre sufficienti a giustificare l'adozione di tale metodo. Infatti, il passo temporale impiegato con il metodo implicito risulta essere molto più oneroso rispetto a quello di un metodo esplicito.

- **METODI FULL-IMPLICIT**

Per superare le difficoltà incontrate con i **metodi impliciti fattorizzati**, Rossow ha adottato un approccio radicalmente differente. Ha impiegato un **operatore implicito completo**, che ha poi **invertito approssimativamente** utilizzando il **metodo simmetrico di Gauss-Seidel**. A partire da una formulazione generica di un metodo implicito, che potremmo indicare come:

$$\left[\mathbf{I} + \frac{\delta t}{V} \sum \mathcal{A}_\kappa S_\kappa \right] \delta \mathbf{U} = \frac{\delta t}{V} \mathcal{R}^n$$

Rossow ha proceduto a decomporre la matrice Jacobiana attraverso il metodo di Roe, come indicato in:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} + |\mathbf{A}| \quad \mathbf{A}^- = \mathbf{A} - |\mathbf{A}|$$

Distinguendo tra i contributi positivi e negativi, è possibile riformulare il residuo esplicito nel modo seguente:

$$\left[\mathbf{I} + \frac{\delta t}{V} \sum \mathbf{A}^+_\kappa S_\kappa \right] \delta \mathbf{U} = \frac{\delta t}{V} \mathcal{R}^n - \frac{\delta t}{V} \sum \mathbf{A}^-_\kappa S_\kappa \delta \mathbf{U}_{NB}$$

dove **NB** indica i **termini relativi alle celle adiacenti a quella in esame**. Questa distinzione si basa sull'osservazione che i termini $A_K^+ S_K \delta U$ sono associati a perturbazioni con velocità positiva, originanti dall'interno della cella, mentre i termini $A_K^- S_K \delta U$ si riferiscono a perturbazioni che si avvicinano alla superficie della cella con velocità negativa, provenendo quindi dall'esterno, ovvero dalle celle limitrofe.

Questo rappresenta un passo iniziale che rende l'**operatore implicito coerente con le proprietà di propagazione dell'equazione di governo**, migliorando così le sue capacità di attenuazione delle perturbazioni. Tuttavia, rimane la necessità di valutare sulle superfici delle celle delle matrici Jacobiane complete, il che comporta un significativo utilizzo della memoria.

Attraverso lo **splitting delle matrici Jacobiane**, basato sul metodo di Roe, e riformulando l'operatore implicito in termini di variabili primitive piuttosto che conservative, Rossow ha notato che le matrici Jacobiane P^+ e P^- (espresse in termini di variabili primitive) possono essere semplificate utilizzando un numero di Mach relativo alle superfici, formulato secondo un approccio upwind, ovvero:

$$M_0 = \max \left(\left| \frac{q_n}{a} \right|, 1 \right) \text{sign}(q_n)$$

dove q denota la **velocità normale alla superficie** in questione, a è la **velocità del suono** e il rapporto indica di fatto un **numero di Mach** relativo alla velocità normale alla faccia. Il numero di Mach si situa nell'intervallo tra -1 e 1, indicando se le onde si originano internamente o esternamente al sistema. Le matrici Jacobiane, quando espresse in termini di variabili primitive, dipendono solamente da 4 variabili, semplificando così la quantità di dati da memorizzare per ciascuna faccia:

$$P^\pm = P^\pm(\rho, q_n, a, p)$$

Per quanto riguarda il metodo di Rossow, quando formulato in termini di variabili primitive, si esprime come:

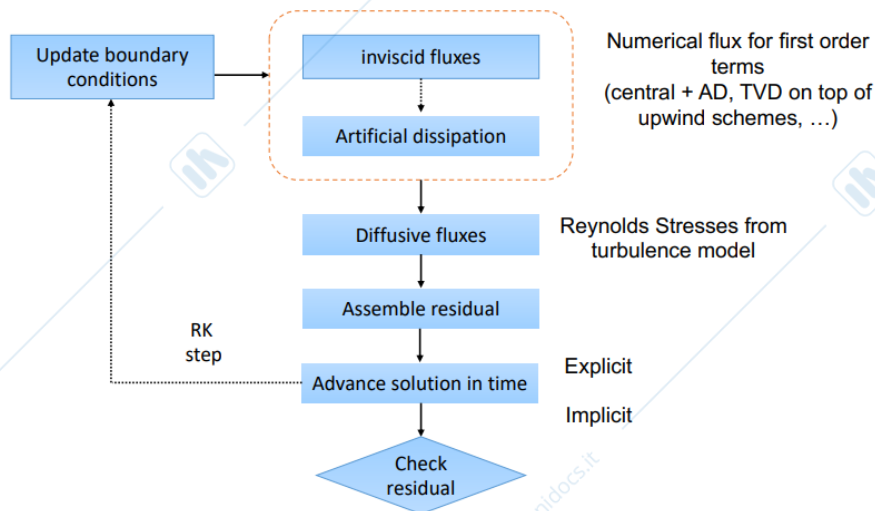
$$\left[\mathbf{I} + \frac{\delta t}{V} \sum P^+ S_K \right] \delta \mathcal{V} = \frac{\delta t}{V} Q^n - \frac{\delta t}{V} \sum P^- S_K \delta \mathcal{V}_{NB}$$

in cui le **variazioni delle variabili primitive** sono indicate con $\delta \mathcal{V}$, le **matrici Jacobiane splittate in termini di variabili primitive** con P^+ e P^- , e il **residuo esplicito** (Q^n) anch'esso espresso in termini di variabili primitive.

Il processo di calcolo segue questi passaggi:

1. Conversione delle variabili da conservative a primitive.
2. Trasformazione dei residui da termini di variabili conservative a primitive.
3. Assemblaggio delle matrici Jacobiane splittate P^+ e P^-
4. Risoluzione del sistema $\frac{\delta t}{V} \sum P_K^- S_K \delta \mathcal{V}_{NB}$ attraverso l'impiego del metodo di Gauss-Seidel simmetrico, che prevede di percorrere ogni direzione coordinata della mesh sia in avanti che all'indietro.
5. Dalla risoluzione del sistema si ottiene $\delta \mathcal{V}$, che, una volta riconvertito in variabili conservative per ottenere δU , consente l'aggiornamento della soluzione.

Questo approccio riduce l'overhead computazionale e ottimizza l'uso della memoria, elementi cruciali per l'efficienza dei calcoli in dinamica dei fluidi computazionale.



10.3. Block scheme time-dependent for steady problems

Al passo n , vengono assemblati i flussi numerici di primo ordine (convettivi) e di secondo ordine (diffusivi). Se lo schema utilizzato è centrale, si considerano anche i flussi dissipativi artificiali. Successivamente, viene costruito il vettore residuo al passo n :

$$\mathcal{R}(U) = \tau \sum_k \mathcal{F}_n^{(k)} S_k + SV$$

A questo punto, si procede con l'avanzamento esplicito della soluzione nel tempo utilizzando un metodo Runge-Kutta a più stadi, aggiornando le **condizioni al contorno** e completando i sotto-passi previsti dallo schema. Al termine dei sotto-passi, si conclude un passo temporale e si valuta il residuo: se questo è diminuito in modo soddisfacente, si considera raggiunta la convergenza; in caso contrario, il ciclo viene ripetuto. I metodi impliciti, invece, non richiedono più passi, ma necessitano dell'inversione di un grande sistema lineare o, nel caso di fattorizzazione, di tre sistemi tridiagonali.

L'**assemblaggio dei termini diffusivi** deve essere eseguito a ogni stadio dello schema di Runge-Kutta, e qui emerge una differenza significativa tra l'uso di metodi upwind e centrali con dissipazione artificiale. Nel secondo caso, si è osservato che non è strettamente necessario valutare l'operatore di dissipazione artificiale a ogni passo, poiché la robustezza del metodo permette di farlo solo per gli stadi dispari, rendendo il calcolo più economico. Al contrario, nel caso dei metodi upwind, non è possibile adottare una routine differenziata per i flussi convettivi (con schema centrale) e per l'aggiunta della dissipazione artificiale, poiché ciò porterebbe a una divergenza del calcolo.

11. Convergence Acceleration Techniques for Steady Problems

Nell'ambito della fluidodinamica computazionale, il primo passo per risolvere numericamente un problema consiste nella **discretizzazione spaziale** delle equazioni fondamentali, seguita da una **discretizzazione temporale**. Nei paragrafi precedenti, abbiamo esplorato diverse strategie per l'integrazione temporale delle equazioni di governo, note come equazioni di Navier-Stokes. Per i **sistemi stazionari**, questo processo è comunemente definito come **integrazione nel tempo (time-marching/time-dependent)**; tuttavia, rappresenta in realtà un approccio per raggiungere la soluzione stazionaria mediante una **fase transitoria artificiale**. Questa fase transitoria, che ci guida dalla soluzione iniziale non realistica ipotizzata fino alla soluzione stazionaria finale attraverso aggiornamenti progressivi, non possiede una connotazione fisica. Questa soluzione iniziale non realistica è essenzialmente una **combinazione** della **soluzione stazionaria desiderata** e di **varie perturbazioni**. Il ruolo del **metodo di integrazione temporale** è di eliminare queste **perturbazioni**, guidando il sistema verso lo stato stazionario finale. L'efficienza di questo metodo si misura dalla rapidità con cui riesce a scartare le perturbazioni e raggiungere la convergenza. Di conseguenza, possiamo considerare l'impiego di **metodi numerici avanzati per accelerare tale processo**, che per noi non rappresenta un transitorio reale, bensì un mezzo **per garantire la convergenza alla soluzione stazionaria** desiderata.

Gli schemi che separano la discretizzazione spaziale da quella temporale sono particolarmente vantaggiosi poiché assicurano che la **soluzione stazionaria non dipenda dalla grandezza del time-step**. Questa caratteristica li rende ideali per l'**implementazione di tecniche di accelerazione della convergenza**, che hanno lo scopo di rimuovere più rapidamente le perturbazioni indesiderate, permettendo così di raggiungere la soluzione stazionaria in tempi notevolmente ridotti partendo dalla soluzione iniziale non fisica.

L'adozione di tali metodi potrebbe, se necessario, annullare completamente la natura fisica del transitorio, ma questo aspetto non riveste importanza per noi, come abbiamo sottolineato in più occasioni. D'altra parte, se ci trovassimo a investigare un fenomeno non stazionario, ovvero a descrivere un transitorio fisico reale, non potremmo applicare le stesse tecniche. Tuttavia, esamineremo come sia fattibile estendere queste metodologie di accelerazione anche ai casi non stazionari, attraverso l'introduzione di una metodologia supplementare adeguata. Al momento, concentriamoci sul contesto stazionario.

Nell'**analisi stazionaria**, si procede attraverso diversi passaggi critici. Inizialmente, si crea una **griglia computazionale** e si procede con la **discretizzazione spaziale delle equazioni di governo** utilizzando una delle metodologie esaminate, che può essere una discretizzazione centrale arricchita da un termine dissipativo artificiale o una discretizzazione di tipo upwind. Questo processo porta alla trasformazione delle equazioni in **equazioni differenziali ordinarie (EDO)**, trattando la **discretizzazione temporale** separatamente da quella **spaziale**. Successivamente, le equazioni, ora discretizzate spazialmente, diventano **equazioni differenziali lineari nel tempo**, integrabili mediante vari metodi. Tra questi, gli schemi di Runge-Kutta sono stati esaminati approfonditamente per la loro efficienza, ma è possibile impiegare qualsiasi schema adatto alla risoluzione delle EDO del primo ordine.

Questi passaggi sono essenziali per ottenere una soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes. Generalmente, questo processo richiede un **numero considerevole di passi temporali**, che tende ad aumentare con l'approccio esplicito e a diminuire con quello implicito. Nell'**approccio esplicito**, lo schema di integrazione temporale deve soddisfare la condizione CFL, il che significa che diminuendo la dimensione della cella di calcolo si deve conseguentemente ridurre il passo temporale. Questo assicura la stabilità dell'integrazione e la precisione dei risultati. In genere, il raggiungimento di una soluzione stazionaria richiede un numero considerevole di passaggi, che possono variare da migliaia a decine di migliaia a seconda della complessità del problema, specialmente quando si tratta di questioni particolarmente esigenti in termini di calcolo. Pertanto, l'accesso a metodi che possano **accelerare la convergenza alla soluzione stazionaria**, riducendo il numero di passaggi temporali necessari, sarebbe estremamente vantaggioso. Fortunatamente, esistono varie strategie che non solo possono essere impiegate per questo scopo, ma che possono anche essere combinate in modo efficace per ottimizzare la velocità di convergenza di un modello. La separazione tra la discretizzazione spaziale e quella temporale facilita notevolmente l'impiego di queste tecniche, rendendole altamente efficienti e sostanzialmente indipendenti dal metodo di discretizzazione spaziale adottato, che sia di tipo upwind o centrale con aggiunta di dissipazione artificiale.

Tra i metodi di accelerazione della convergenza più comunemente impiegati troviamo:

- il **local time stepping**;
- il **multigrid**;
- lo **smoothing dei residui**.

Questi approcci possono essere combinati per ottenere i massimi vantaggi in termini di accelerazione della convergenza.

11.1. Local Time-Stepping

Per approfondire la tecnica in questione, è necessario preliminarmente integrare le nostre conoscenze sulle proprietà di stabilità delle equazioni di Navier-Stokes integrate nel tempo, ad esempio mediante l'impiego di un metodo di Runge-Kutta. È fondamentale ricordare che tali schemi devono rispettare la condizione CFL, secondo la quale una **perturbazione non può attraversare più di una cella di calcolo per ogni step temporale**. Questo principio garantisce che il dominio di dipendenza fisica di ogni punto nello spazio discretizzato rimanga confinato entro il corrispondente dominio numerico, assicurando così il rispetto delle condizioni di stabilità.

Per ottimizzare l'espulsione delle perturbazioni, è possibile adottare un **approccio differenziato nella scelta del time-step, modificandolo in base alle dimensioni di ciascuna cella all'interno del dominio di calcolo**. In altre parole, il time step viene valutato su base locale, in modo tale che, durante un singolo passo temporale, non tutte le celle procederanno allo stesso ritmo: **quelle con dimensioni più ampie avranno un time-step proporzionalmente maggiore, consentendo un avanzamento più rapido, mentre quelle più piccole avranno un time-step ridotto, adeguato alla loro scala**. Questa metodologia permette di bilanciare precisione ed efficienza computazionale, assicurando che ogni area del dominio sia trattata in maniera ottimale in relazione alle sue caratteristiche specifiche.

Generalmente, il **time-step caratteristico** Δt_l è vincolato da due limiti: uno **convettivo** e uno **diffusivo**, riflettendo la natura sia convettiva che diffusiva delle equazioni di Navier-Stokes, quest'ultima legata agli effetti della viscosità. Di conseguenza, emergono 2 restrizioni sul time-step, una derivante dai termini convettivi e l'altra dai termini diffusivi, ognuna delle quali impone un proprio time-step caratteristico. Quindi il **time step** di ciascuna cella sarà definito come un **multiplo** del time step caratteristico:

$$\Delta t = c \Delta t_l$$

in cui il **coefficiente** c viene definito uguale al valore massimo permesso dal **numero di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)** per lo schema numerico selezionato. Questa scelta garantisce che le perturbazioni si propagano attraverso ogni cella alla massima velocità possibile, favorendo così un incremento nella velocità di convergenza del metodo. D'altra parte, il **passo temporale caratteristico** Δt_l è composto sia da un **termine diffusivo** Δt_d , che assume rilevanza vicino alle superfici solide, sia da un **termine convettivo** Δt_c , che prevale nella regione centrale del flusso.

Il **contributo convettivo** può essere descritto come il volume della cella di interesse diviso per la somma dei raggi spettrali delle matrici Jacobiane, considerate lungo le tre direzioni spaziali:

$$\Delta t_c = \frac{V}{r_\xi + r_\eta + r_\zeta}$$

D'altra parte, il **contributo diffusivo** è strettamente legato ai termini metrici del sistema, che influenzano la distribuzione del fluido attraverso la diffusione:

$$\Delta t_d = \frac{V}{K\mu \left[(x_\xi^2 + y_\xi^2) + (x_\eta^2 + y_\eta^2) + (x_\zeta^2 + y_\zeta^2) \right]}$$

La **costante K** , che varia tra 2.5 e 5, gioca un ruolo fondamentale in questo processo, poiché modula l'intensità del contributo diffusivo in relazione alle proprietà fisiche del fluido e del mezzo attraverso cui si muove. Inoltre, μ è la **viscosità totale**.

Al denominatore la sommatoria dei raggi spettrali è la scelta migliore per velocizzare lo smaltimento. Altrimenti si dovrebbero avere $3 \Delta t_c$ e quindi $3 \Delta t_l$, uno per ogni dimensione, tra i quali scegliere di volta in volta il minore. Questa sicuramente sarebbe una scelta cautelativa, ma non necessariamente efficace. Utilizzando quindi la sommatoria dei raggi spettrali si riescono a coniugare stabilità ed efficienza. In questa maniera le perturbazioni attraversano cella per cella con il massimo consentito per la loro velocità e così si riesce a velocizzare lo smaltimento lungo il campo di moto. Si ricorda che questo si può fare perché non siamo interessati a nessun tipo di accuratezza temporale.

In conclusione, per determinare il **passo temporale caratteristico Δt_l** se si volesse effettuare una trattazione rigorosa si dovrebbe andare a scegliere il minimo tra il Δt_c e il Δt_l . Nella pratica si va però ad utilizzare la formula seguente che restituisce un valore molto vicino al minimo dei due:

$$\frac{1}{\Delta t_\ell} = \frac{1}{\Delta t_c} + \frac{1}{\Delta t_d}$$

11.2. Multigrid

Questi sono i metodi più avanzati per accelerare la convergenza e sono nati originariamente per affrontare problemi ellittici e, recentemente, il loro uso è stato ampliato per includere anche le equazioni di Eulero e Navier-Stokes. Questi metodi mirano a incrementare l'efficienza dello smaltimento delle perturbazioni all'interno della griglia computazionale attraverso l'impiego di **griglie ausiliarie più grandi**. Secondo la **condizione CFL**, una **perturbazione non dovrebbe attraversare più di una cella della griglia per ogni passo temporale, altrimenti si rischia l'instabilità del metodo, specialmente se questo è esplicito**. Pertanto, in una griglia di dimensioni fisse, le **perturbazioni ad alta frequenza**, che si spostano più rapidamente, sono quelle che tendono a propagarsi più estesamente. Al contrario, le **perturbazioni a bassa frequenza** potrebbero essere eliminate più efficacemente su una griglia con dimensioni maggiori, proporzionate alle **lunghezze d'onda** delle perturbazioni stesse, risultando in una griglia più rada. La **dimensione della griglia** determina la **velocità** con cui le perturbazioni vengono eliminate, influenzando così il Δt_l . L'introduzione di griglie ausiliarie più grandi serve quindi a ottimizzare il processo di eliminazione delle perturbazioni sulla griglia principale, più fitta.

Il concetto fondamentale del metodo proposto consiste nel determinare la correzione della soluzione all'interno di una griglia con spaziatura h uniforme. Questa correzione è calcolata come la differenza tra la soluzione U_h al passo temporale $n + 1$ e la soluzione al passo temporale precedente. L'obiettivo è quello di implementare griglie ausiliarie meno fitte per facilitare e accelerare la diffusione delle correzioni attraverso il dominio di calcolo.

$$\delta U_h = U_h^{n+1} - U_h^n$$

Il metodo **Full Approximation Storage (FAS)** è una tecnica consolidata, che si avvale di una **griglia ausiliaria generata duplicando la distanza tra i nodi della mesh originale**. Questa distanza, definita come H nella griglia di base, diventa $2H$ nella griglia ausiliaria, ottenuta selezionando alternativamente un nodo sì e uno no. Di conseguenza, ogni cella nella griglia $2H$ ingloba 8 celle della griglia H . Al termine di un dato passo temporale, indicato con n , è necessario aggiornare la soluzione al passo temporale successivo, $n + 1$. Utilizzando uno schema di Runge-Kutta a 4 passi, si procede attraverso 4 fasi iterative partendo da U_n per arrivare a U_{n+1} . Successivamente, si effettua il trasferimento della soluzione sulla griglia $2H$ mediante un processo noto come "**passo di restrizione**", in cui la soluzione iniziale per lo schema di Runge-Kutta sulla griglia più grossolana ($2H$) viene calcolata come:

$$U_{2h}^{(0)} = \frac{\sum U_h V_h}{V_{2h}}$$

Nella formula presentata, la somma al numeratore si estende a tutte le 8 celle che compongono la griglia H . Il termine V_H rappresenta il **volume di una singola cella** all'interno della griglia H , mentre V_{2H} indica il **volume di una cella nella griglia $2H$** . È importante notare che le **proprietà di conservazione**, quali **massa**, **quantità di moto** ed **energia**, che sono

state determinate sulla griglia fine H , vengono mantenute anche nella successiva griglia più grossolana $2H$. Questo processo di conservazione è fondamentale per garantire la **continuità** e l'**affidabilità** dei dati attraverso diverse scale di griglia.

Successivamente, nel "**passo di collezione**", una volta ottenuta la U_{2H}^0 sulla griglia $2H$, è necessario procedere all'**assemblaggio dei residui** su questa griglia. Tuttavia, per assicurare che i residui sulla griglia $2H$ mantengano un livello di accuratezza conforme a quello della griglia H , più fine, si rende necessario l'aggiustamento mediante l'aggiunta di **forzanti P** . Questo passaggio assicura che la soluzione sulla griglia $2H$ sia coerente con le informazioni dettagliate fornite dalla griglia H .

$$\mathcal{R}_{2h}^* = \mathcal{R}_{2h}(U_{2h}) + P_{2h}$$

Il parametro P è definito come la somma dei residui calcolati sulle 8 celle della griglia fine, dalla quale si sottrae il residuo ottenuto dalla soluzione approssimata sulla griglia più grossolana.

$$P_{2h} = \sum \mathcal{R}_h(U_h) - \mathcal{R}_{2h}(U_{2h}^{(0)})$$

La quantità $\mathcal{R}_{2H}(U_{2H})$ viene aggiornata ad ogni iterazione del metodo di Runge-Kutta, mentre il termine P_{2H} è calcolato una sola volta subito dopo il passo di restrizione e rimane invariato per l'intera durata del processo iterativo. La soluzione procede quindi sulla griglia $2H$ e, se disponibile, si passa alla griglia $4H$ dove la soluzione viene ulteriormente ristretta e il ciclo ripetuto. Una volta raggiunto il **livello di griglia più grossolano**, le correzioni calcolate vengono trasferite alla **griglia più fine** mediante un'**interpolazione bilineare** durante il cosiddetto "**passo di prolungamento**". Tuttavia, non è la soluzione calcolata sulla griglia più grossolana a essere trasferita, bensì la correzione δU .

$$\delta U_h = U_h^{n+1} - U_h^n$$

Generalmente, il passo di prolungamento può introdurre **errori** dovuti all'interpolazione, i quali devono essere attenuati dalla griglia fine per garantire una **convergenza rapida del metodo**. In questo contesto, le proprietà di smorzamento dello schema numerico utilizzato sono fondamentali per controllare le frequenze più elevate.

I metodi di Runge-Kutta sono generalmente adatti per queste applicazioni, offrendo un approccio robusto e affidabile. Per iniziare il processo di soluzione, si può impiegare il metodo multigrid, noto anche come **Full Multigrid (FM)**. Questo metodo prevede l'uso di una sequenza determinata di passi temporali per avviare la soluzione sulla griglia più grossolana piuttosto che sulla griglia di base. Successivamente, si procede attraverso le griglie più fini fino a raggiungere quella più dettagliata. Questo approccio incrementale consente di ottimizzare l'efficienza del calcolo e di migliorare la convergenza della soluzione.

11.3. Residual smoothing

La metodologia è un'aggiunta allo schema temporale di base che mira a espandere la sua stabilità. Attraverso l'applicazione di uno **smoothing implicito**, si ottiene un **incremento della stabilità** del modello originario. Questo processo di smoothing è progettato per ammorbidire i residui, rimuovendo le irregolarità e, di conseguenza, aumentando il numero di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

Originariamente introdotto da Lerat per i modelli Lax-Wendroff, questa tecnica si scontrava con il **problema di non separare la discretizzazione temporale da quella spaziale**, rendendoli inadatti per accelerazioni. Fu Jameson nel 1981 a estendere l'applicazione di questa tecnica ai modelli Runge-Kutta (R-K).

Il **residual smoothing** viene impiegato in ogni fase del metodo R-K seguendo una forma implicita specifica:

$$\left(1 - \epsilon_\xi \delta_\xi^- \delta_\xi^+\right) \left(1 - \epsilon_\eta \delta_\eta^- \delta_\eta^+\right) \left(1 - \epsilon_\zeta \delta_\zeta^- \delta_\zeta^+\right) \tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$$

Il residuo "smoothato" \tilde{R} è il risultato finale dopo una serie di smoothing in tre direzioni, che richiede la risoluzione di tre sistemi tridiagonali. Il residuo iniziale R si calcola combinando tutti i flussi. I coefficienti $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ sono variabili e considerano la variabilità dell'aspect-ratio della cella nelle tre direzioni del riferimento curvilineo (sempre per cercare di ridurre l'effetto della stiffness direzionale introdotta dallo stretch della griglia); il loro uso è volto a minimizzare l'effetto della rigidità direzionale causata dall'estensione della griglia. Implementato da Jameson, il residual smoothing permette di aumentare il CFL di un fattore compreso tra 2 e 3. Per esempio, in un modello R-K a quattro fasi, il massimo CFL utilizzabile passa da 2,5 a 5.

I benefici più significativi dell'uso del residual smoothing emergono quando viene combinato con la tecnica multigrid, poiché il residual smoothing potenzia le capacità di smorzamento del modello di base. In tal modo, un modello come quello di R-K, già dotato di buone proprietà di smorzamento, quando abbinato a questo algoritmo acquisisce eccellenti qualità di smorzamento, rendendolo particolarmente adatto a una strategia multigrid.

L'impiego ottimale di questo metodo si manifesta quando utilizzato in sinergia con l'approccio multigrid, poiché il processo di residual smoothing accresce l'efficacia smorzante dell'algoritmo principale. Questa tecnica consiste essenzialmente nell'effettuare una media tra il residuo di una cella e quelli delle celle limitrofe, al fine di uniformare la distribuzione dei residui. È fondamentale valutare se l'aumento del numero di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) conseguito tramite il residual smoothing giustifichi l'onere computazionale richiesto per la risoluzione dei sistemi tridiagonali.

Va inoltre considerato che ogni schema implicito può essere interpretato come un caso particolare di residual smoothing, in quanto la correzione δU può essere vista come un residuo che ha subito un processo di smorzamento, come illustrato dal metodo di Rossow. Attraverso questa metodologia è possibile elevare il CFL fino a 1000, permettendo così un significativo risparmio in termini di passi temporali necessari per raggiungere la convergenza. Naturalmente, ogni passo temporale comporterà un costo computazionale notevolmente maggiore.

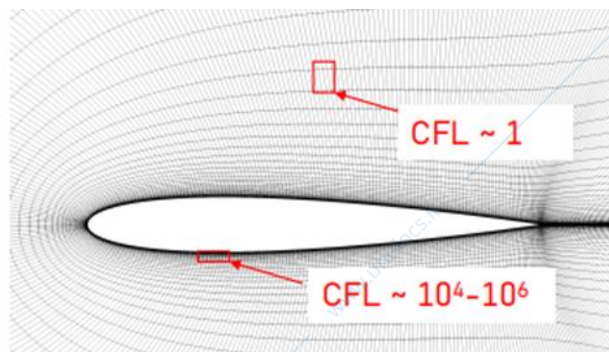
12. Time-Dependent Methods for Unsteady Problems

La gestione di **problemi non stazionari** (campo di moto che evolve nel tempo) richiede l'ottenimento di soluzioni che siano precise nel tempo attraverso i nostri calcoli. Significa, che a differenza del caso stazionario, nel quale ad ogni time step si otteneva una soluzione priva di significato fisico, adesso si ha ad ogni passo temporale una soluzione che deve essere rigorosamente fisica. L'impiego di **schemi espliciti** comporta la necessità di adottare un **intervallo temporale** definito in base ai **criteri di stabilità dello schema**, come indicato dalla condizione CFL. Per assicurare una soluzione temporalmente accurata con un **approccio time-dependent**, è imperativo utilizzare un passo temporale uniforme per tutte le celle all'interno del dominio di calcolo, corrispondente al valore **minimo richiesto dai criteri di stabilità dello schema** in uso. Generalmente, il **time-step necessario per garantire la precisione temporale è comparabile a quello imposto dai criteri di stabilità nelle regioni centrali del flusso, al di fuori dello strato limite**. Di conseguenza, le celle situate nelle aree dove si verifica un **clustering della griglia** impongono restrizioni molto severe sul passo temporale che può essere impiegato.

Per garantire una certa economicità in calcoli con risultati temporali precisi, si presentano 3 strategie:

1. L'adozione di **schemi espliciti fortemente vettorializzabili**, che idealmente presentano minori limitazioni relative alla stabilità del passo temporale consentito, permette di eseguire calcoli in parallelo e di ridurre così i tempi di elaborazione.
2. L'impiego di un **approccio implicito** può attenuare le restrizioni sulla stabilità. Per essere veramente efficace, il numero di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) accettabile per un metodo implicito deve essere significativamente alto (dell'ordine di 10^4); in caso contrario, si rischia di incorrere in tempi di calcolo proibitivi.
3. È possibile ricorrere a **metodologie** che permettono di **estendere le tecniche di accelerazione della convergenza**, solitamente applicate ai problemi stazionari, alla risoluzione precisa nel tempo delle equazioni di Navier-Stokes, ottenendo così un incremento dell'efficienza comparabile anche in scenari dinamici.

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta t_c}$$



Nell'**analisi del profilo alare oscillante**, l'oscillazione è determinata da un periodo predefinito. Durante questo periodo, si procede alla discretizzazione di una serie di soluzioni che rappresentano l'evoluzione del flusso. Si stabilisce un numero di passi temporali per ottenere soluzioni fisiche dipendenti dal tempo, generalmente tra 50 e 100. Considerando l'uso di un **metodo esplicito**, la cui stabilità è limitata dalla condizione di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), una perturbazione non può attraversare più di una cella di calcolo per ogni passo temporale. Se il periodo è relativamente breve, ovvero la frequenza è alta, il numero di passi temporali necessari per mantenere la stabilità supera di gran lunga quello desiderato per una riproduzione accurata del periodo. Questo vincolo è particolarmente stringente nei casi di **flussi viscosi o turbolenti**, dove lo stretching della griglia richiede un intervallo temporale Δt molto ridotto. Nei punti in cui la griglia è più concentrata, i limiti di stabilità imposti al passo temporale sono molto più restrittivi. Il valore di Δt diventa comparabile con il CFL nel nucleo del flusso, dove dominano i termini convettivi, mentre vicino alle pareti il CFL può essere ordini di grandezza più elevato, lontano dai limiti di stabilità accettabili. Pertanto, utilizzando un approccio esplicito, non è possibile discretizzare il periodo con soli 50-100 passi, ma si richiedono da 10^4 a 10^6 passi per garantire la stabilità. Questa situazione non si verifica nei calcoli di alta fedeltà come la Large Eddy Simulation (LES), dove per catturare accuratamente le piccole scale del flusso, il Δt per l'**accuratezza** (quello richiesto) e il Δt_c **caratteristico** per ogni cella sono dello stesso ordine di grandezza, e il CFL, definito come il rapporto tra queste due grandezze, è tipicamente intorno a 0.1.

Il problema può essere affrontato attenuando le limitazioni imposte dalla necessità di stabilità degli schemi numerici, per esempio attraverso l'impiego di metodi impliciti. Tuttavia, è importante riconoscere che ogni passaggio temporale implicito comporta un costo computazionale superiore rispetto a uno esplicito. Di conseguenza, il numero di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) accettato dallo schema deve essere significativamente alto, oltre mille, per giustificare l'approccio. Un altro aspetto da considerare è l'utilizzo delle risorse di **High Throughput Computing (HTC)**, come la **parallelizzazione**, per minimizzare i costi e i tempi di calcolo. In questo contesto, **uno schema che si presta alla parallelizzazione è da preferire a uno che supporta alti valori di CFL ma è meno adatto alla vettorizzazione**. Non è scontato che i metodi impliciti siano parallelizzabili, dato che richiedono la gestione delle cosiddette **race conditions**, fenomeno che si verifica quando più processori tentano di accedere contemporaneamente alla stessa unità di memoria, causando ritardi dovuti alla sincronizzazione. Inoltre, questi metodi richiedono di tenere in considerazione anche le celle adiacenti. Idealmente, si vorrebbe disporre di uno schema fortemente vettorizzabile che imponga minori restrizioni sul time-step rispetto a un metodo esclusivamente esplicito.

12.1. Dual Time-Stepping

L'approccio permette di estendere le **tecniche di accelerazione della convergenza**, già applicate ai problemi stazionari, anche ai casi non stazionari, garantendo così un significativo risparmio di tempo di calcolo. La strategia fondamentale consiste nel riformulare le **equazioni di governo** in maniera che possano essere risolte nel tempo mediante un **metodo di integrazione accelerato**, sia esso implicito o esplicito. Utilizzando una **discretizzazione temporale implicita**, si eliminano le limitazioni legate alla stabilità temporale, sfruttando appieno i benefici delle tecniche di accelerazione della convergenza.

Matematicamente, si può raggiungere questo obiettivo introducendo un **tempo fittizio τ** e riscrivendo il sistema di equazioni di governo per ottenere un **sistema in forma semi-discreta** come segue:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{R}(U) = \mathcal{R}^*(U)$$

Definiamo quindi un nuovo **residuo $\mathcal{R}^*(U)$** in funzione del **tempo fittizio τ** , che consiste nella somma del **residuo spazialmente discretizzato $\mathcal{R}(U)$** e della sua **derivata temporale**. In questo modo, **il problema originariamente non stazionario nel tempo fisico t diventa stazionario nel tempo fittizio τ** . L'intento del metodo time-dependent è ora l'azzeramento del residuo $\mathcal{R}^*(U)$, e le tecniche di accelerazione della convergenza precedentemente impiegate per i casi stazionari possono essere adottate a tal fine, procedendo nel tempo fittizio τ .

Adottando l'approccio sviluppato da Jameson, la derivata rispetto al tempo fisico t viene discretizzata utilizzando una formula retrograda a 3 punti, che produce uno **schema di integrazione implicito di secondo ordine**. Questo permette di superare i vincoli di stabilità relativi al tempo fisico t .

$$\frac{\partial U}{\partial t} \simeq \frac{3U^{n+1} - 4U^n + U^{n-1}}{2\delta t}$$

In ogni step temporale fisico, la soluzione progredisce attraverso un intervallo di tempo virtuale τ . Le strategie di accelerazione esaminate precedentemente possono essere impiegate per incrementare la rapidità con cui il residuo \mathcal{R}^* viene azzerato. Questo processo è fondamentale per conformarsi alle equazioni nella loro versione dipendente dal tempo. È evidente dall'equazione menzionata che, raggiungendo il valore zero di \mathcal{R}^* , si ottiene la versione non stazionaria delle equazioni.

Anche se si è riusciti a superare le limitazioni legate alla stabilità in relazione al tempo fisico t , persistono alcune restrizioni riguardanti il **time-step fittizio $\delta\tau$** . È fondamentale che **$\delta\tau > \delta t$** per evitare di incorrere in uno schema instabile (si perderebbe il senso fisico). Questo rischio è particolarmente elevato nelle celle adiacenti alle pareti, le quali tendono ad essere significativamente più piccole rispetto a quelle situate nella parte centrale del flusso (cuore del flusso non viscoso e non quelle in prossimità delle pareti), a causa dell'estensione della griglia. Per assicurare la stabilità durante il tempo virtuale, **$\delta\tau$** deve essere regolato nel modo seguente:

$$\delta\tau = \min \left(\delta\tau, \frac{\delta t}{2^{m-1} \frac{3}{2} \frac{CFL}{CFL^*}} \right)$$

Dove l'effetto del multigrid è rappresentato dal fattore 2^{m-1} , dove m indica il **numero totale di livelli di griglia impiegati**. Il numero di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) associato allo schema con residual smoothing è indicato con CFL, mentre CFL^* rappresenta il valore massimo di CFL per lo schema di base. Imponendo un **limite al passo temporale fittizio**, garantiamo la **stabilità dello schema**. A questo punto, è necessario selezionare il valore del **passo temporale reale t** basandosi sui criteri di accuratezza desiderati. Al termine di ogni passo temporale reale, si procede all'aggiornamento della derivata temporale e si inizia una nuova serie di passi temporali nel tempo fittizio τ .

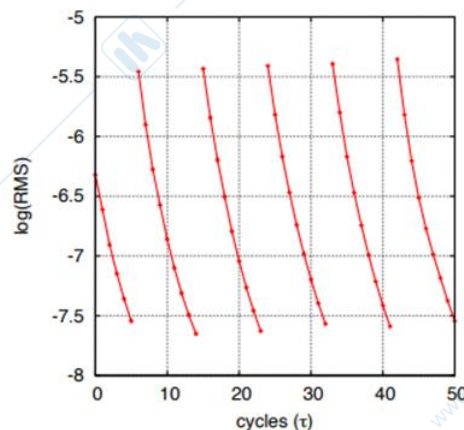
Nella pratica, persiste un problema da affrontare:

- il metodo in questione offre alcuni gradi di libertà, permettendo di optare per il numero massimo di time step da eseguire o di stabilire un valore minimo per il residuo R^* , assicurando così la convergenza durante ogni intervallo di tempo δt fisico. Non esistendo regole universali per questa scelta, non è consigliabile decidere una condizione senza considerare l'altra; è preferibile applicare entrambe le condizioni. Questo approccio consente di passare fluidamente da un intervallo temporale al successivo.

Il **dual time stepping** si rivela particolarmente efficace nei calcoli RANS e URANS, ma risulta meno vantaggioso per simulazioni high fidelity come LES o DNS. Per risolvere le **scale minori della turbolenza**, è necessario che **le dimensioni delle celle siano estremamente ridotte**, corrispondenti alle scale di turbolenza che si intendono analizzare, su tutto il dominio di calcolo. Di conseguenza, non si utilizzano celle allungate, il che porta a problemi di alta frequenza in mesh uniformi. In tali condizioni, non è vantaggioso adottare uno schema implicito o uno schema esplicito accelerato; è preferibile optare per schemi espliciti con requisiti di stabilità più flessibili e una maggiore capacità di parallelizzazione, per massimizzare i benefici della parallelizzazione del calcolo (multigrid). Nell'ambito delle equazioni di Navier-Stokes mediate secondo Reynolds, l'uso efficiente del dual time stepping richiede esperienza. Nella preparazione di calcoli time-accurate, è necessario effettuare una scelta strategica: bisogna decidere quanto far decrescere il residuo nel tempo fittizio, R^* , durante ogni passo temporale reale. Non è praticabile ridurre il residuo a 0 per ogni time step fisico; infatti, un calcolo che preveda 100 time step fittizi per ogni passo temporale reale non sarebbe conveniente. È quindi possibile decidere se avanzare al successivo passo temporale fisico quando il parametro R^* scende al di sotto di una determinata soglia, o se stabilire un numero fisso di passi di integrazione durante il passo temporale virtuale all'interno di ogni passo temporale reale.

L'impiego efficace del metodo dual time stepping richiede lo sviluppo di una certa sensibilità, poiché la scelta ottimale dipende fortemente dal caso specifico; pertanto, è essenziale accumulare esperienza e intuizione nel suo utilizzo. Inoltre, è necessario acquisire esperienza nella determinazione del numero di livelli di griglia da impiegare nel ciclo multigrid.

La norma generale è che il **numero di griglie** da utilizzare si riduce con l'**aumentare della frequenza caratteristica** del problema. In presenza di problemi ad alta frequenza, non si ottiene alcun beneficio dall'uso di numerosi livelli di griglia; in questi casi, il passo temporale richiesto per garantire l'accuratezza è ridotto, e di conseguenza, l'efficacia del multigrid cala con la diminuzione della grandezza del passo temporale fisico.



13. Turbulence

La turbolenza è un fenomeno di moto caotico di un fluido che caratterizza il **regime turbolento**. Questo si realizza quando il **numero di Reynolds** Re del flusso supera un certo valore tale che gli **effetti convettivi** diventano più rilevanti degli **effetti viscosi**.

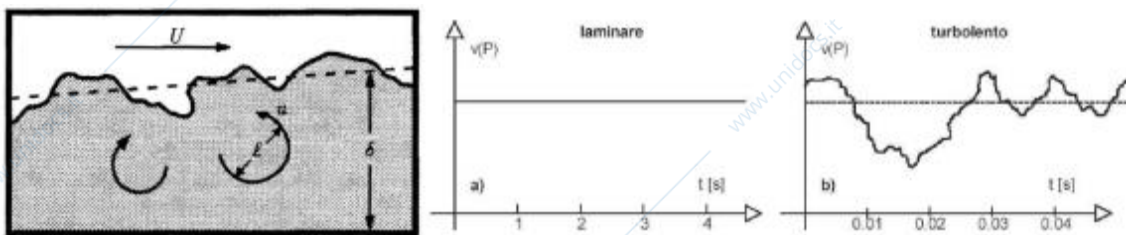
Spesso tendiamo a considerare alcuni fenomeni come stazionari quando, in realtà, non lo sono mai completamente. A livello macroscopico possono sembrare tali, ma esistono sempre fluttuazioni di intensità variabile nelle variabili di flusso. Queste fluttuazioni possono essere attenuate se il numero di Reynolds (Re) non è eccessivamente alto; al contrario, se Re è abbastanza elevato, possono essere amplificate fino a causare un flusso turbolento.

Anche i fenomeni che sembrano semplici e che siamo inclini a trattare come bidimensionali e stazionari, in realtà non lo sono. Non sono bidimensionali perché le fluttuazioni turbolente coinvolgono tutte e 3 le componenti della velocità, e non sono stazionari poiché la turbolenza è di per sé un fenomeno non stazionario. Tali fluttuazioni generano vortici che si manifestano su un'ampia gamma di scale geometriche, dai vortici di dimensioni comparabili a quelle del problema a micro-vortici molto più piccoli.

La turbolenza è un fenomeno unico in quanto, pur essendo statistico, è caratterizzato da fluttuazioni che, sebbene casuali, seguono statistiche ben definite. Di conseguenza, lo spettro energetico associato a queste fluttuazioni e ai vortici che ne derivano è continuo e specifico, tipico della turbolenza.

Un altro elemento cruciale della turbolenza è l'aumento del livello di mixing (mescolamento) rispetto al flusso laminare. I vortici, che variano notevolmente in dimensione e si muovono attraverso il campo di flusso, provocano un'intensa miscelazione dei fluidi. Questo comporta una diffusione delle variabili fisiche, sia scalari che vettoriali, molto più marcata rispetto a quella osservata in condizioni non turbolente, ovvero in flusso laminare, dove la diffusione è limitata al solo trasporto molecolare.

Un elemento distintivo della turbolenza è la sua natura non locale, ovvero la dipendenza da condizioni pregresse del flusso turbolento. Prendendo in esame il vano palare di una turbomacchina, si osserva che, in presenza di un flusso turbolento, le misurazioni di skin-friction, gli sforzi esercitati sulle pareti e tutte le altre variabili fisiche che influenzano le perdite di pressione totale lungo la schiera sono significativamente influenzate, in maniera più o meno marcata a seconda della situazione specifica, dal grado di turbolenza presente all'ingresso del sistema.



La turbolenza è un fenomeno fluidodinamico che si manifesta come un flusso caotico e irregolare. Questo comportamento si verifica tipicamente quando il numero di Reynolds (Re) associato al flusso supera una certa soglia, indicando un regime di flusso in cui le forze inerziali dominano quelle viscosi. In tale contesto, si ha:

- **Flusso** si presenta **tridimensionale** e **variabile nel tempo (non stazionario)**, con le velocità e altre grandezze fisiche che subiscono fluttuazioni dipendenti dal tempo e da una vasta gamma di scale spaziali.
- Queste **fluttuazioni** sono il risultato della formazione di vortici di varie dimensioni, che non sono distribuiti casualmente, ma seguono uno schema energetico specifico, tipico della turbolenza. Se osservati su un arco temporale adeguato, questi vortici rivelano un'intensa attività di mescolamento, specialmente in direzioni perpendicolari al flusso principale. Questo mescolamento è evidente quando si confronta il profilo di velocità media di un flusso laminare con quello turbolento: nel secondo caso, il profilo è molto più ripido vicino alle pareti e più uniforme al centro, riflettendo l'efficace miscelazione del flusso turbolento.

- Gli **effetti della turbolenza** non sono confinati a una località specifica ma sono **influenzati da eventi a monte**. I vortici trasportano **quantità di moto ed energia** attraverso il **campo di flusso**, diffondendosi in tutte le direzioni e interagendo con l'ambiente circostante. Questo comportamento non locale è fondamentale per comprendere la complessità e le sfide associate alla previsione e al controllo dei flussi turbolenti in applicazioni ingegneristiche e scientifiche.

La **media di Reynolds** è un approccio matematico che permette di semplificare lo studio dei flussi turbolenti, attraverso la **decomposizione delle velocità** in una **componente media** e una **fluttuante**. Questo metodo introduce nelle equazioni di Navier-Stokes un termine aggiuntivo, noto come **tensore degli sforzi di Reynolds**, che rappresenta l'effetto delle fluttuazioni di velocità. Le equazioni risultanti, denominate **equazioni di Navier-Stokes mediate alla Reynolds (RANS)**, o **URANS** nel caso di flussi non stazionari, richiedono l'uso di **modelli di turbolenza** per fornire le **relazioni di chiusura** necessarie a risolvere il sistema, dato che tra le incognite del problema adesso ci sono anche le 6 componenti del tensore di Reynolds. Questi modelli di turbolenza, sebbene non esista ancora un modello universale che descriva accuratamente ogni tipo di flusso turbolento, sono essenziali per prevedere le componenti del tensore di Reynolds e, di conseguenza, per analizzare il comportamento medio del flusso. I modelli più efficaci e generalizzabili vengono utilizzati per coprire un ampio spettro di applicazioni pratiche, nonostante le limitazioni nella loro capacità di descrivere tutti gli aspetti della turbolenza.

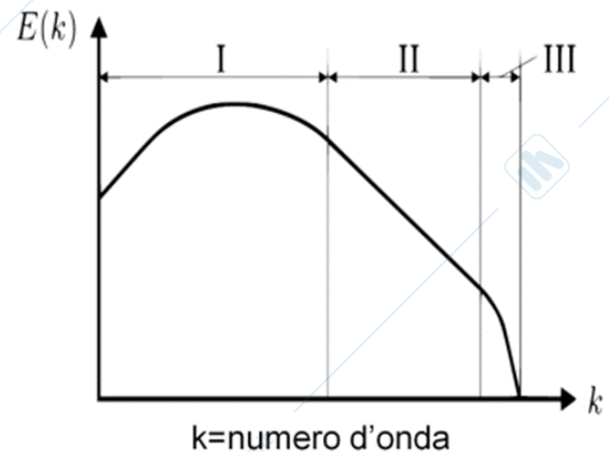
13.1. Energy Cascade

La turbolenza si manifesta come un moto fluido caotico, pienamente tridimensionale e variabile nel tempo, definito da variazioni casuali di tutte le componenti della velocità attraverso lo spazio e il tempo. Esaminando un segnale turbolento tipico, ottenuto misurando la velocità in un punto specifico con strumenti adeguati, si evidenziano fluttuazioni attorno a una media che si estendono su un vasto intervallo di frequenze. Questa caratteristica del fenomeno implica che, anche ripetendo le misurazioni in momenti differenti, i risultati saranno sempre unici; nondimeno, è possibile notare che analizzando le fluttuazioni su un periodo prolungato, i parametri statistici rimangono invariati. Tale coerenza si osserva oltre un certo lasso di tempo, conosciuto come il **tempo caratteristico della turbolenza**, durante il quale i valori statistici si stabilizzano.

Le **energie** associate alle **diverse frequenze** sono correlate a strutture vorticosi nel campo di flusso, che emergono su una vasta gamma di scale e cambiano continuamente. I **micro-vortici** sono cruciali per il trasporto di **quantità di moto e per il mescolamento tra elementi fluidi vicini**. Analizzando un profilo di velocità turbolento rispetto a uno laminare all'interno dello stesso sistema, si nota una differenza significativa, evidenziando che la diffusione in condizioni turbolente è notevolmente più intensa. Per problemi più semplici, come il **flusso all'interno di un condotto o su superfici piane**, dove il flusso è in equilibrio, si formano profili di velocità turbolenti autosimili. Tuttavia, questa non è una caratteristica distintiva dei flussi turbolenti, poiché sono influenzati da molti effetti locali.

Lo **spettro energetico** della turbolenza presenta caratteristiche distintive e una **configurazione largamente autosimile** attraverso diversi casi, illustrando efficacemente il fenomeno noto come **Energy Cascade** della turbolenza.

Un esempio classico di spettro mostra sulle ascisse il **numero d'onda** associato alle fluttuazioni e sulle ordinate l'**energia spettrale** corrispondente, espressa in funzione del numero d'onda. Questo rappresenta l'energia legata a specifiche lunghezze d'onda e, di conseguenza, alle frequenze di oscillazione delle varie grandezze fisiche.



L'andamento caratteristico dello spettro energetico della turbolenza può essere suddiviso in 3 principali regioni:

- I. **Zona dei macro-vortici:** la cascata energetica si innesca con l'**instabilità dei vortici più grandi** che tendono a frazionarsi in vortici più piccoli così da ripartire la propria energia e trasferirla a scale più piccole. Questo fenomeno è ripetitivo, quindi i vortici più piccoli si ripartiscono in altri sempre più piccoli, fino a che la dimensione dei vortici turbolenti è così piccola che questi possono essere dissipati dagli effetti viscosi. Questa prima fase rappresenta l'energia spettrale associata ai vortici più grandi che, appunto suddividendosi in vortici più piccoli, trasferiscono la propria energia alle scale più piccole.
- II. **Zona inerziale:** Nota anche come "*inertial subrange*", in questa zona l'energia spettrale diminuisce al crescere del numero d'onda. È caratterizzata da **turbolenza isotropa** e da un trasferimento di energia dai vortici di dimensioni maggiori verso quelli di scala più piccola. La pendenza dello spettro in questa regione, su scala logaritmica, è di $-5/3$. In questa regione predominano gli **effetti inerziali** e, attraverso il processo di **frammentazione dei vortici**, la turbolenza si orienta verso l'isotropia almeno a livello locale. Con un numero di Reynolds (Re) elevato, anche la lunghezza di scala del fenomeno considerato è significativa, portando i vortici generati dalla frammentazione di quelli più grandi a raggiungere rapidamente una scala minore rispetto alla scala caratteristica del problema. Secondo l'ipotesi di Kolmogorov, una volta che i vortici raggiungono una dimensione sufficientemente piccola, perdono la 'memoria' dei vortici più grandi da cui sono originati, risultando in una turbolenza isotropa. In condizioni di Re molto alto, si formano regioni dove gli effetti inerziali hanno la prevalenza su quelli viscosi, dominando così la cascata energetica nella zona inerziale.
- III. **Zona di dissipazione:** Questa regione è definita da un rapido decremento dell'energia spettrale. Le scale più piccole sono dominate dagli **effetti viscosi** e l'energia viene convertita in calore a causa della viscosità molecolare. I vortici hanno raggiunto dimensioni talmente ridotte da poter essere dissipati efficacemente attraverso gli sforzi di taglio viscosi. La quantità di energia dissipata è proporzionale all'energia trasferita dalle scale maggiori a quelle minori.

L'entità della magnitudine di turbolenza dipende dalla quantità di energia estratta dal flusso medio nella prima zona.

In sintesi, il processo inizia con un grande vortice che progressivamente si divide in vortici di dimensioni ridotte. Questo fenomeno comporta un trasferimento di energia dalle strutture di grande scala a quelle di scala più piccola. Man mano che i vortici si riducono raggiungono una dimensione talmente minuta che non sono più in grado di mantenere la propria struttura. A questo punto, la loro energia cinetica si disperde a causa dell'azione della viscosità del fluido.

Un approccio DNS riproduce questo diagramma spettrale integralmente, mentre per approcci LES e RANS/URANS dipende da dove poniamo la soglia in termini di numero d'onda al di sotto del quale andiamo a risolvere la struttura vorticoso e al di sopra della quale andiamo a modellarla.

13.2. Turbulent scales

La sfida attuale consiste nell'elaborare metodi per anticipare gli effetti in termini di applicazioni computazionali. È universalmente riconosciuto che le equazioni di Navier-Stokes (NS) sono fondamentali, poiché incorporano la capacità intrinseca di descrivere tali fenomeni. Teoricamente, stabilendo condizioni iniziali verosimili attraverso l'uso delle equazioni NS, possiamo prevedere e modellare queste fluttuazioni energetiche (attraverso la simulazione diretta della turbolenza, o DNS). Tuttavia, l'onere computazionale associato a questo metodo è notevolmente elevato, come osservato.

La nostra analisi si basa sulla teoria universale dell'equilibrio (**Teoria dell'Energy Cascade universale**), che postula una turbolenza isotropa nella zona di dissipazione numero *III*. In accordo con tale teoria si ha:

- La **lunghezza di scala massima L (lunghezza caratteristica)**, corrispondente all'ordine di grandezza delle dimensioni caratteristiche del sistema in esame. I vortici più grandi derivano da fenomeni non stazionari legati al flusso medio e sono alimentati energeticamente dallo stesso flusso medio;

- La **scala minima**, al di sotto della quale i vortici perdono la propria individualità, per effetto della dissipazione viscosa, è la cosiddetta **scala di Kolmogorov**. La dissipazione viscosa nei micro-vortici avviene alla scala più piccola di turbolenza osservabile, nota come lunghezza di Kolmogorov, che rappresenta la dimensione spaziale minima alla quale la turbolenza può essere rilevata. Questi micro-vortici, quando sono di dimensioni simili alla lunghezza di Kolmogorov, subiscono una rapida distruzione, con la loro energia cinetica che viene dissipata e trasformata in calore a causa degli effetti viscosi. La minima lunghezza di scala compatibile con la dissipazione viscosa prende il nome di **lunghezza di scala di Kolmogorov** data da:

$$\ell_k = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{(1/4)}$$

con ν **viscosità cinematica** del fluido e ϵ **grado di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta**;

- Le **scale temporali più grandi**, di **natura convettiva** e **diffusiva**, fanno riferimento alla velocità di scala del problema, alla lunghezza di scala del problema e alla viscosità. La **scala convettiva dei tempi** è data da $t_c = L/U$ e la **scala dei tempi diffusiva** è $t_d = L^2/\nu$ (con U velocità caratteristica).
- La **scala temporale minima** è quella di Kolmogorov che quantifica la vita dei vortici più piccoli prima che vengano eliminati dagli effetti viscosi. La minima scala temporale ammissibile è $t_k = \sqrt{\nu/\epsilon}$;

Nell'ambito della **simulazione numerica diretta (DNS)**, i requisiti sono particolarmente rigorosi poiché è necessario risolvere completamente lo **spettro energetico della turbolenza**. Per questo motivo, la **dimensione delle celle di griglia** deve essere comparabile con la **scala di Kolmogorov**, che rappresenta la più piccola scala di lunghezza della turbolenza. In maniera simile, per risolvere l'intero spettro delle frequenze turbolente, il **passo temporale** della simulazione deve essere proporzionato alla **scala temporale di Kolmogorov**. Stabilendo un rapporto tra la **lunghezza caratteristica** del fenomeno in esame e la **scala di Kolmogorov**, si ottiene un valore approssimativamente equivalente al rapporto tra il **tempo caratteristico**, determinato dai processi diffusivi, e la **scala temporale di Kolmogorov**:

$$\frac{L}{\ell_k} \simeq \frac{t_v}{t_k} \simeq Re^{\frac{3}{4}}, \quad \frac{t_c}{t_k} \simeq Re^{\frac{1}{2}}$$

Il **numero di celle necessarie** in una direzione (ad esempio x) sarà:

$$N_x = \frac{L}{\ell_k} \simeq Re^{\frac{3}{4}}$$

Per un dominio tridimensionale il numero totale di celle sarà dell'ordine di:

$$N_{tot} \simeq Re^{\frac{9}{4}}$$

Il **numero di time step** necessari per risolvere la più alta frequenza sarà dato da:

$$n \simeq \frac{t_v}{t_k} \simeq Re^{\frac{3}{4}}$$

Definendo il **costo computazionale** come il numero di celle necessarie per il numero di time step abbiamo:

$$N_{tot} \cdot n \simeq Re^3$$

Nelle applicazioni industriali, il numero di Reynolds (Re) può raggiungere valori dell'ordine del milione, il che comporta un costo computazionale per la simulazione diretta numerica (DNS) dell'ordine di 10^{18} . Questo rappresenta un notevole investimento in termini di risorse computazionali, attualmente gestibile solo dai supercomputer più avanzati, e richiede tempi di elaborazione considerevoli.

La DNS trova applicazione, ad esempio, nelle turbine a bassa pressione dei motori aeronautici, dove le prestazioni sono fortemente influenzate dalla transizione laminare-turbolenta. Attraverso la DNS, è possibile risolvere tutte le scale della cascata energetica e scegliere di approssimare questo processo introducendo una lunghezza d'onda di cut-off. Questo

permette di modellare gli effetti della turbolenza sul flusso medio anziché risolverli direttamente. Se il cut-off è posizionato nella zona II del flusso, la maggior parte delle scale di turbolenza viene risolta tramite la simulazione tramite large eddy simulation (LES), che comporta un costo computazionale e un livello di accuratezza inferiori rispetto alla DNS. Se invece il cut-off è impostato a lunghezze d'onda superiori, modellando tutto ciò che avviene a valle della zona I, si adotta un approccio RANS/URANS, che offre un compromesso diverso tra costo computazionale e accuratezza della simulazione.

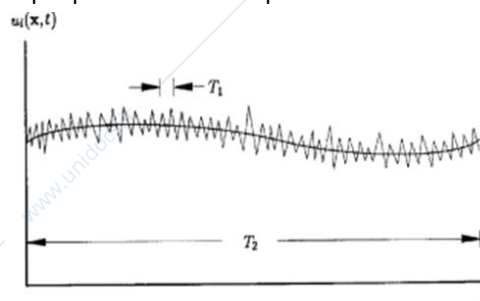
13.3. RANS/URANS methods

L'approccio industriale per il calcolo tridimensionale, sia in regime stazionario che non, si basa sull'impiego delle **equazioni di Navier-Stokes mediate secondo Reynolds (RANS o URANS)**. Questo metodo non risolve direttamente le scale minori di turbolenza, ma utilizza **modelli per emulare gli effetti sugli sforzi e sul trasferimento termico, sulla viscosità e sulla conducibilità**. Questa metodologia, tuttavia, non è considerata moderna, poiché le sue origini risalgono ai lavori di Reynolds nel XIX secolo, e ha visto sviluppi significativi all'inizio del XX secolo grazie a eminenti figure dell'ingegneria come Prandtl e Von Karman, seguiti dagli studi pionieristici di Kolmogorov sulla modellazione della turbolenza.

La maggior parte dei **modelli attualmente in uso** sono concepiti per **flussi incompressibili**, in quanto la **turbolenza è generalmente poco influenzata dalla comprimibilità**. Tuttavia, per tenere conto di quest'ultima, vengono introdotte correzioni specifiche nei modelli. Esaminando un codice di calcolo standard per applicazioni industriali, si può notare la presenza di tali correzioni, che tuttavia non sono attivate per impostazione predefinita, poiché diventano rilevanti solo per **numeri di Mach** molto elevati ($M \gg 1$), approssimativamente intorno a $M = 2 \div 2,5$. Per flussi transonici o leggermente supersonici, queste correzioni non sono necessarie.

La **turbolenza** è un fenomeno che si caratterizza per **fluttuazioni casuali e temporali** delle **variabili di flusso**, come la velocità, che si verificano con un'intensità relativamente bassa rispetto al loro valore medio. In generale, queste fluttuazioni di velocità sono contenute entro il 20% della velocità media, una percentuale che può sembrare modesta, ma che ha un impatto significativo e non trascurabile. È fondamentale considerare questi effetti per condurre simulazioni aerodinamiche che si avvicinino il più possibile alla realtà, poiché anche le più piccole variazioni possono influenzare il comportamento complessivo del flusso.

L'approccio **RANS/URANS** si fonda sul concetto di **media alla Reynolds**. Considerando il **tempo caratteristico** della turbolenza, è possibile **decomporre** una **variabile di flusso** qualsiasi (che dipende normalmente da posizione e tempo, ma nel contesto RANS solo dallo spazio) in due componenti: un **valore medio** U_i calcolato su un intervallo di tempo adeguatamente esteso e dipendente solo dalla posizione, e una **componente fluttuante**, indicata con u'_i :



Ad esempio, analizzando la **velocità**, questa sarà espressa come la somma del suo valore medio e della sua fluttuazione:

$$u_i(x, t) = U_i(x) + u'_i(x, t)$$

La media di Reynolds di una generica grandezza fisica può essere vista come quel valore a cui ci si avvicina asintoticamente man mano che si effettuano medie temporali su intervalli di tempo sempre più grandi. Quindi, si definisce un intervallo di tempo, noto come **tempo caratteristico della turbolenza** tale per cui se si effettua la media su quell'intervallo, o su uno superiore, in uno stesso punto e la si ripete più volte si ottiene sempre lo stesso valore.

$$U_i(x) = \overline{U_i(x)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i(x, t) dt$$

La **media alla Reynolds** è un **processo lineare** e, mentre la media delle fluttuazioni è zero, la media del prodotto di due fluttuazioni generalmente non lo è.

$$\overline{c_1 a + c_2 b} = c_1 \overline{a} + c_2 \overline{b} = c_1 A + c_2 B$$

$$\overline{a \cdot b} \neq \overline{a} \cdot \overline{b}$$

La **fluttuazione di una quantità** è calcolata sottraendo la sua media alla Reynolds dal suo valore istantaneo.

$$\overline{u'_i} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [u_i(x, t) - U_i(x)] dt = U_i(x) - \overline{U_i(x)} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{U_i(x, t+T) - U_i(x, t)}{T} + \frac{u'_i(x, t+T) - u'_i(x, t)}{T} dt = \frac{\partial U_i}{\partial t}$$

Questa decomposizione in media e fluttuazioni è utilizzata per modificare le equazioni di Navier-Stokes, portando al sistema di equazioni RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) o URANS (Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes). Questo processo permette di spostare l'attenzione dalla determinazione della singola grandezza tempo-variante alla determinazione della sua media alla Reynolds.

Nello studio dei flussi turbolenti, si distinguono due tipi di media:

- la **media alla Reynolds** per flussi incompruibili
- la **media alla Favre** per flussi comprimibili.

Tuttavia, si è osservato che la turbolenza è influenzata dalla comprimibilità solo a numeri di Mach molto alti, come nei flussi ipersonici. Pertanto, i modelli di turbolenza sviluppati sulla base della teoria dei flussi incompruibili sono comunemente applicati anche a flussi comprimibili in molte situazioni pratiche.

L'**equazione di continuità** conserva la sua forma originale in quanto è una relazione lineare. Diversamente, l'**equazione della quantità di moto**, a causa della sua natura non lineare, subisce delle modifiche. Queste alterazioni emergono perché la media temporale del prodotto delle fluttuazioni non si annulla. Di conseguenza, l'equazione per la quantità di moto rimane simile nella struttura matematica a quella delle grandezze medie, ma si arricchisce di termini supplementari che derivano dalla media dei flussi convettivi di tali fluttuazioni.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu s_{ji}) \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j U_i + \overline{u'_j u'_i}) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu S_{ji})$$

dove: $s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

Il termine evidenziato in rosso non è trascurabile e si riferisce alle **fluttuazioni associate alla turbolenza**. Pertanto, è utile considerare questo termine come un **contributo aggiuntivo** che incarna l'influenza della turbolenza sulle variabili fluide. A questo scopo, si introduce il concetto di **tensore degli sforzi di Reynolds**, noto anche come **tensore degli sforzi turbolenti**, che rappresenta gli effetti apparenti della turbolenza.

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu S_{ji} - \overline{\rho u'_j u'_i}) \quad \text{Eq. di NS mediate alla Reynolds}$$

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} \quad \text{tensore degli sforzi di Reynolds}$$

Questo **tensore degli sforzi di Reynolds** è un **tensore simmetrico del secondo ordine** ed è caratterizzato da 9 componenti. Tuttavia, la simmetria riduce il numero di **componenti indipendenti** a 6 a causa della proprietà commutativa.

L'adozione della **formulazione mediata alla Reynolds** delle **equazioni di Navier-Stokes** introduce **6 ulteriori incognite** nel sistema. Per quantificare l'effetto della turbolenza, è necessario modellare queste incognite, ma ci troviamo di fronte a un problema: con 4 equazioni disponibili, ci ritroviamo a dover risolvere per 10 incognite. La soluzione sta nel **modellare le componenti del tensore di Reynolds**, definendo relazioni algebriche, analitiche o differenziali che le collegano alle variabili medie. Questo processo riduce le incognite a 4, rendendo il sistema risolvibile. Queste relazioni, note come **modelli di turbolenza**, sono sistemi di equazioni che correlano gli **sforzi di Reynolds** con le **variabili di flusso medie alla Reynolds**. Risolvendo le equazioni di Navier-Stokes in congiunzione con un modello di turbolenza adeguato, si determinano le variabili medie di Reynolds per il campo di flusso in esame.

Nell'ambito dello sviluppo di modelli di turbolenza, si distinguono principalmente 2 **macro-approcci**:

- Il primo mira a **modellare ogni singola componente** del tensore degli sforzi di Reynolds, risultando in 6 distinte relazioni, una per ciascun τ_{ij} . Questo metodo si divide ulteriormente in due strategie: l'impiego di **equazioni differenziali parziali** (PDE) per il trasporto di ogni componente del tensore di Reynolds, o l'**adozione di relazioni algebriche**, sia implicite che esplicite, per definire ogni componente.
- Il secondo approccio si fonda sull'**ipotesi di Boussinesq**, la quale postula un parallelo formale tra gli sforzi turbolenti e quelli viscosi. Di conseguenza, le **componenti del tensore degli sforzi di Reynolds** vengono descritte in termini delle **componenti del tensore di deformazione media secondo Reynolds**. Questa correlazione è formalmente simile a quella degli sforzi viscosi, grazie all'introduzione del concetto di viscosità turbolenta, che, a differenza della viscosità classica, non è una proprietà intrinseca del fluido, ma piuttosto una caratteristica del flusso stesso. L'analogia proposta si basa su un presupposto molto ponderato: i **fenomeni molecolari** sono descritti da una **fenomenologia isotropa**, il che implica che anche la **turbolenza** assume un **comportamento isotropo** (questa è un'ipotesi significativa) e ciò porta a delle imprecisioni nelle previsioni che sono intrinsecamente di natura fisica. Nella pratica, accettando l'isotropia degli sforzi di Reynolds, che è valida solo a piccole scale, si modella il tensore degli sforzi in maniera simile a quello degli sforzi viscosi, introducendo un concetto di viscosità turbolenta. Quest'ultima non è una proprietà intrinseca del fluido, ma è piuttosto legata alle variabili medie del flusso, rendendola una caratteristica locale del movimento del fluido. L'obiettivo finale di questo approccio è la modellazione efficace del termine ν_T , che rappresenta la **viscosità turbolenta** all'interno delle equazioni del moto turbolento. Di conseguenza ciascuna compiente del tensore degli sforzi di Reynolds viene così definita:

$$\tau_{ij} = \nu_T \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

13.4. Models based on transport equations

I **modelli di turbolenza** che si basano sulle **equazioni di trasporto** sono categorizzati in 2 tipi principali: i modelli monoequazione e i modelli biequazione.

- **Modelli ad una equazione**: introducono una singola equazione di trasporto per una quantità turbolenta specifica, che può essere rappresentata dalla viscosità turbolenta o dall'energia cinetica turbolenta. Quest'ultima è definita come la metà della traccia del tensore di Reynolds, il quale è calcolato sommando gli sforzi normali di Reynolds e dividendo il risultato per due.
- **Modelli a due equazioni**: si avvalgono di due distinte equazioni di trasporto per descrivere due diverse quantità turbolente. Tipicamente, una di queste equazioni è dedicata all'energia cinetica turbolenta. Una volta che questa variabile è stata modellata, si rende necessaria una lunghezza di scala per esprimere la viscosità di eddy.

13.4.1. One-equation Models

I modelli algebrici, noti anche come modelli a 0 equazioni, sono così definiti perché non includono equazioni differenziali di trasporto. Al contrario, i modelli a una equazione incorporano una **singola equazione differenziale alle derivate parziali** per il trasporto di una certa proprietà legata alla turbolenza.

L'equazione differenziale in questione regola una **grandezza turbolenta generica**, che può essere rappresentata dalla **viscosità turbolenta** o da una variabile correlata ad essa. Storicamente, la pratica comune era quella di risolvere l'equazione differenziale per la **velocità di miscelamento**, senza presupporre una proporzionalità diretta con la lunghezza di miscelamento, un approccio diverso da quello adottato nei modelli algebrici.

In alcuni casi, è possibile trasportare direttamente l'**energia cinetica turbolenta**, definita come metà della traccia del tensore di Reynolds. Questa è calcolata sommando gli sforzi normali di Reynolds presenti sulla diagonale principale del

tensore e dividendo il risultato per due. Introducendo la variabile k , è possibile esprimere la viscosità turbolenta in termini di energia cinetica turbolenta. Con questa impostazione però il problema si chiude solo se viene imposta un valore adeguato alla lunghezza di scala massima. Questo fatto rappresenta un grosso limite per i modelli ad una equazione.

• MODELLO DI SPALART-ALLMARAS

I modelli basati su una **singola equazione** sono stati tradizionalmente considerati **incompleti**, poiché per definire completamente il sistema è necessario specificare una **lunghezza di scala turbolenta**. Questa lunghezza di scala è spesso definita equivalente alla **lunghezza di miscelamento di Prandtl**. Tuttavia, la recente ricerca di Spalart ha sfidato questa nozione, proponendo che un modello a una equazione potrebbe, in realtà, essere completo. Attraverso il suo lavoro, Spalart ha sviluppato un modello a una equazione completo, noto come **modello di Spalart-Allmaras**.

Questo modello innovativo fornisce direttamente il **valore della variabile turbolenta trasportata**, eliminando la **necessità di ipotesi empiriche aggiuntive per la chiusura del sistema**, e in particolare, senza la necessità di definire una lunghezza di scala. La **variabile trasportata** nel modello di Spalart-Allmaras, indicata con $\tilde{\nu}$ (**diffusività turbolenta**), è strettamente correlata alla **viscosità turbolenta** dalla seguente relazione:

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1}$$

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$$

La complessità del modello non ne preclude l'efficacia; al contrario, è noto per essere un **modello leggero e robusto**, che non richiede ipotesi empiriche e che, per certi tipi di flusso, offre risultati superiori rispetto ai modelli a due equazioni. In particolare, per i flussi aerodinamici esterni, il modello di Spalart-Allmaras si è dimostrato eccellente. Di conseguenza, mentre i modelli a una equazione basati sull'energia cinetica turbolenta sono considerati obsoleti, il modello di Spalart-Allmaras si distingue come un approccio promettente e all'avanguardia nel campo della modellazione della turbolenza.

Il modello presentato si compone di **8 costanti** e incorpora **funzioni di smorzamento**, strutturandosi come segue:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right] + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right\} - c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2$$

Nel primo membro della formula troviamo il **termine stazionario** accanto a quello **convettivo**, mentre nel secondo membro è presente il **termine di produzione** $c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu}$, dove c_{b1} rappresenta una costante e \tilde{S} denota il **modulo del vettore**

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad S = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

rotation tensor

vorticità, che viene modificato nel modo seguente:

Dove f_{v2} è impiegata come una **funzione di chiusura** del modello.

Segue un **termine doppio di diffusione**: il primo è il **classico processo di diffusione turbolenta**, caratterizzato dall'introduzione del **numero di Smith** σ , al quale si aggiunge un **secondo meccanismo di diffusione**, descritto come un **gradiente quadrato** congiuntamente ad una costante denominata c_{b2} . Quest'ultimo è rappresentato dal modulo quadrato del gradiente di $\tilde{\nu}$. Successivamente, si analizza un **termine di dissipazione** che implica l'uso di una **funzione di chiusura supplementare (funzione di smorzamento)**, denominata f_w e di una costante c_{w1} . Questa funzione emerge da considerazioni di natura dimensionale ed è definita come il rapporto tra la variabile trasportata, associata all'energia cinetica turbolenta, e il quadrato della distanza dalla parete. Le equazioni di chiusura utilizzate presentano espressioni particolarmente complesse.

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}, \quad c_{w2} = 0.3, \quad c_{w3} = 2, \quad \kappa = 0.41 \quad k \text{ rappresenta la costante di Von Karman,}$$

13.4.2. Two-equation Models

I modelli a due equazioni rappresentano il livello fondamentale per una modellazione completa, che **non richiede ipotesi aggiuntive per la chiusura del sistema**. Al contrario, i modelli a una equazione, escluso quello di Spalart-Allmaras, necessitano di un'ipotesi supplementare relativa alla lunghezza di miscelamento. Il modello di Spalart-Allmaras si distingue per essere l'unico nella sua categoria a non richiedere input addizionali per ottenere una formulazione chiusa. I modelli a due equazioni, d'altra parte, sono **intrinsecamente completi e non necessitano di definire a priori alcuna scala di grandezza della turbolenza**. Sono **modelli isotropi**, basati sull'ipotesi di Boussinesq, quindi non considerano l'anisotropia della turbolenza. Inoltre, l'equazione che determina la scala non si basa su argomenti fisici solidi e molti termini sono modellati tramite analisi dimensionale.

Basati su **2 equazioni di trasporto per 2 diverse proprietà turbolente**, i modelli a due equazioni erano considerati la forma più semplice di chiusura turbolenta prima dell'introduzione del modello di Spalart-Allmaras. Tipicamente, una delle equazioni modella l'**energia cinetica turbolenta (TKE)**, mentre l'altra determina la **scala**, essenziale per calcolare la viscosità turbolenta. Questo porta a una equazione di trasporto per la TKE e una equazione determinante la scala. Tra i più noti ci sono i modelli $k - \varepsilon$ e $k - \omega$.

I due approcci prevalenti sono:

- Il **modello $k - \varepsilon$** , che utilizza un'equazione di trasporto per l'**energia cinetica turbolenta** e una per la sua **dissipazione per unità di massa**. Il rapporto tra k e ε stabilisce la scala di grandezza, eliminando la necessità di modellarla a priori. In altre parole, **lunghezza di scala** è la dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ε .
- Il **modello $k - \omega$** , che include un'equazione di trasporto per l'**energia cinetica turbolenta** e una per la **dissipazione specifica della TKE**, ovvero la dissipazione dell'energia turbolenta per unità di energia cinetica turbolenta, che può essere vista come una reinterpretazione della dissipazione per unità di massa. In conclusione, questo modello utilizza come **variabile di lunghezza di scala** la dissipazione specifica dell'energia cinetica turbolenta $\omega = \varepsilon/k$.

❖ MODELLO $k - \varepsilon$

Nel **modello $k - \varepsilon$** , la **variabile determinante la scala**, per la quale viene formulata la seconda equazione di trasporto, è la **dissipazione ε dell'energia cinetica turbolenta**.

$$\varepsilon = 2\nu \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}} \quad \mu_T = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$$

L'equazione di trasporto per k è ben nota, mentre quella per ε è stata derivata brutalmente per analogia con l'equazione di k , utilizzando l'analisi dimensionale e introducendo costanti calibrate attraverso il confronto con dati sperimentali. In questo modo, l'equazione per ε è stata ottenuta attraverso un approccio semi-empirico che si avvale anche dell'analisi dimensionale.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_T / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_T / \sigma_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \\ \omega = \varepsilon / (C_\mu k) \quad \text{and} \quad \ell = C_\mu k^{3/2} / \varepsilon \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Coeff. di chiusura} \\ C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_\mu = 0.09 \\ \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad (4.43) \end{array}$$

Le equazioni presentano un **termine stazionario**, comune ad entrambe, e un **termine convettivo**, che rappresenta il trasporto convettivo di k e di ε . Il termine esatto $\tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ simboleggia la **produzione di energia cinetica turbolenta**. Inoltre, ε rappresenta la dissipazione di energia cinetica turbolenta per unità di massa, a cui si aggiungono i termini diffusivi: uno molecolare, espresso dalla **viscosità molecolare μ** del fluido, e uno turbolento, descritto dal rapporto μ_T / σ_k .

L'equazione per ε è strutturalmente simile. Il termine di produzione è modellato e potrebbe essere formulato esattamente, ma tale formulazione implicherebbe termini e metodi relativi alle fluttuazioni e alle diverse componenti del tensore di Reynolds. Pertanto, questo termine è modellato basandosi su considerazioni di analisi dimensionale. In pratica, si prende il termine di produzione di k , si moltiplica per ε e si divide per k , ottenendo così la formulazione $C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Infine, $-C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]$, essendo definito positivo e presentandosi con un segno negativo, assume il ruolo di un **agente di distruzione o dissipazione**. Tale termine è stato derivato utilizzando un ragionamento basato sull'analisi dimensionale, simile a quello impiegato per dedurre il termine di produzione. È interessante notare che, escludendo la costante di calibrazione $C_{\varepsilon 2}$, la formula assume una forma analoga al termine di dissipazione di k moltiplicato per ε e diviso per k . In aggiunta, si osserva la presenza di un termine che rappresenta la diffusione di k , sia in condizioni laminari che turbolente, caratterizzato dall'intervento di un ulteriore numero di Schmidt σ_ε . Per quanto riguarda la **scala di lunghezza**, essa è espressa dalla relazione $l \propto k^{3/2}/\varepsilon$.

Le **condizioni al contorno** da imporre sono le seguenti:

- per la variabile k si assume che tutte le fluttuazioni di velocità siano nulle in prossimità della parete, pertanto $k = 0$.
- per la variabile ε la condizione al contorno rimane indefinita; al massimo, è possibile individuare il suo comportamento asintotico vicino alla parete, il che costituisce una delle sfide principali di questo modello, dato che comporta l'integrazione di un'equazione differenziale senza conoscere le condizioni al contorno della variabile in questione.
- Come valori di *Freestream*, si assegna il **livello di turbolenza** T_u utilizzando il rapporto tra la fluttuazione di velocità u' e la velocità media U , nel contesto di turbolenza isotropa, e si stabilisce anche la scala di lunghezza della turbolenza.

$$T_u = \frac{u'}{U} = \sqrt{\frac{2}{3}k}$$

- Successivamente, si attribuisce un **valore alla scala di lunghezza turbolenta**, che idealmente dovrebbe essere derivato dal decadimento della freestream turbulence, ma comunemente si ricorre a correlazioni empiriche che ne facilitano la stima:

$$\ell_T = C_\mu \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

L'integrazione del **modello $k - \varepsilon$** fino alla parete presenta delle sfide, in quanto non è chiaro quale valore assegnare al parametro ε in prossimità della parete.

- Comunemente, si adotta un **metodo basato sulle wall functions**. Questo approccio evita la necessità di una griglia estremamente dettagliata attorno alla parete per risolvere il substrato laminare, permettendo invece che il centro della prima cella di griglia adiacente alla parete cada all'interno dello strato logaritmico. Ciò consente di esprimere ε analiticamente nella prima cella, eliminando la necessità di imporre condizioni al contorno specifiche. Il valore di y^+ per il centro di questa cella dovrebbe idealmente rientrare nell'intervallo $50 \div 100$, che corrisponde allo strato logaritmico dove le proprietà turbolente possono essere descritte con precisione. Tale metodologia è vantaggiosa poiché riduce la necessità di estendere eccessivamente la griglia vicino alla parete. Tuttavia, la sua efficacia diminuisce in presenza di flussi separati, poiché in tali condizioni lo strato logaritmico non si forma e l'utilizzo della formula logaritmica per calcolare ε diventa fisicamente inappropriato.
- Un'alternativa per affrontare la questione dell'integrabilità del modello fino alla parete consiste nell'**uso di funzioni di smorzamento**. Queste funzioni, impostando $\varepsilon = 0$ sulla parete, forniscono un comportamento asintotico corretto per la dissipazione dell'energia cinetica turbolenta. L'adozione di tali funzioni permette di estendere l'integrazione del modello fino alla parete, migliorando l'accuratezza della simulazione. Un ostacolo

nell'uso di queste funzioni di smorzamento è la loro natura esponenziale, che può introdurre rigidità numerica (stiffness), rendendo i modelli potenzialmente instabili. Questa caratteristica rende meno attraente l'uso di tali funzioni, poiché può complicare la stabilità delle simulazioni. Tuttavia, esistono numerosi modelli basati su funzioni di smorzamento, che sono di natura empirica e spesso derivati dal confronto con risultati di simulazioni dirette numeriche (DNS).

I **modelli $k - \varepsilon$** sono particolarmente efficaci in **ambienti privi di pareti**, come nel caso del **miscelamento di scie o getti**, o in **situazioni caratterizzate da turbolenza non influenzata dalle pareti**. Questi modelli offrono una relazione fisicamente accurata tra le variabili turbolente e le condizioni esterne, garantendo una risposta corretta delle quantità turbolente al variare di tali condizioni. Tuttavia, mostrano **limitazioni nella gestione dei gradienti di pressione**, specialmente quelli avversi, che possono derivare dalla difficoltà di integrare l'equazione per ε . Le grandezze relative alle pareti, che seguono fedelmente e prontamente i cambiamenti del gradiente di pressione, sono cruciali: un trattamento inadeguato di queste grandezze può compromettere la risposta del modello ai gradienti di pressione. Il **modello $k - \varepsilon$** , in particolare, non riesce a riprodurre con precisione tali grandezze, risultando poco sensibile ai gradienti di pressione.

Inoltre, il **modello $k - \varepsilon$** condivide con altri modelli a due equazioni la **tendenza a sovrastimare la produzione di energia cinetica turbolenta nei punti di ristagno**, un comportamento non fisico che può influenzare negativamente gli strati limite a valle. Si potrebbe pensare che questo difetto sia limitato a questi soli punti mentre, in realtà, una volta che si ha sovrapproduzione di energia cinetica turbolenta, questa viene trasportata a valle corrompendo gli strati limite. Questo problema, legato alla formulazione della viscosità turbolenta piuttosto che alle equazioni di trasporto, porta a una rappresentazione inaccurata degli sforzi normali. Per mitigare questi effetti, si introduce il **vincolo di realizzabilità**, che impone il rispetto di una disuguaglianza specifica per assicurare risposte fisicamente plausibili del modello:

$$2k \geq \overline{u'^2} \geq 0$$

La **restrizione del tempo di scala della turbolenza** comporta una conseguente diminuzione della produzione di energia cinetica turbolenta (TKE) entro parametri definiti. È fondamentale sottolineare che nessun modello basato su due equazioni può operare efficacemente in contesti aerodinamici senza l'adozione di un vincolo di realizzabilità.

❖ MODELLO $k - \omega$

Il **modello $k - \omega$** si avvale della **dissipazione specifica dell'energia cinetica turbolenta**, utilizzando $\omega = \varepsilon/k$ come scale determining variable per la scala. L'introduzione dell'equazione per ω si deve a Kolmogorov, tuttavia, la versione maggiormente impiegata nei contesti applicativi è quella sviluppata da Wilcox:

$$\omega = \beta^* \frac{\varepsilon}{k} \quad (\beta^* = C_\mu)$$

L'equazione relativa a ω è formalmente analoga a quella per ε nel modello precedente, così come le relative equazioni costitutive:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \\ \varepsilon = \beta^* \omega k \quad \text{and} \quad \ell = k^{1/2} / \omega \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Coeff. di chiusura} \\ \alpha = 5/9, \quad \beta = 3/40, \quad \beta^* = 9/100 \\ \sigma = 1/2, \quad \sigma^* = 1/2 \end{array}$$

Per quanto riguarda l'**eddy viscosity** (viscosità turbolenta), questa è definita dalla seguente espressione:

$$\mu_T = \rho \frac{k}{\omega}$$

Nell'ambito della simulazione numerica, il modello attuale mostra un comportamento superiore rispetto al suo predecessore:

- Il valore di k è impostato a 0 in prossimità della parete;
- La condizione per ω è ora chiaramente definita: tende all'infinito man mano che ci si avvicina alla parete, ed è espressa matematicamente come $\lim_{y \rightarrow 0} \omega = \infty$

È possibile formulare diverse ipotesi per attribuire a ω un valore elevato vicino alla parete, garantendo comunque il corretto comportamento asintotico del modello.

Per le **condizioni al freestream**, queste rimangono invariate rispetto al modello precedente:

- Il **livello di turbolenza** è descritto da una formula specifica, indicata qui come:

$$Tu = \frac{u'}{U} = \sqrt{\frac{2}{3}k}$$

- La **lunghezza di scala turbolenta**, in relazione a ω , si determina conoscendo k dalla condizione su T_u e, una volta assegnata la $l_T = k^{1/2}/\omega$, si può calcolare il valore di ω .

Dal punto di vista numerico, il **modello $k - \omega$** mostra **prestazioni superiori** rispetto al **modello $k - \varepsilon$** . Ad esempio, la condizione al contorno per ω è ben definita, dato che ω tende all'infinito vicino alla parete. È possibile, quindi, adottare diverse ipotesi per attribuire un valore elevato a ω in prossimità della parete.

Il **modello $k - \omega$** può essere integrato fino alla parete e ha il vantaggio di **descrivere accuratamente il comportamento asintotico alla parete di tutte le quantità turbolente**, ad eccezione dello **sforzo di taglio**. Tuttavia, il comportamento asintotico dello sforzo di taglio alla parete non corrisponde a quello fisicamente atteso. Nonostante ciò, il **modello $k - \omega$** rappresenta un miglioramento rispetto al **modello $k - \varepsilon$** , che garantisce solo il comportamento corretto di k alla parete, mentre fallisce nel descrivere le altre quantità. Grazie alla sua capacità di riprodurre fedelmente le grandezze turbolente vicino alla parete, il **modello $k - \omega$** risponde bene ai gradienti di pressione.

Tuttavia, il modello presenta una dipendenza errata dalle variabili di freestream. Variazioni minime di T_u o l_T nel freestream possono causare variazioni eccessive dell'eddy viscosity, di k e di ω calcolate dal modello, il che rappresenta un comportamento opposto rispetto all'altro modello. È necessario imporre un vincolo di realizzabilità per la produzione di energia cinetica turbolenta nei punti di ristagno.

❖ THE MERTER'S SHEAR SHEAR-STRESS-TRANSPORT (SST) MODEL

Per adeguare il **modello $k - \omega$** in modo che rispecchi accuratamente il **profilo dello sforzo di taglio τ vicino alle pareti**, è sufficiente implementare un'unica **funzione di smorzamento** per la costante α^* . Tuttavia, comunemente si adottano 2 ulteriori **funzioni di smorzamento** che facilitano la rappresentazione della **transizione da flusso laminare a turbolento** all'interno del modello. A differenza della variabile ε , la ω consente una soluzione di tipo laminare, rendendo possibile la transizione alla turbolenza mediante l'impiego di queste funzioni supplementari. Questo approccio, sebbene **non strettamente fisico**, si è dimostrato efficace nella modellazione della transizione in determinate situazioni. Le funzioni in questione sono di **natura razionale** e, pertanto, **non introducono problemi di stiffness** nel modello.

Considerando che il **modello $k - \omega$** mostra prestazioni ottimali vicino alla parete e il **modello $k - \varepsilon$** si distingue nel freestream, è logico ipotizzare un **modello ibrido** che integri le caratteristiche di entrambi. Tale modello dovrebbe mantenere:

- la capacità del $k - \omega$ di riprodurre le variabili di parete e la sua reattività ai gradienti di pressione;
- incorporando la sensibilità del $k - \varepsilon$ ai modelli di freestream.

Questa è l'essenza del **modello SST (Shear Stress Transport)** proposto da Menter, che fonde i **modelli $k - \varepsilon$** e $k - \omega$. Le dinamiche del flusso suggeriscono criteri specifici per l'armonizzazione dei due modelli. Secondo la **teoria dello strato**

limite, la reazione del modello ai cambiamenti del gradiente di pressione è influenzata dal comportamento vicino alla parete; un cambiamento nel gradiente di pressione provoca una risposta immediata nelle variabili di parete, mentre lo strato esterno reagisce con un leggero ritardo. Inoltre, la sensibilità ai valori imposti nel freestream è determinata dall'azione del modello nella parte esterna dello strato limite, che si trova sopra lo strato logaritmico e che è influenzato dai gradienti di pressione. L'obiettivo è che il modello si comporti come il $k - \omega$ in prossimità della parete e transizioni gradualmente verso un approccio $k - \epsilon$ nello strato esterno.

Menter ha riformulato l'equazione relativa a ϵ in funzione di ω (un passaggio semplificato dal fatto che $\omega = \epsilon / k$, ottenendo così un'espressione che, a parte il termine di "cross diffusion", è formalmente analoga a quella di ω nel modello $k - \omega$. Questo termine aggiuntivo si presenta come un prodotto scalare tra il gradiente di k e quello di ω :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho k}{\partial x_j} = P - \beta^* \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} P - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2\rho \sigma_{\omega 2} \frac{1 - F_1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{cases}$$

→ cross-diffusion

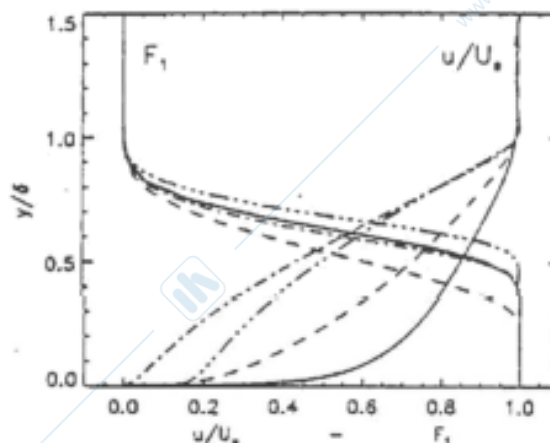
Nelle **vicinanze della parete**, è necessaria un'equazione per ω che **escluda il termine di cross diffusion** e che incorpori le costanti caratteristiche del modello **modello $k - \omega$** . Man mano che ci si allontana dalla parete e ci si avvicina allo **strato esterno**, si richiede un'equazione formulata in termini di ω , ma con i coefficienti dell'equazione del **modello $k - \epsilon$** e l'**inclusione del termine di cross diffusion**. Questo termine ha lo scopo di regolarizzare la dipendenza del modello dai valori di freestream; pertanto, deve essere attivo nello strato esterno, mentre in prossimità della parete dovrebbe passare a un modello $k - \omega$ standard.

Per realizzare ciò, Menter ha introdotto una **funzione di blending F_1** che modula sia il **termine di diffusione incrociata** sia le **costanti del modello** (i numeri di Smith e β), assumendo valore 1 vicino alla parete e 0 nello strato esterno.

$$\begin{pmatrix} \sigma_k \\ \sigma_\omega \\ \beta \end{pmatrix} = F_1 \begin{pmatrix} \sigma_k \\ \sigma_\omega \\ \beta \end{pmatrix}_1 + (1 - F_1) \begin{pmatrix} \sigma_k \\ \sigma_\omega \\ \beta \end{pmatrix}_2$$

| | | |
|-----------|---------------|---------------------|
| β_1 | σ_{k1} | $\sigma_{\omega 1}$ |
| 0.075 | 0.85 | 0.5 |
| β_2 | σ_{k2} | $\sigma_{\omega 2}$ |
| 0.0828 | 1.00 | 0.856 |

La funzione F_1 mostra un comportamento specifico, come illustrato nel grafico seguente, in funzione del rapporto y/δ .



Si osserva che al **bordo dello strato limite**, $F_1 = 0$ e, successivamente, aumenta rapidamente fino a raggiungere il valore $F_1 = 1$ tra la parete e la metà dello strato limite. Il grafico mostra **diversi comportamenti** a seconda del **gradiente di pressione**: **nullo** (linea continua), **favorevole** (linea punteggiata), e **avverso** (linea tratteggiata). La funzione F_1 si dimostra quasi insensibile ai gradienti di pressione. Dove F_1 è nulla, il modello è praticamente identico al $k - \omega$; dove F_1 è unitaria, il modello corrisponde al $k - \epsilon$.

Menter, nel suo modello, ha introdotto una modifica significativa che permette di **descrivere accuratamente il comportamento asintotico dello sforzo di taglio vicino alla parete**. Questo è stato realizzato attraverso l'implementazione di una **funzione F_2** , che segue un andamento simile alla funzione F_1 . Taylor ha dimostrato che tale comportamento può essere ottenuto adottando un'equazione per la viscosità turbolenta della forma:

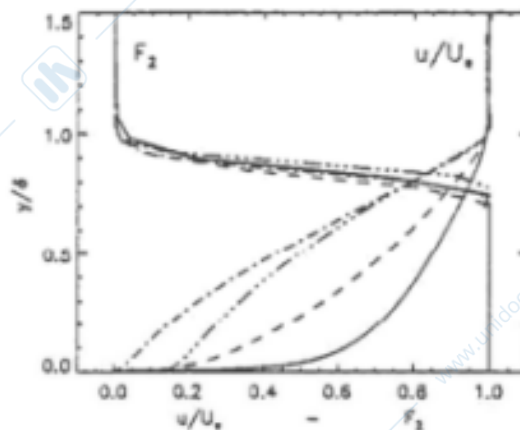
$$\mu_t = \frac{|\overline{\rho u'' v''}|}{|\Omega_{ij}|} = \frac{a_1 \rho k}{|\Omega_{ij}|}$$

dove il numeratore rappresenta lo **sforzo di Taylor** vicino alla parete. Tuttavia, questa equazione è applicabile solo nelle immediate vicinanze della parete e non è valida per la regione esterna dello strato limite o in presenza di uno shear layer, dove prevale l'effetto turbolento non correlato alla parete e si ricorre alla formulazione standard. Per rispondere a questa limitazione, Menter ha proposto una seconda funzione F_2 , simile alla F_1 ma con una transizione più marcata e un intervallo di valori unitari più esteso vicino alla parete. Questa funzione F_2 consente di esprimere la **viscosità turbolenta** come segue:

$$\mu_t = \frac{a_1 \rho k}{\max(a_1 \omega; |\Omega_{ij}| F_2)} \quad a_1 = 0.31$$

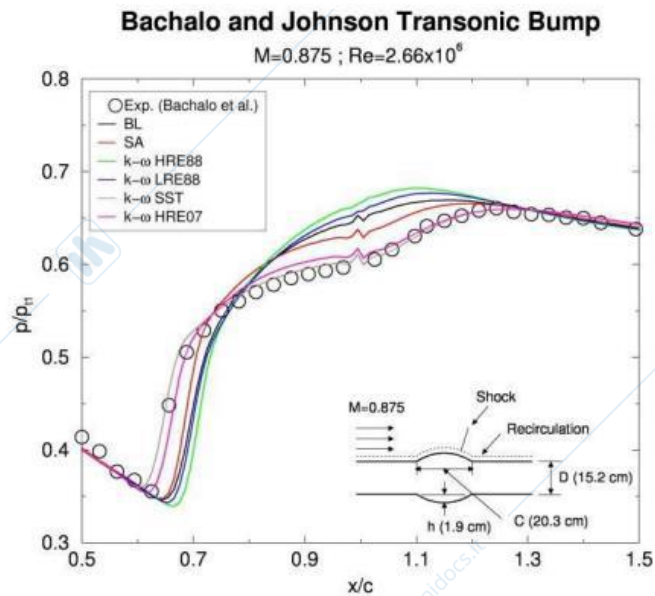
$$|\Omega_{ij}| = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}$$

In questo modo, nella regione adiacente alla parete dove $F_2 = 1$, il valore di ω (che rappresenta la dissipazione specifica dell'energia cinetica turbolenta) supera quello del modulo della vorticità, portando la viscosità turbolenta al valore di Taylor. Al contrario, quando $F_2 = 0$, nel denominatore della formula predomina il termine $a_1 \omega$, risultando nella formulazione standard per la viscosità turbolenta (eddy viscosity).



Nel caso di studio del **Transonic Bump di Bachalo e Johnson**, è possibile effettuare un confronto tra i diversi modelli analizzati. Si considera un manicotto posizionato su un tubo cilindrico, configurando un canale anulare con un rigonfiamento sulla parete interna, mentre la parete esterna rimane cilindrica. Il flusso che incide sul bump presenta un valore di Mach significativo, pari a 0.75. Inizialmente, il bump induce una restrizione del canale, poiché l'esterno rimane cilindrico, causando così un'accelerazione del flusso fino a renderlo supersonico. Superato l'asse di simmetria del bump, il canale si espande nuovamente; tuttavia, il flusso non può rallentare a causa della sua natura supersonica, generando di conseguenza un'onda d'urto curva.

La posizione e la forma dell'onda d'urto sono influenzate significativamente dall'interazione con lo strato limite che si sviluppa sulla superficie del bump. Una fedele riproduzione dello strato limite è fondamentale per una corretta previsione della posizione, della forma e dell'intensità dell'onda d'urto, nonché del recupero di pressione nella zona a valle. È quindi possibile confrontare la distribuzione di pressione calcolata con quella sperimentale per i vari modelli di turbolenza, al fine di determinare quale modello riesca a simulare accuratamente i dettagli dello strato limite turbolento a valle dell'onda d'urto.



La variazione della pressione adimensionalizzata rispetto alla pressione totale in ingresso è rappresentata in funzione della distanza assiale adimensionalizzata rispetto alla lunghezza del bump. Si osserva una fase iniziale di accelerazione in cui la pressione si riduce fino a raggiungere approssimativamente la sezione di massimo spessore del bump. Successivamente, si verifica l'onda d'urto seguita da un recupero di pressione che si manifesta attraverso processi diffusivi in regime subsonico. La posizione dell'onda d'urto e l'entità del recupero di pressione sono strettamente correlate allo strato limite. I dati sperimentali sono rappresentati graficamente con dei pallini.

La previsione fornita dalla curva nera, basata sul modello algebrico di Baldwin-Lomax, mostra l'urto in una posizione avanzata, risultando in un'intensità maggiore dell'urto e un significativo recupero di pressione localizzato principalmente nell'urto stesso. Tuttavia, questo modello prevede un modesto recupero di pressione a valle dell'urto, portando a un profilo di pressione notevolmente differente rispetto ai dati sperimentali. Al contrario, la curva rossa, rappresentante il modello di Spalart-Allmaras, evidenzia un miglioramento rispetto al modello di Baldwin-Lomax, con una posizione dell'urto leggermente anticipata e un'intensità e recupero di pressione a valle più fedeli ai risultati sperimentali. Questo modello è particolarmente vantaggioso per la sua singola equazione, che lo rende leggero e robusto dal punto di vista computazionale.

La performance del modello k- ω , rappresentato dalla curva verde, è inferiore nonostante sia un modello a due equazioni. La sua variante Low Re, indicata dalla curva blu, mostra lievi miglioramenti. Per una previsione che si allinea maggiormente ai dati sperimentali, si rivela essenziale l'adozione della formulazione SST, illustrata dalla curva grigia. Quest'ultima anticipa leggermente la posizione dell'urto rispetto ai dati sperimentali ma riproduce con grande precisione l'intensità dell'urto e il successivo recupero di pressione. Un'accuratezza paragonabile si ottiene con il modello k- ω sviluppato da Wilcox nel 2007, che integra funzioni ausiliarie, inclusa la termine di cross diffusion.

semplificative, il tensore degli sforzi di Reynolds può essere espresso come una combinazione lineare di una base di 10 elementi tensoriali al massimo.

Il **tensore degli sforzi di Reynolds** è quindi decomposto in 2 **termini isoentropici**:

- il primo è collegato all'ipotesi di Boussinesq, che impiega la viscosità turbolenta e il tensore di deformazione della velocità relativo alle medie di Reynolds;
- il secondo rappresenta la componente isotropa del tensore di Reynolds stesso.

A questi, Pope ha aggiunto un **tensore anisotropo**.

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = \underbrace{2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}}_{\text{isotropic}} - \underbrace{\rho k a_{ij}}_{\text{anisotropic}} \quad s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Con le equazioni fondamentali del modello di turbolenza stabilite (sia $k - \varepsilon$ che $k - \omega$), i valori di μ_T e k sono noti. Resta da definire a_{ij} , il **tensore anisotropo della turbolenza**, che secondo Pope può essere descritto come una **combinazione lineare dei 10 tensori della base**.

$$a_{ij} = -2\beta^* T^2 \sum_{m=2}^{10} \alpha_m V_{ij}^{(m)} \quad T = \frac{1}{\omega}$$

La sommatoria in questa espressione va dal secondo al decimo termine, poiché i primi due sono già inclusi nella componente isotropa. I tensori della base, V_{ij} , sono legati a una scala temporale della turbolenza T . I vettori V_{ij} possono essere espressi in termini del tensore di deformazione della velocità e del tensore di rotazione, che sono definiti come segue:

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Questo approccio fornisce un quadro robusto per comprendere e modellare la turbolenza, pur tenendo conto delle necessarie semplificazioni che sono state introdotte per trasformare le equazioni differenziali in forme algebriche. Tali semplificazioni sono state ulteriormente affinate nei moderni approcci alla modellazione della turbolenza.

I coefficienti α della combinazione lineare sono determinati principalmente dagli invarianti dei tensori di velocità di deformazione e rotazione, quali traccia, determinante e componenti extra diagonali. Generalmente, non si prendono in considerazione tutti i dieci tensori della base: l'espansione viene comunemente limitata al secondo o terzo termine, sufficienti per includere gli effetti di anisotropia, curvatura e rotazione sulla turbolenza. Ad esempio, considerando unicamente i primi due tensori della base, si formula un modello quadratico che considera l'anisotropia, ma trascura gli effetti di rotazione e curvatura. Tra questi, il modello RQEVm è il più noto. L'introduzione del terzo tensore porta a una chiusura cubica che, oltre all'anisotropia, tiene conto anche di rotazione e curvatura. L'uso degli sforzi algebrici apre la strada all'applicazione del machine learning nei modelli di turbolenza, fornendo un quadro per superare l'ipotesi di Boussinesq e considerare gli effetti dell'anisotropia. Abbandonando le ipotesi modellistiche tradizionali a favore di tecniche di machine learning guidate da risultati high fidelity come LES e DNS, si possono sviluppare modelli di turbolenza estremamente generali, liberi dalle limitazioni delle semplificazioni modellistiche. Utilizzando dati LES o DNS, è possibile addestrare modelli di turbolenza basati sugli sforzi algebrici. Questo approccio di machine learning consente di alimentare il computer con un insieme di dati che, attraverso la regressione, restituisce modelli basati sulle funzioni primitive fornite. Facendo guidare la procedura di regressione da dei risultati high fidelity è possibile ottenere l'espressione degli alpha senza nessuna approssimazione modellistica.

SOMMARIO

| | | |
|---------|--|----|
| 1. | COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS (CFD)..... | 3 |
| 2. | MATHEMATICAL MODELS FOR CFD..... | 6 |
| 2.1. | CONSERVATION EQUATIONS IN INTEGRAL FORM..... | 6 |
| 2.2. | CONSERVATION EQUATIONS IN DIFFERENTIAL FORM..... | 8 |
| 2.3. | NOT-CONSERVATION DIFFERENTIAL EQUATIONS | 10 |
| 2.4. | NAVIER-STOKES EQUATIONS..... | 13 |
| 2.5. | NAVIER-STOKES EQUATIONS IN CURVILINEAR COORDINATES | 15 |
| 2.6. | NAVIER-STOKES EQUATIONS IN ROTATING CURVILINEAR SYSTEM..... | 16 |
| 2.7. | EULER EQUATIONS | 18 |
| 3. | MATHEMATICAL PROPERTIES OF THE EQUATIONS OF FLUID DYNAMICS..... | 20 |
| 4. | BASICS OF FINITE-DIFFERENCE METHODS CONSISTENCY, STABILITY, AND CONVERGENCE OF NUMERICAL METHODS... 26 | |
| 4.1. | CONSISTENCY, STABILITY, AND CONVERGENCE | 27 |
| 4.2. | STABILITY ANALYSIS OF NUMERICAL SCHEMES | 30 |
| 4.3. | COURANT-FRIEDRICHS-LEVY (CFL) CONDITION | 32 |
| 4.4. | UPWIND SCHEMES..... | 33 |
| 5. | THE FINITE VOLUME METHOD..... | 35 |
| 6. | COMPUTATIONAL GRIDS..... | 38 |
| 6.1. | BODY-FITTED GRIDS..... | 38 |
| 6.1.1. | Single block O-type grids..... | 38 |
| 6.1.2. | Single block C-type grids..... | 39 |
| 6.1.3. | Single block H-type grids..... | 40 |
| 6.2. | MESH QUALITY CRITERIA | 41 |
| 6.3. | GRID TOPOLOGIES (SINGLE BLOCK) PROS/CONS..... | 41 |
| 6.4. | MULTIBLOCK STRUCTURED GRIDS | 42 |
| 7. | BOUNDARY CONDITIONS FOR THE NAVIER-STOKES EQUATIONS..... | 43 |
| 7.1. | THE TREATMENT OF BOUNDARY CONDITIONS | 44 |
| 7.2. | INLET AND OUTLET BOUNDARIES..... | 46 |
| 7.3. | WALL BOUNDARY CONDITIONS | 49 |
| 8. | CENTRAL SCHEMES AND ARTIFICIAL DISSIPATION FOR THE EULER AND NAVIER-STOKES EQUATIONS | 50 |
| 8.1. | SECOND-ORDER CENTRAL SCHEMES..... | 51 |
| 8.2. | JAMESON SCHEME FOR ARTIFICIAL DISSIPATION..... | 52 |
| 9. | UPWIND SCHEMES FOR THE EULER AND NAVIER-STOKES EQUATIONS..... | 54 |
| 9.1. | FLUX SPLITTING | 55 |
| 9.2. | ROE SCHEME | 56 |
| 9.3. | HIGHER-ORDER UPWIND SCHEMES..... | 58 |
| 9.3.1. | Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws | 58 |
| 9.3.2. | Total Variation Diminishing Condition..... | 59 |
| 10. | TIME-DEPENDENT METHODS FOR STEADY PROBLEMS | 62 |
| 10.1. | THE TIME-MARCHING CONCEPT..... | 62 |
| 10.1.1. | Runge-Kutta schemes..... | 63 |
| 10.2. | IMPLICIT TIME-INTEGRATION SCHEMES..... | 65 |
| 10.3. | BLOCK SCHEME TIME-DEPENDENT FOR STEADY PROBLEMS..... | 69 |
| 11. | CONVERGENCE ACCELERATION TECHNIQUES FOR STEADY PROBLEMS..... | 70 |
| | | 95 |

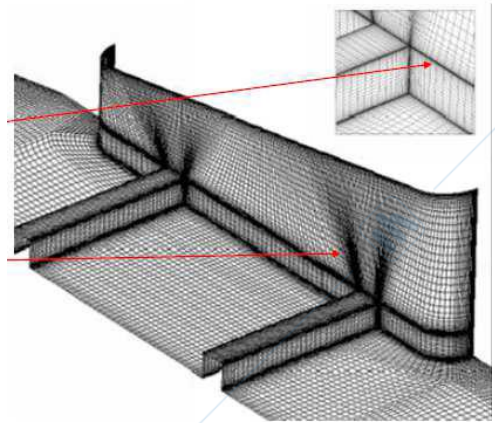
| | |
|---|----|
| 11.1. LOCAL TIME-STEPPING..... | 71 |
| 11.2. MULTIGRID..... | 72 |
| 11.3. RESIDUAL SMOOTHING..... | 73 |
| 12. TIME-DEPENDENT METHODS FOR UNSTEADY PROBLEMS..... | 75 |
| 12.1. DUAL TIME-STEPPING..... | 76 |
| 13. TURBULENCE..... | 78 |
| 13.1. ENERGY CASCADE..... | 79 |
| 13.2. TURBULENT SCALES..... | 80 |
| 13.3. RANS/URANS METHODS..... | 82 |
| 13.4. MODELS BASED ON TRANSPORT EQUATIONS..... | 84 |
| 13.4.1. One-equation Models..... | 84 |
| 13.4.2. Two-equation Models..... | 86 |
| 13.4.3. Reynolds-stress Models..... | 93 |

1. Discretization of NS equations on unstructured grids

Esaminiamo le proprietà delle griglie curvilinee strutturate, che sono essenziali per la creazione di **body fitted mesh**. Queste griglie sono composte da un **unico blocco di elementi esaedrici**, all'interno del quale è possibile effettuare una trasformazione, che consente di convertire una distribuzione uniforme di punti da un dominio quadrangolare a uno curvilineo. Questa metodologia può essere ampliata per includere l'**accoppiamento di più blocchi**, dando vita a ciò che viene definito come **griglie multiblocco strutturate**. L'idea di base è quella di mappare un dominio generico, che sia un volume o una superficie, utilizzando parallelepipedi trattati come blocchi strutturati individuali.

Questo metodo, sebbene complesso, è stato ampiamente adottato per gestire geometrie intricate. Predominante nell'ambito industriale, questa tecnica, nonostante la sua capacità di gestire domini complessi, è piuttosto laboriosa. Infatti, le operazioni di accoppiamento, identificazione dei blocchi del dominio e assegnazione manuale delle tre direzioni possono risultare onerose. Nonostante questi ostacoli, il metodo è apprezzato per la sua capacità di generare griglie di alta qualità in ampie aree, ottimizzando lo skewness e l'aspect ratio degli elementi. Tuttavia, la rappresentazione di caratteristiche geometriche complesse può talvolta introdurre elementi distorti con un elevato aspect ratio in aree non strettamente correlate a una specifica caratteristica geometrica.

Dall'analisi dell'immagine si evince che la struttura grigliata del gradino determina un'espansione non necessaria dell'infillimento della mesh in aree del dominio dove non è richiesto. Questo comporta un inutile consumo di risorse computazionali, rappresentando quindi uno svantaggio dal punto di vista del calcolo. In aggiunta, si riscontra la tendenza a inserire elementi di bassa qualità o con un aspect ratio elevato, che si traduce in una discretizzazione forzata in direzione perpendicolare alla parete, anche in punti distanti da essa dove tale dettaglio non è necessario. Un ulteriore problema emerge quando il dominio presenta complessità tali da ostacolare una suddivisione uniforme in elementi esaedrici, portando talvolta all'impossibilità di realizzare una mesh adeguata del dominio stesso.



Le **griglie strutturate** presentano alcune limitazioni che possono essere evidenziate come segue:

- La configurazione degli elementi nelle aree dove si devono analizzare gli strati limite o risolvere dettagli geometrici di piccole dimensioni rispetto al volume complessivo (tipicamente vicino alle pareti per rilevare le variazioni di gradiente) richiede un **addensamento della mesh**. Questo incremento di densità può avere effetti indesiderati e difficilmente gestibili in altre parti della griglia.
- La creazione di queste griglie rimane un **processo complesso** e **oneroso** in termini di tempo.
- Qualora il dominio del problema non sia mappabile attraverso una forma rettangolare (in 2D) o con esaedri (in 3D), si possono generare **linee di griglia oblique**. Queste linee, non avendo un collegamento diretto con una caratteristica geometrica specifica, possono introdurre variazioni locali non necessarie e potenzialmente problematiche.

Una metodologia intermedia è rappresentata dalle **griglie strutturate a blocchi** con ritaglio cartesiano. Questo metodo consiste nel creare griglie e adattare al contorno del dominio da meshare attraverso l'uso di una serie di griglie cartesiane strutturate regolari. Queste griglie perdono la capacità di essere indicizzate tramite indici strutturati, eliminando così la necessità di una trasformazione dallo spazio cartesiano a quello computazionale. Tuttavia, ogni microblocco conserva una struttura cartesiana e un rapporto di forma adeguato. Tale approccio necessita di una gestione specifica nelle aree chiave del dominio e consente l'impiego di griglie più dettagliate dove è necessaria maggiore risoluzione. In particolare, durante il processo di affinamento della griglia, la discretizzazione non può seguire i metodi convenzionali di interpolazione delle griglie strutturate, poiché si presenta una situazione in cui a una faccia di un elemento sono connessi due elementi anziché uno. Questa anomalia può essere gestita risolvendo individualmente ogni blocco (metodo Block

by block solution), attraverso l'uso di griglie sovrapposte (overlapping grids) o, infine, impiegando elementi poliedrici (polyhedral elements), che rappresentano la soluzione standard per le griglie non strutturate.

Nell'approccio overlapping grids, si considera la griglia complessiva come un insieme di sovrapposizioni di griglie multiple, ciascuna con vari livelli di raffinamento. L'interpolazione tra le griglie viene gestita attivando o disattivando selettivamente le griglie in base alla necessità. Si presume che l'intero dominio sia caratterizzato da diversi livelli di raffinamento e per facilitare lo scambio di dati tra due blocchi, si procede con un'interpolazione tra i livelli di raffinamento corrispondenti nelle due aree interessate. Questo metodo consente di mantenere una gestione strutturata degli elementi, permettendo di utilizzare indici i, j, k per navigare attraverso le griglie sovrapposte.

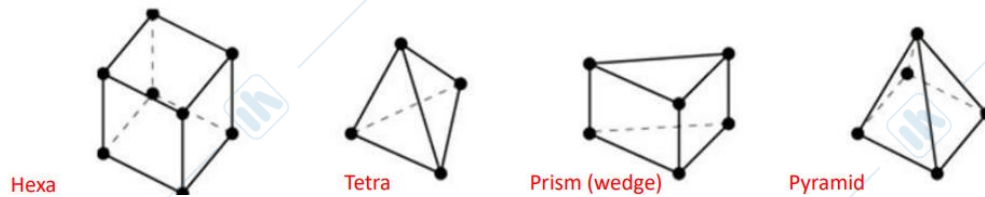
Per quanto riguarda la modellazione che necessita di questo tipo di griglia, un aspetto critico è rappresentato dalla regione in cui una geometria generica interseca la griglia cartesiana, che è orientata secondo un sistema di riferimento non allineato con la superficie del dominio da meshare. Questo incrocio della superficie con la griglia cartesiana introduce una problematica: con l'approccio body fitting, la superficie è stata approssimata e discretizzata posizionando nodi sulla griglia, ma in questo caso, la superficie taglia direttamente la griglia cartesiana. Le strategie possibili sono due:

- Si può **rinunciare ad un body fitted** accurato ovvero a una corrispondenza precisa con la superficie. Si opta per una risoluzione approssimativa della superficie, che non segue il gradiente naturale della superficie, ma piuttosto le direzioni cartesiane del piano intersecato dalla superficie. Tale scelta può essere mitigata attraverso un raffinamento significativo vicino al profilo, tuttavia, questo può portare a delle imprecisioni, come ad esempio, una risoluzione non ottimale dello strato limite nel caso specifico del profilo. Si possono **utilizzare elementi poliedrici** progettati per avere una faccia parallela al profilo della superficie, il che richiede una transizione verso una gestione non strutturata della griglia.
- Si può utilizzare la tecnica dell'**immersed boundary**, che non impiega una condizione di parete tradizionale (che annullerebbe il gradiente), ma piuttosto **modella l'effetto della parete sulle celle adiacenti mediante l'introduzione di termini sorgente**. Questo metodo mantiene la struttura della mesh, identificando le celle influenzate dalla frontiera del dominio e applicando i termini sorgente per simulare gli effetti sulla quantità di moto, energia e altre variabili. Sebbene questa tecnica non raggiunga la precisione del body fitting, è particolarmente vantaggiosa quando le frontiere del dominio sono soggette a variazioni temporali, come nel caso del movimento di un pistone. Questo approccio elimina la necessità di andare a rimeshare il dominio, richiedendo invece di spostare la superficie nello spazio e aggiornare le celle interessate. La gestione della mesh in movimento non comporta lo spostamento fisico della mesh, ma piuttosto il movimento del dominio, mantenendo la mesh fissa nel tempo e nello spazio, offrendo significativi benefici. Inoltre, la semplicità del processo permette che, una volta importata la geometria CAD e definito il sistema di riferimento, la posizione della griglia, il rafforzamento della mesh, l'identificazione degli elementi di interesse e l'inserimento dei termini sorgente possano essere automatizzati. I codici di calcolo definiti come 'meshless' in realtà eseguono questo processo in background.

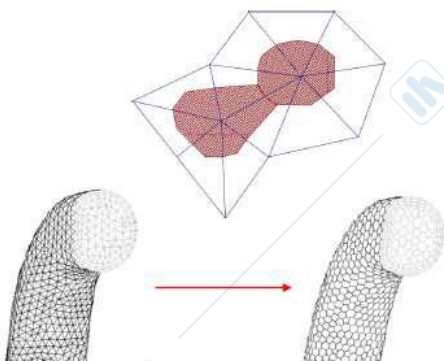
1.1. Unstructured grids

Le **griglie non strutturate** sono composte da una serie di **poliedri** posizionati in modo arbitrario, senza una struttura implicita di linee di livello che definiscono le coordinate dei nodi. Questo approccio non richiede di seguire una sequenza prestabilita nella disposizione degli elementi, offrendo il vantaggio di poter posizionare gli elementi in maniera flessibile per una discretizzazione efficace e per rappresentare accuratamente le caratteristiche geometriche di interesse. L'impiego di **mesh con refinement localizzato** consente di ridurre significativamente il numero di celle necessarie, indipendentemente dalla forma geometrica degli elementi della griglia. Questo metodo permette di discretizzare volumi di controllo generici con un numero arbitrario di celle adiacenti, posizionando elementi bidimensionali in un punto o elementi tridimensionali lungo una linea del dominio. La gestione dei dati e delle informazioni geometriche per la discretizzazione avviene assegnando a ciascun elemento della griglia un indice univoco. Questa numerazione deve includere informazioni aggiuntive relative alle coordinate dei nodi nell'ambito del sistema di riferimento cartesiano utilizzato, nonché una lista dettagliata di come queste informazioni sono memorizzate. È fondamentale disporre delle

informazioni relative ai nodi che formano le facce delle celle e delle liste delle celle che condividono le stesse facce, necessarie per la discretizzazione della mesh. Questo processo consente la creazione di mesh ibride, combinando elementi di diverse forme, come illustrato negli esempi tipici forniti sotto:



Per una rappresentazione più accurata degli strati limite, si adotta comunemente un approccio ibrido nella discretizzazione del volume di controllo. Inizia con l'utilizzo di un **tetraedro**, che viene successivamente combinato con **prismi** per formare la frontiera dei volumi. Questa tecnica permette di affinare la risoluzione degli strati limite. La discretizzazione esclusiva mediante tetraedri vicino alle pareti potrebbe portare a un allineamento non ottimale delle facce degli elementi rispetto alla superficie, compromettendo la ricostruzione algebrica dei gradienti delle grandezze fisiche. I gradienti raggiungono il loro picco in direzione perpendicolare alla parete; quindi, è essenziale che gli elementi discretizzati siano tangenti alla parete, con i nodi posizionati lungo una linea parallela alla superficie. Per migliorare la precisione della mesh e controllare l'altezza della prima cella adiacente alla parete, si procede con l'ibridazione dei tetraedri destinati al flusso libero con elementi prismatici per la discretizzazione dello strato limite. Questo processo non solo affina l'accuratezza della mesh ma consente anche un controllo più dettagliato sul numero di elementi all'interno dello strato limite, migliorando significativamente la risoluzione del flusso vicino alla parete.



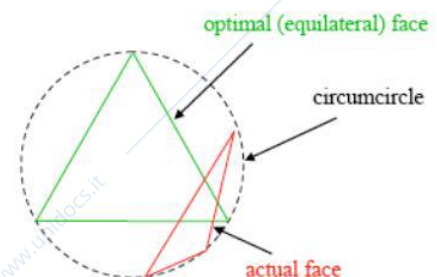
La **generazione di elementi poliedrici** inizia con una **base tetraedrica**, posizionando il **baricentro del poliedro** sul **nodo di convergenza** dei tetraedri e formando le **facce poliedriche** perpendicolari ai tetraedri. Tale metodologia, integrata con schemi di interpolazione precisi, consente di preservare un'alta precisione nella discretizzazione finale, riducendo, allo stesso tempo, il numero di elementi della mesh in un rapporto di 3:1. Sebbene questo processo non influenzi significativamente la velocità, dato che l'aumento del numero di facce comporta maggiori richieste di memoria per lo storage delle grandezze, offre il vantaggio di elementi isotropi, cioè con un rapporto di forma unitario.

L'uso di **elementi poliedrici**, come quelli impiegati in OpenFoam, comporta una **maggiore complessità nella connettività** interna tra gli elementi. Tuttavia, questo approccio **facilita la creazione di mesh** per oggetti con geometrie complesse. Il principale vantaggio degli elementi poliedrici risiede nella loro estrema flessibilità durante la transizione tra diverse dimensioni degli elementi, oltre alla semplificazione nella formulazione delle equazioni in termini integrali, grazie alla **corrispondenza tra il volume finito di discretizzazione e quello dell'elemento esaedrico**. Un inconveniente significativo è l'aumento della memoria necessaria per lo storage, dovuto all'imprevedibilità del numero di facce degli esaedri.

1.2. Mesh quality assessment

Per valutare quantitativamente la **qualità di una mesh**, è essenziale estrarre **parametri numerici specifici**. Tra questi, il primo parametro considerato per gli elementi triangolari in 2D o tetraedrici in 3D è lo **skewness**, che si può calcolare in due modi:

- **Equilateral volume (area) deviation**: si prende in considerazione la circonferenza che inscrive l'elemento (ad esempio, un triangolo evidenziato in rosso nell'immagine) e si definisce al suo interno il triangolo



equilatero. Lo skewness è determinato dalla **differenza di volume o area** tra il triangolo equilatero e quello reale, normalizzata rispetto all'area del triangolo equilatero ideale.

$$\text{Skewness} = \frac{\text{Ideal face area} - \text{actual face area}}{\text{Ideal face area}}$$

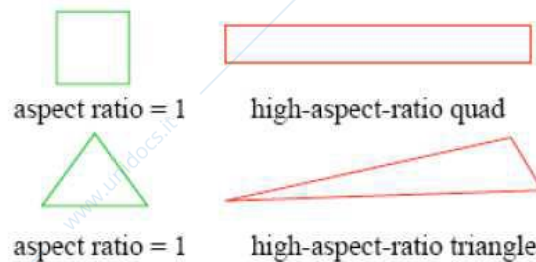
Uno skewness di **0** indica un **elemento ideale**, corrispondente a un triangolo equilatero, mentre uno skewness di **1** indica una **degenerazione completa** della forma dell'elemento.

- **Normalized equiangular deviation:** si confrontano gli angoli del triangolo equilatero con quelli dell'elemento in esame. Questo metodo, però, è più adatto per elementi non triangolari come prismi ed esaedri.

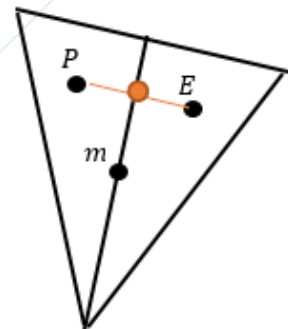
Un altro indicatore cruciale è l'**aspect ratio**, che, aumentando, indica una maggiore distorsione dell'elemento.

Per una **mesh di qualità ottimale**, generalmente si richiede:

- Uno skewness inferiore a 0.95. Con uno skewness pari a 1, si hanno elementi completamente degenerati.
- Un aspect ratio inferiore a 100, che è particolarmente difficile da raggiungere per gli elementi adiacenti alle pareti.
- Volumi negativi, che sono il risultato di celle degenerate.



I due parametri in questione sono cruciali e influenzano significativamente la qualità della mesh. Per comprendere meglio il loro ruolo, consideriamo un esempio: se i centroidi degli elementi coincidono con il baricentro di ciascun elemento, durante il processo di discretizzazione si determina il valore di una grandezza scalare arbitraria, disponibile sui centroidi e sulla faccia che li separa. Questo richiede l'uso di un'interpolazione dei valori scalari. Tuttavia, se dobbiamo stimare il valore scalare nel punto medio della faccia, e lo facciamo interpolando tra i valori ai centroidi, una **forte skewness** dell'elemento può deteriorare notevolmente l'approssimazione. Al contrario, in triangoli equilateri ideali con **skewness nulla**, il punto mediano che unisce i centroidi coincide geometricamente con il centroide della faccia stessa, garantendo una migliore approssimazione. Questo non si verifica in presenza di elevata skewness.



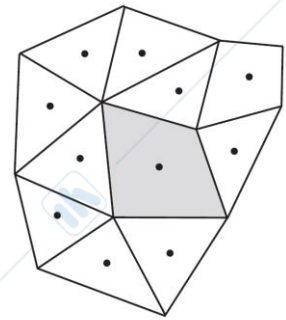
Per quanto riguarda l'**aspect ratio**, se questo è **elevato lungo una direzione**, tipicamente su una parete, i gradienti mostreranno valori predominanti nella direzione perpendicolare alla faccia. In questa situazione, nonostante un elevato aspect ratio, l'approssimazione non subisce distorsioni perché la skewness rimane inalterata, permettendo così un calcolo accurato delle grandezze.

1.3. Discretization on unstructured grids

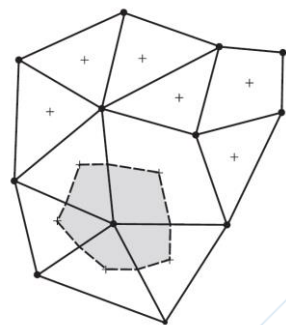
Nell'ambito della **discretizzazione delle equazioni di Navier-Stokes (NS)** per **griglie non strutturate**, è fondamentale monitorare le coordinate cartesiane dei nodi delle celle, a causa dell'assenza di regole logiche e implicite che governano la disposizione e il controllo degli elementi. Quando si procede con la discretizzazione su griglie non strutturate, è necessario definire il **volume di controllo** per l'**approssimazione integrale delle equazioni di NS**.

Esistono 2 metodologie principali per stabilire il volume di controllo in mesh non strutturate:

- La prima strategia, denominata "**Cell-centred control volumes**", impiega il **centroide** di ogni cella della mesh come punto di discretizzazione. Ogni volume di controllo corrisponderà ad una singola cella della mesh ed il punto di discretizzazione dove verranno salvate le grandezze sarà il centroide della cella. Le facce delle celle, su cui si calcolano i flussi per ottenere i bilanci del volume di controllo tipici della discretizzazione dei volumi finiti, rappresentano l'elemento chiave di questo metodo, ovvero la frontiera di ogni volume di controllo. Questo approccio è relativamente semplice da implementare e richiede una quantità limitata di memoria per lo storage delle informazioni. Tuttavia, la sua precisione può essere compromessa da una significativa skewness e da una qualità generale bassa della mesh.
- La seconda strategia, nota come "**Vertex-centred control volumes**", si basa sulla centralizzazione del volume di controllo su uno dei **vertici** della mesh, intorno al quale si aggregano diversi elementi. Il volume di controllo viene ricostruito attraverso la creazione di sottovolumi mediante il processo di median-dual tessellation, che coinvolge celle adiacenti allo stesso vertice. Questo metodo è simile a quello utilizzato per le mesh poliedriche, poiché la poliedricità viene applicata non tanto nella visualizzazione geometrica della mesh, quanto nel processo di discretizzazione finale. Tale approccio riduce la dipendenza dalla qualità della mesh e incrementa l'accuratezza della discretizzazione, ma comporta una maggiore complessità implementativa e un aumento dei requisiti di memoria.



(a)



(b)

1.3.1. FV discretization

Il caso maggiormente utilizzato è il **Cell-centred control volumes**. Nell'ambito della discretizzazione di un volume di controllo seguendo un approccio cell-centered, si considera l'**equazione di trasporto** per una **variabile scalare generica** ϕ . Questa equazione descrive come ϕ si conservi all'interno del volume di controllo e può essere espressa come segue:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi$$

Integrando questa equazione sul volume di controllo, otteniamo:

$$\int_{CV} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)dV + \int_{CV} \text{div}(\rho\phi\mathbf{u})dV = \int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi)dV + \int_{CV} S_\phi dV$$

Applicando il Teorema di Gauss ($\int_{CV} \text{div } a dV = \int_A \mathbf{n} \cdot a dA$), che ci permette di trasformare integrali di volume in integrali di superficie, possiamo derivare le equazioni di Navier-Stokes (NS) in forma analitica, che sono il punto di partenza per la discretizzazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \rho\phi dV \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$

Rate of increase of ϕ + Net rate of decrease of ϕ due to convection across the boundaries = Rate of increase of ϕ due to diffusion across the boundaries + Net rate of creation of ϕ

Il **primo termine** dell'equazione rappresenta la **variazione temporale di ϕ** (termine evolutivo), indicando come questa aumenti o diminuisca nel tempo. Il **secondo termine** è quello **convettivo**, che tiene conto del trasporto di ϕ attraverso il volume di controllo a causa del campo di velocità. Il **primo termine sul lato destro** dell'equazione descrive il **tasso di diffusione** di ϕ attraverso le facce del volume di controllo, proporzionale al coefficiente di diffusività, che varia a seconda

della proprietà fisica considerata (ad esempio, la viscosità per un fluido newtoniano o il coefficiente di diffusività termica per il trasporto di calore). Infine, l'**ultimo termine** rappresenta la **sorgente** o il sink di ϕ , dovuto a reazioni chimiche o cambiamenti di fase che possono avvenire all'interno del volume di controllo.

L'obiettivo è convertire le equazioni dalla loro **forma analitica** a quella **discreta**, focalizzandosi su un sistema bidimensionale per una maggiore chiarezza. Anche se la griglia sembra strutturata, verrà trattata come se fosse non strutturata. Il punto P rappresenta il centroide di riferimento per la discretizzazione. I punti E, N, W e S indicano i centroidi delle celle vicine, mentre le lettere minuscole n, e, w e s denotano i valori dei centroidi sulle facce che circoscrivono il volume di controllo.

I **volumi elementari** sono legati al valore nel punto P, e i contributi ai confini emergono dalla somma dei flussi convettivi e diffusivi su tutte le facce della griglia. Ogni confine del volume di controllo (CV) è definito da linee bidimensionali (o facce piane nel caso tridimensionale), e gli integrali su queste linee (o superfici) sono generalmente approssimati con formule algebriche. Considerando una **funzione generica f** e una **linea generica k** (o faccia n, w, s, e, che rappresentano i valori dei centroidi sulle facce delimitanti il volume di controllo), si può derivare:

$$\int_A f dA = \sum_k^{n \text{ faces}} \int_{A_k} f dA_k \quad \text{with} \quad \int_{A_k} f dA_k = \bar{f}_k A_k \approx f_k A_k \qquad \int_V f dV = \bar{f} V \approx f_P V$$

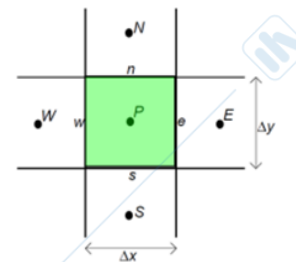
Surface integrals **Volume integrals**

In questo modo, l'**integrale di superficie** viene approssimato tramite una **somma di contributi dalle varie facce**.

Questo processo porta alla seguente formulazione dell'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \rho \phi dV \right) + \int_A \rho \phi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_A \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dA + \int_V S_\phi dV$$

$$\left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_P \cdot V + \sum_k A_k \rho U_{nk} \phi_k = \sum_k A_k \Gamma_k (\nabla \phi)_k + S_{\phi,P} \cdot V$$



Iniziamo considerando il **caso stazionario**, dove il **termine evolutivo** viene omissso assumendo che il valore dello scalare in esame sia costante.

~~$$\left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_P \cdot V + \sum_k A_k \rho U_{nk} \phi_k = \sum_k A_k \Gamma_k (\nabla \phi)_k + S_{\phi,P} \cdot V$$~~

Per risolvere l'equazione in questione, è necessario:

- Determinare il **gradiente dello scalare** sulla **faccia k** di interesse. Questo permetterà di calcolare la somma dei **contributi diffusivi** che influenzano il bilancio del volume di controllo.
- È inoltre essenziale calcolare il **valore dello scalare ai bordi** per quantificare il **contributo convettivo**, ossia il trasferimento dello scalare all'interno o all'esterno del volume di controllo a causa del campo di velocità noto.

Utilizzando l'approccio cell-centered, si farà affidamento sui valori presenti nei centroidi delle celle adiacenti alla cella incognita per ottenere una stima approssimativa dei valori necessari.

1.3.2. Discretization: diffusive term

Procedendo, analizziamo il **caso puramente diffusivo**. In questa situazione, l'equazione è governata esclusivamente dai termini diffusivi, senza l'influenza di termini convettivi o evolutivi.

Nell'analisi di un **caso bidimensionale di diffusione pura**, dove il **numero di Peclet** è vicino allo 0, è possibile stimare il gradiente di una variabile scalare su una faccia arbitraria utilizzando un approccio di differenze finite. Questo metodo si basa sui valori scalari nei centroidi delle celle adiacenti alla faccia in esame. Utilizzando il **metodo di Gauss** per la ricostruzione del gradiente, si ottiene una stima lineare che può essere espressa come segue:

⇒ Γ is the diffusivity coefficient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S = 0$$

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta V = 0$$

Il **gradiente** può essere approssimato sulle facce del CV come:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w &= \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n &= \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s &= \frac{\phi_S - \phi_P}{\Delta y} \end{aligned}$$

Generalizzando nel caso 3D

alla faccia "e"

$$\left(\nabla \phi \right)_e = - \frac{1}{C_E - C_P} \phi_P + \frac{1}{C_E - C_P} \phi_E$$

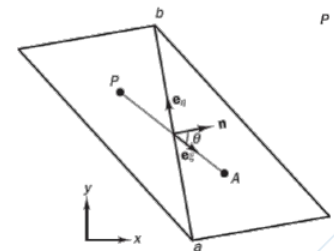
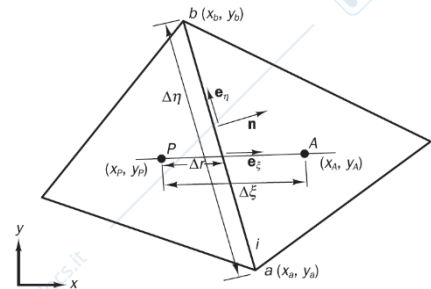
Linear Gauss method

C è la coordinata del generico centroide

Tuttavia, se la **griglia non è perfettamente cartesiana** e presenta una certa **skewness**, la **discretizzazione** lineare del gradiente lungo la linea che collega i centroidi P e A è **accurata** solo se tale linea è allineata con la normale alla faccia. In una griglia ortogonale, questa condizione è soddisfatta, ma nelle griglie reali spesso non lo è. Per correggere l'errore introdotto dalla non ortogonalità, si introduce un **termine di cross-diffusione**, che compensa la diffusione numerica indesiderata:

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad } \phi \Delta A_i = \underbrace{\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \Delta A_i}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\xi} \frac{\phi_A - \phi_P}{\Delta \xi}}_{\text{Direct gradient term}} - \underbrace{\frac{\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\eta \Delta A_i}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\xi} \frac{\phi_b - \phi_a}{\Delta \eta}}_{\text{Cross-diffusion term}}$$

Questa correzione assicura che la stima del gradiente sia più accurata e rappresentativa del fenomeno fisico in esame, anche in presenza di griglie non ortogonali.



1.3.3. Discretization: convective term

Un aspetto cruciale che incide significativamente sul processo di discretizzazione è il calcolo e l'**approssimazione del termine convettivo**, essenziale per determinare il **flusso di massa** attraverso la superficie dello scalare. Esistono diversi metodi di discretizzazione per questo termine: dallo schema upwind di primo ordine, allo schema upwind di secondo ordine, fino agli schemi di differenze centrate di secondo ordine e allo schema upwind di terzo ordine. La **selezione dello schema di discretizzazione** dipende dall'**accuratezza desiderata** e dalla **qualità della mesh**: una **mesh** più **grossolana** richiederà schemi di ordine superiore per compensare. Inoltre, la stabilità numerica imposta dallo schema di discretizzazione deve essere considerata in relazione al problema specifico da risolvere. Può essere vantaggioso utilizzare la dissipazione numerica introdotta da ogni schema di discretizzazione, poiché l'errore di troncamento intrinseco può comportarsi come un damping numerico. Questo può essere benefico per la stabilizzazione della soluzione, purché non comprometta la fisicità della soluzione stessa.

1.3.4. Accuracy of discretization

L'espansione in serie di Taylor, quando troncata al primo ordine, rivela che l'errore associato a una funzione generica, calcolato mediante una differenza in avanti, è direttamente proporzionale al Δx , che rappresenta la distanza tra i punti della griglia. Di conseguenza, l'errore diminuisce linearmente con la riduzione della dimensione della mesh.

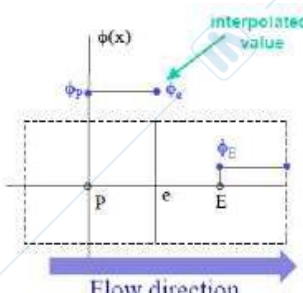
$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

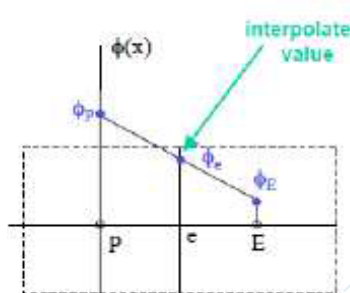
Invece, utilizzando metodi di calcolo di secondo ordine, l'errore diventa proporzionale al quadrato del Δx . Questo significa che, ad esempio, dimezzando la dimensione della mesh, l'errore si riduce di un fattore di quattro.

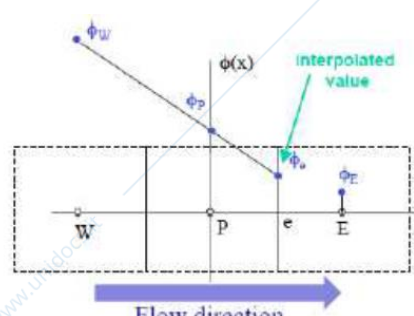
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

1.3.5. Discretization schemes

Il nostro obiettivo è calcolare il valore scalare ϕ sui centroidi delle facce. Per raggiungere questo scopo, si utilizzano diversi schemi di discretizzazione che vengono selezionati in base al grado di precisione desiderato. Esaminiamo come si applicano questi schemi:

- Upwind di 1° ordine:** Questo schema prevede una discretizzazione che tiene conto della **direzione di sviluppo del flusso**. Il valore di ϕ_e viene calcolato direttamente dal valore di ϕ_p , senza interpolazioni lineari, prendendo il valore presente nel centroide a monte rispetto al valore centrale. Questo metodo dipende dalla **direzione del flusso** e richiede la conoscenza della sua **distribuzione locale**. Tuttavia, offre vantaggi significativi, come una **robusta stabilità numerica**, evitando l'introduzione di oscillazioni nel processo di discretizzazione, un problema comune negli schemi a differenze centrate. Questi ultimi, basandosi su derivate di ordine pari e considerando i valori a destra e a sinistra, sono influenzati dagli eventi precedenti e successivi, portando a un'iterazione sbilanciata che può oscillare tra due soluzioni apparentemente stabili. Al contrario, lo schema upwind, grazie alla sua natura altamente dissipativa, elimina la tendenza all'oscillazione.
 

The diagram shows a 1D grid with nodes P, e, and E. A blue arrow labeled 'Flow direction' points to the right. A graph above shows the scalar field $\phi(x)$ with a constant value ϕ_p at node P and a higher value ϕ_e at node e. The value at node E is also ϕ_p . A green arrow points to ϕ_e with the label 'interpolated value'.
- Differenze centrate di 2° ordine:** In questo schema, l'ordine di discretizzazione è legato **all'errore proporzionale al Δx** , ovvero allo spazio tra i punti della griglia. L'approssimazione è **lineare** e il valore di ϕ_e dipende dai valori dei centroidi sia a monte che a valle. Non è necessario conoscere la direzione del flusso, il che rende lo **schema simmetrico** nella sua implementazione. Inoltre, riduce la **dissipazione numerica**. Tuttavia, questo schema è incline a generare **instabilità** e **oscillazioni**, specialmente in presenza di forti gradienti dello scalare ϕ , comportandosi in modo oscillatorio e influenzando i valori a causa di tali gradienti.
 

The diagram shows a 1D grid with nodes P, e, and E. A graph above shows the scalar field $\phi(x)$ with values ϕ_p at node P and ϕ_e at node e. A green arrow points to ϕ_e with the label 'interpolated value'.
- Upwind di 2° ordine:** Il valore viene recuperato non solo dal centroide più vicino a monte della faccia in esame, ma anche dai due centroidi a monte. Questo permette di procedere con un'**approssimazione lineare** che incrementa l'**accuratezza** dello schema al secondo ordine. Sebbene questa tecnica mantenga le problematiche legate alla dipendenza dalla direzione del flusso, essa riduce notevolmente la **dissipazione numerica**. Tuttavia, si perde una caratteristica cruciale degli schemi di 1° ordine: la loro **natura "bounded"**. In altre parole, l'approssimazione algebrica dell'equazione non compromette il fatto che lo scalare rimane confinato tra due valori estremi, i quali
 

The diagram shows a 1D grid with nodes W, P, e, and E. A blue arrow labeled 'Flow direction' points to the right. A graph above shows the scalar field $\phi(x)$ with values ϕ_w at node W, ϕ_p at node P, and ϕ_e at node e. A green arrow points to ϕ_e with the label 'interpolated value'.

sono determinati dal significato fisico dello scalare stesso. La questione è se la funzione algebrica utilizzata per approssimare le equazioni sia capace di mantenere il valore fisico dello scalare confinato entro i suoi limiti naturali, come ad esempio tra 0 e 1 nel caso di una concentrazione, o più generalmente, tra i valori estremi definiti dalle condizioni al contorno. In presenza di forti gradienti, lo schema potrebbe generare **overshoot** o **undershoot**, ovvero valori che superano o sono inferiori ai limiti teorici dello scalare. Questo rischio aumenta con l'incremento dell'ordine di discretizzazione e non è garantito da uno schema upwind di secondo ordine, specialmente in presenza di mesh di bassa qualità o di forti gradienti.

- **Metodo Quick di 3° ordine:** il problema del mantenimento dei valori entro i limiti teorici diventa ancora più significativo. Questo approccio riduce ulteriormente la dissipazione numerica e opera indipendentemente dalla direzione del flusso. Il valore dello scalare viene determinato interpolando parabolicamente i valori della grandezza ϕ dei centroidi delle celle a monte e nel centroide successivo.

L'impiego di **schemi di approssimazione di ordine superiore** al primo è generalmente vantaggioso per **accrescere la precisione** e **minimizzare la dissipazione numerica**. Tuttavia, questo approccio può portare a una **maggiore instabilità nei calcoli**, manifestandosi attraverso l'emergere di oscillazioni e la possibile violazione dei limiti fisici della soluzione.

Per analizzare più approfonditamente queste dinamiche, è utile introdurre un parametro adimensionale noto come **numero di Peclet**. Questo numero stabilisce un rapporto tra il **flusso convettivo** F e quello **diffusivo** D lungo il confine del volume di controllo considerato.

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma / \delta x} \quad \begin{array}{l} \rightarrow Pe \rightarrow 0 : \text{pure diffusion} \\ \rightarrow Pe \rightarrow \infty : \text{pure convection} \end{array}$$

È fondamentale osservare che il numero di Peclet è influenzato dalla dimensione della mesh: diminuendo significativamente la grandezza della griglia, ci si avvicina alla scala molecolare, risultando in un flusso prevalentemente diffusivo lungo il confine del volume di controllo. Questa osservazione sottolinea l'importanza della dimensione della mesh nella determinazione delle caratteristiche del flusso all'interno del sistema studiato.

In ambito di fenomeni di trasporto, consideriamo un **problema di convezione-diffusione monodimensionale**, caratterizzato da dimensioni finite e maggiori rispetto a quelle molecolari. Analizziamo un flusso unidirezionale lungo l'asse x , con velocità costante u e un campo scalare ϕ che si diffonde da una condizione iniziale $\phi = 1$ a una finale $\phi = 0$. In ogni cella del dominio considerato, si osserva un flusso diretto lungo x , generato dal gradiente di ϕ , che comprende sia una componente convettiva, dovuta alla velocità, sia una diffusiva.

$$\Rightarrow L=1.0 \text{ m}, \rho=1.0 \text{ kg/m}^3, \Gamma=0.1 \text{ kg/m/s}$$

⇒ Case 1:

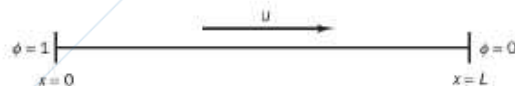
→ $u=0.1 \text{ m/s}$, coarse grid

⇒ Case 2

→ $u=2.5 \text{ m/s}$, coarse grid

⇒ Case 3

→ $u=2.5 \text{ m/s}$, fine grid

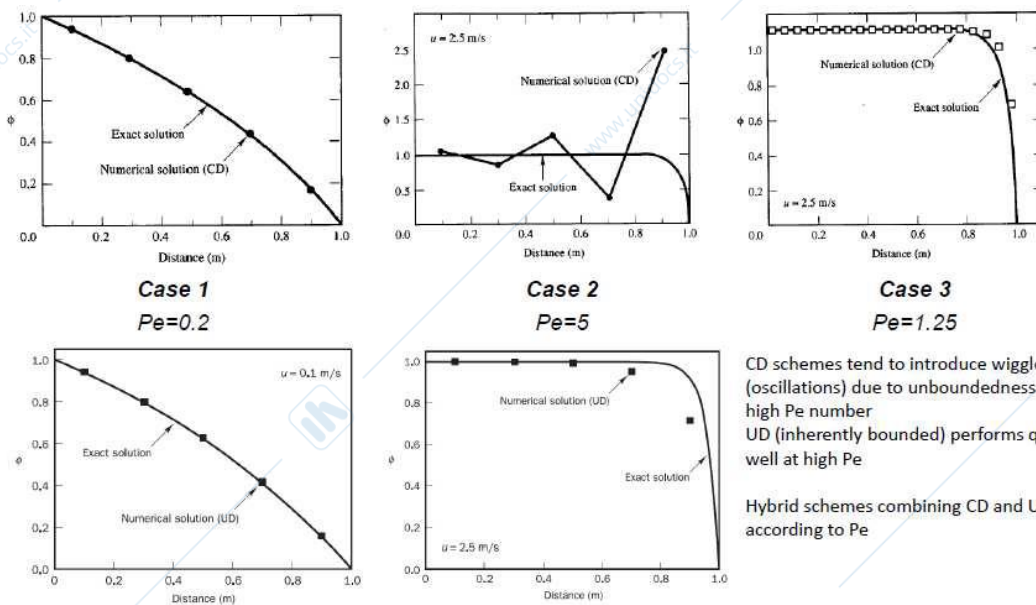


$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(\rho u x / \Gamma) - 1}{\exp(\rho u L / \Gamma) - 1} \quad \text{Analytic solution}$$

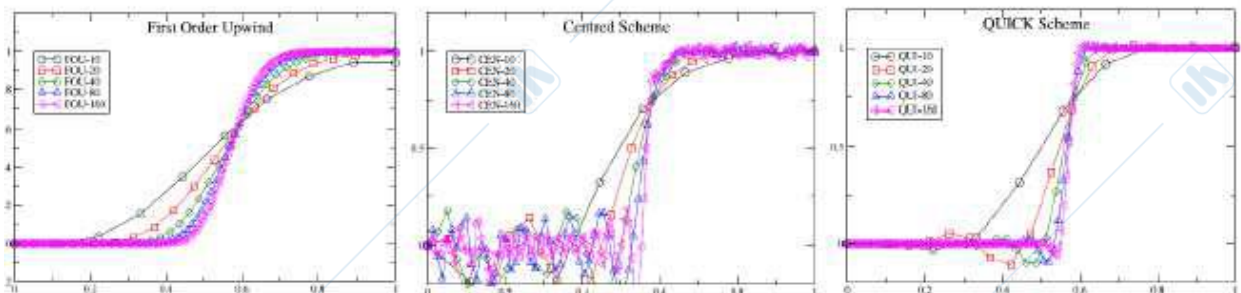
Esaminiamo il problema attraverso 3 scenari distinti, utilizzando una griglia rada (coarse grid). Avendo a disposizione una soluzione analitica, confrontiamo i risultati ottenuti con diversi schemi numerici:

- la differenza centrale (CD)
- l'Upwind di primo ordine (UD).

- Nel **primo scenario**, entrambi gli schemi numerici approssimano efficacemente il problema, riproducendo con precisione il flusso analitico.
- Nel **secondo scenario**, con l'aumento della velocità, il contributo convettivo diventa predominante rispetto a quello diffusivo (aumento del numero di Peclet, Pe). Utilizzando il metodo CD, si osserva un fenomeno di unbounding, con valori di ϕ che raggiungono il 2.5, un risultato fisicamente inaccettabile date le condizioni al contorno $\phi = 1$ e $\phi = 0$, compromettendo la conservazione fisica del trasporto scalare. Questo comportamento oscillatorio è attribuibile alla natura delle differenze pari utilizzate nello schema. Al contrario, il metodo Upwind, pur essendo meno accurato, mantiene il bounding, non superando il valore di $\phi = 1$ né scendendo sotto $\phi = 0$, anche se non riproduce perfettamente il gradiente scalare.
- Nel **terzo scenario**, con un aumento del raffinamento della griglia, lo schema CD dimostra un'accuratezza quasi perfetta, evidenziando l'importanza di una griglia adeguatamente raffinata per ottenere risultati numerici precisi.



Dall'analisi emerge che lo **schema di differenziazione centrale (CD)** tende a favorire un comportamento oscillante, specialmente in presenza di un numero di Peclet (Pe) elevato. Questo può essere il risultato di una griglia di calcolo particolarmente rada o di flussi caratterizzati da numeri di Mach molto alti. Al contrario, uno **schema di tipo Upwind** mostra prestazioni superiori in termini di stabilità, mantenendo un controllo efficace anche con valori di Pe elevati. Queste osservazioni suggeriscono la possibilità di adottare schemi di discretizzazione ibridi, i quali permetterebbero un passaggio dinamico da uno schema CD a uno Upwind in base al valore locale del numero di Pe . Tale approccio ibrido potrebbe offrire un equilibrio ottimale tra accuratezza e stabilità nella simulazione di flussi fluidodinamici.



Come osservato nei grafici precedenti, l'analisi condotta evidenzia le problematiche di interpolazione in una mesh cartesiana semplice, dove l'iniezione di due differenti valori di temperatura lungo la diagonale del quadrato mette in crisi il processo di interpolazione. Questo è particolarmente evidente quando non si ha una faccia della mesh allineata con la direzione del flusso, portando a errori significativi nell'interpolazione. In un contesto di pura convezione, senza

diffusione, ci si aspetterebbe che i due flussi di temperatura rimangano distinti, mantenendo una netta discontinuità. Tuttavia, l'assenza di un flusso convettivo efficace nella direzione normale alla componente di velocità principale impedisce il trasporto dello scalare.

Gli schemi di discretizzazione possono introdurre un errore sotto forma di falsa diffusione, ovvero contributi spuri dovuti al troncamento della discretizzazione, che sono amplificati quando il flusso non è normale alle facce della mesh. Questo porta allo sviluppo di componenti di velocità non fisiche che mimano l'effetto di una diffusione, trasportando la temperatura da una regione all'altra. Si nota che uno schema di discretizzazione di primo ordine su una mesh grossolana può dare l'impressione di un comportamento diffusivo. Incrementando l'ordine dello schema e affinando la griglia, questo effetto si riduce. Matematicamente, ciò corrisponde alla risoluzione di un problema a gradino: uno schema di primo ordine non mostra oscillazioni ma approssima in modo inaccurato il gradino, mentre schemi di secondo ordine e quick, nonostante siano oscillatori, rappresentano fedelmente il gradino, approssimando un gradiente quasi infinito.

2. Pressure –Velocity coupling

In questa sezione, verranno espone diverse strategie per risolvere le **equazioni fondamentali** che governano i flussi più frequentemente incontrati in ambito industriale, ovvero quelli caratterizzati da **fluidi incompressibili** o **compressibili ma con numeri di Mach molto ridotti**. Nei casi di flusso incompressibile o con minime variazioni di densità, rispetto alla velocità del flusso in esame, non è più adeguato adottare un approccio basato sulla densità. In tali situazioni, si verifica la perdita di **barotropicità**, ovvero la diretta correlazione tra pressione e densità.

Per i flussi compressibili, l'equazione di continuità può essere utilizzata come un'equazione di trasporto, mentre nei flussi incompressibili (o a bassi numeri di Mach dove il gradiente di pressione rispetto alla densità tende a zero), il legame tra densità e pressione non è più assicurato dall'equazione di stato, ma la densità diventa una funzione esclusiva della temperatura.

Un esempio significativo è rappresentato dal flusso reattivo in una camera di combustione, dove si registrano numeri di Mach estremamente bassi, ma la densità varia considerevolmente a causa delle fluttuazioni di temperatura.

x-momentum equation

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u$$

y-momentum equation

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial y}) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v$$

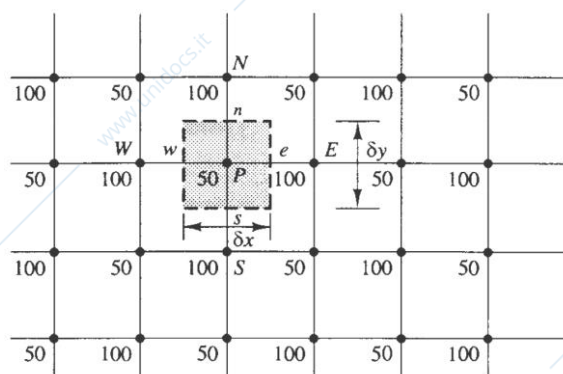
continuity equation

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

L'analisi delle equazioni di governo rivela immediatamente che i **termini convettivi** sono caratterizzati da relazioni intensamente **non lineari**. È evidente, inoltre, che le equazioni risultano **interconnesse** attraverso le **componenti di velocità** e i **gradienti di pressione**. Quest'ultima, essendo priva di una propria equazione di trasporto, non può essere direttamente determinata. L'obiettivo principale è quindi stabilire un **campo di pressione adeguato** che, in concomitanza con l'applicazione dell'equazione della quantità di moto,

assicuri la conservazione della massa. La separazione tra il campo di pressione e quello di velocità può generare incongruenze nella memorizzazione di queste variabili sui nodi della griglia, compromettendo la solidità della soluzione. Un metodo iniziale per affrontare questo problema consiste nell'esaminare su una **griglia ordinata** gli **effetti di una distribuzione** ipotetica della **pressione**, che segue un **modello a scacchiera**.

Si procede alla **discretizzazione del campo di pressione** in ciascun nodo della griglia computazionale. Questo processo consente di ottenere una rappresentazione approssimata, ma efficace delle variazioni di pressione all'interno del dominio di interesse. Attraverso l'impiego di un **volume di controllo centrato su ciascun nodo**, si dispongono dei valori di pressione necessari per calcolare la **distribuzione di velocità** corrispondente. È importante notare che la distribuzione di pressione utilizzata a scopo illustrativo non riflette una situazione fisica reale, ma serve piuttosto a evidenziare il fenomeno del disaccoppiamento tra pressione e velocità.



Per determinare la **velocità** in un **punto specifico**, come il punto P, è essenziale calcolare il **gradiente di pressione** sulla faccia del volume di controllo. Questo può essere realizzato mediante **interpolazione** dei valori di pressione disponibili, ad esempio, tra i punti w ed e per la componente u della velocità, e tra i punti n ed s per la componente v. Tuttavia, un problema comune nelle discretizzazioni è la possibilità di ottenere un **gradiente di pressione nullo**, che non è fisicamente plausibile e può portare a risultati errati.

La corretta rappresentazione dei gradienti di pressione è cruciale, poiché se le velocità fossero definite sugli stessi nodi delle pressioni, l'**influenza dei gradienti potrebbe non essere adeguatamente catturata dalle equazioni discrete**. Questo porta allo sviluppo di campi di pressione e velocità che, sebbene possano soddisfare le equazioni dal punto di

vista numerico, non possiedono una corrispondenza fisica. In realtà, ci si aspetterebbe che la velocità si sviluppi attraverso la faccia del volume di controllo, e non esclusivamente sui nodi.

Per affrontare il problema in questione, si può adottare la tecnica dello **staggering**. Questo metodo consiste nel **memorizzare** la pressione e le **componenti della velocità** in **nodi differenti** della griglia di calcolo.

- Si possono registrare le **grandezze scalari** come la pressione, la densità e la temperatura nei **punti nodali** (marcati con \cdot);
- Mentre le **componenti della velocità** possono essere memorizzate nei **centroidi delle facce** (marcati con il simbolo $\uparrow\downarrow$) della griglia: le componenti verticali della velocità sulle facce verticali e quelle orizzontali sulle facce orizzontali.

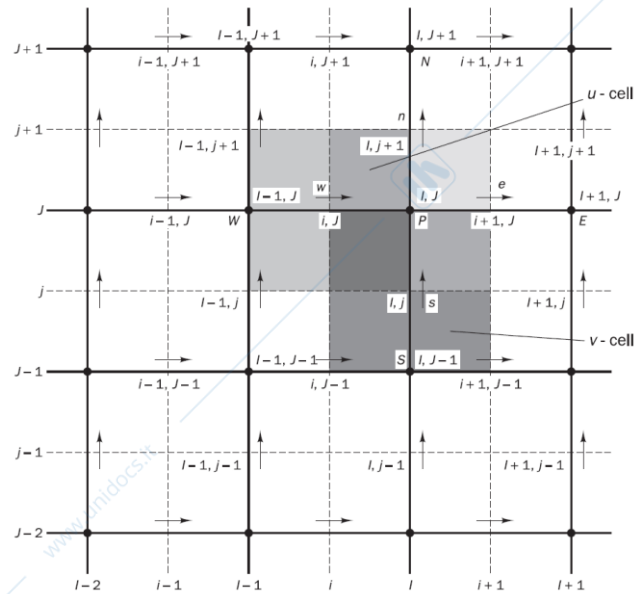
Tale approccio permette l'utilizzo di **volumi di controllo distinti** per la **discretizzazione delle componenti di velocità**, identificati come $u - cell$ e $v - cell$. Questo aiuta ad eliminare il problema del disaccoppiamento che si verifica nella discretizzazione dei termini derivati mediante il metodo delle differenze finite. Inoltre, consente di modificare la formula utilizzata per calcolare il gradiente, introducendo uno spostamento che impedisce al gradiente di annullarsi. Durante la discretizzazione delle equazioni per le componenti u e v della velocità, i valori di pressione nei punti P, S e W possono essere impiegati direttamente per determinare i gradienti di pressione secondo la seguente formula:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_P - p_W}{\delta x_u} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_P - p_S}{\delta y_v}$$

La tecnica di discretizzazione nota come '**staggering**' non è più comunemente impiegata nelle **griglie non strutturate**, poiché lo spostamento di un passo è logico in una griglia strutturata dove il concetto di spaziatura rimane definito attraverso le coordinate curvilinee. Invece, nelle griglie non strutturate, esiste il rischio di selezionare uno spostamento inadeguato; pertanto, la metodologia per correggere questo disaccoppiamento differisce. È necessario, quindi, definire volumi di controllo distinti per calcolare le componenti di velocità u e v , che denomino rispettivamente $u - cell$ e $v - cell$. Con questo metodo di discretizzazione, anche in presenza di una distribuzione a scacchiera della pressione, il gradiente di pressione nei pressi delle facce della griglia assume valori corretti e non nulli, consentendo una stima accurata dell'influenza del gradiente di pressione sulla velocità. Tuttavia, questo approccio comporta una perdita di risoluzione, in quanto si utilizza solo una porzione della mesh, risultando in una griglia effettivamente più rada.

Un'altra sfida è rappresentata dalla natura incomprimibile del flusso, per la quale è stata proposta una soluzione preliminare. Il problema fondamentale, tuttavia, persiste: come determinare la distribuzione della pressione in relazione al campo di velocità, dato che non è possibile ricorrere all'equazione di stato? È essenziale sviluppare un **algoritmo** che instauri una **correlazione tra pressione e velocità**, tale che il campo di pressione, attraverso i suoi gradienti, generi un campo di velocità conforme all'equazione di continuità.

In presenza di intensi gradienti di pressione, si origina una velocità che obbedisce all'equazione di continuità, la quale non stabilisce un legame diretto tra pressione e velocità. Per una descrizione più accurata del fenomeno, è necessario implementare un'ulteriore equazione che, attraverso un **processo iterativo**, inserisce il cosiddetto "**correttore della pressione**". Questo elemento aggiuntivo permette di affinare il modello, assicurando che la distribuzione della pressione all'interno del fluido sia coerente con le velocità osservate, garantendo così una rappresentazione più fedele della realtà fisica.



Affrontiamo il nostro problema generale considerando un **fluido incomprimibile** o a **bassa comprimibilità**. In questa situazione, ci troviamo di fronte a 4 incognite ma solamente 3 equazioni disponibili, poiché l'**equazione di conservazione della massa** non è più applicabile. Di conseguenza, l'equazione della quantità di moto, espressa in forma vettoriale, diventa:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{inco}} - \nabla \frac{p}{\rho} + \mathbf{g}$$

La quarta equazione necessaria, quella di continuità, non include il valore della pressione perché, in un fluido incomprimibile, non esiste una relazione diretta tra pressione e densità. Questo disaccoppiamento tra pressione e l'equazione della quantità di moto (qdm) dà origine a quello che comunemente si definisce "**pressure-momentum coupling**", dove l'equazione di massa non incorpora esplicitamente il valore della pressione.

Per superare questa sfida, possiamo utilizzare uno schema di discretizzazione precedentemente introdotto, che si basa sulla memorizzazione dei valori di pressione e velocità in punti diversi della griglia computazionale. Con questo metodo, possiamo formulare l'equazione della qdm. Partendo da un campo di pressione iniziale p , utilizziamo le equazioni della qdm per calcolare il campo di velocità. Successivamente, dobbiamo verificare se le componenti di velocità ottenute rispettano le equazioni di continuità. Se ciò non avviene a causa di una stima iniziale della pressione non accurata, è necessario correggere questo valore per aggiornare il campo di velocità affinché soddisfi progressivamente l'equazione di continuità. In altre parole, è essenziale stabilire una **procedura iterativa** che crei una correlazione tra pressione e densità. Questo permetterà di correggere l'**imbalance nel campo di velocità**, causato dal valore iniziale di pressione, e di determinare un nuovo valore di pressione aggiornato che guidi il sistema verso la convergenza. In sintesi, l'obiettivo è definire un processo iterativo che, attraverso l'aggiustamento della pressione, assicuri che il campo di velocità rispetti l'equazione di continuità, portando così il sistema a uno stato di equilibrio dinamico.

Utilizzeremo gli **indici maiuscoli** I e J per navigare lungo le **linee continue**, mentre gli **indici minuscoli** i e j per le **linee tratteggiate**. Questa distinzione ci permette di localizzare con precisione nodi e facce delle celle. La pressione sarà quindi calcolata nei punti (I, J) , la velocità u nei punti (i, J) e, analogamente, la velocità v nei punti (I, j) . Abbiamo adottato una strategia di **staggering backward**, dove la velocità è calcolata un passo indietro rispetto al nodo di pressione.

Per la discretizzazione della componente u vicino al punto (i, J) , deriviamo l'equazione seguente:

$$a_{i,j} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_{I-1,j} - p_{I,j}) A_{i,j} + b_{i,j}$$

Labels in the diagram:
 - $a_{i,j} u_{i,j}$: Known u-values
 - $\sum a_{nb} u_{nb}$: Summation over all neighbours contributions
 - $(p_{I-1,j} - p_{I,j}) A_{i,j}$: Area (volume in 3D) of u-cell control volume
 - $b_{i,j}$: Momentum source term

Questa include i termini noti derivanti dalla discretizzazione al contorno, le variabili incognite, l'approssimazione del gradiente di pressione, l'area della cella e i termini sorgente. SE consideriamo a questo punto anche la componente v otteniamo il sistema:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{u-direction: } a_{i,j} u_{i,j} &= \sum a_{nb} u_{nb} + (p_{I-1,j} - p_{I,j}) A_{i,j} + b_{i,j} \\ \Rightarrow \text{v-direction: } a_{I,j} v_{I,j} &= \sum a_{nb} v_{nb} + (p_{I,j-1} - p_{I,j}) A_{I,j} + b_{I,j} \end{aligned} \quad (2)$$

Fornendo a questo insieme di equazioni una **distribuzione di pressione fisicamente valida**, possiamo risolverle e ottenere un **campo di velocità che rispetti l'equazione di continuità**. Il passo fondamentale è stabilire una distribuzione di pressione che soddisfi simultaneamente le equazioni di quantità di moto (qdm) e di continuità. Gli approcci che esaminiamo sono tutti metodi iterativi che si basano sull'introduzione di un'equazione supplementare per la pressione, in particolare per il correttore di pressione. Determineremo un valore di pressione che correggerà un dato valore iniziale fino a quando il campo di pressione, determinato iterativamente, non soddisferà sia il set di equazioni della qdm che l'equazione di continuità.

I **pressure-correction schemes** sono progettati per riformulare l'equazione di continuità in termini di pressione. Questo processo consente, al raggiungimento della convergenza, di **eliminare i termini non fisici** e di ritornare all'equazione di continuità originale. Durante il calcolo, questi metodi **aggiornano la pressione** in base al campo di velocità che si sviluppa progressivamente. Tra gli algoritmi principali di questa categoria troviamo:

- **SIMPLE**, che sta per Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations, è un metodo semi-implicito per equazioni collegate alla pressione.
- **SIMPLEC**, o Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations-Consistent, rappresenta un'estensione naturale del metodo SIMPLE che genera un'equazione di correzione della pressione più robusta.
- **PISO**, acronimo di Pressure Implicit with Splitting of Operators, è un'estensione del metodo SIMPLE progettata per flussi non stazionari, ovvero Unsteady, con basso numero di Mach, ma può essere anche adattato per casi stazionari, o Steady.

Questi algoritmi sono fondamentali per la simulazione numerica dei flussi fluidi e sono ampiamente utilizzati in diversi campi dell'ingegneria e della fisica.

2.1. SIMPLE

Iniziando con un **campo di pressione** iniziale p^* , che rappresenta il valore di pressione dell'iterazione precedente, si stabilisce l'**equazione della quantità di moto** (qdm). Questo permette di risolvere e ottenere una distribuzione iniziale delle velocità v^* e u^* , che sono correlate al campo di pressione iniziale assunto.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}: \quad & a_{i,j} u_{i,j}^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_{i-1,j}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j} \\ \mathbf{V}: \quad & a_{l,j} v_{l,j}^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_{l,j-1}^* - p_{l,j}^*) A_{l,j} + b_{l,j} \end{aligned}$$

Successivamente, si introduce un **termine di correzione** della **pressione** p' , che modifica il campo di pressione iniziale p^* per assicurare la conservazione della massa. L'obiettivo è calcolare p' , che aggiornata diventa $p = p^* + p'$. Analogamente, si definisce un termine di correzione per le velocità, $u = u^* + u'$ e $v = v^* + v'$, per aggiornare i valori iniziali.

Sottraendo l'equazione 3, che rappresenta i valori attuali di pressione e velocità, dall'equazione 2, che esprime i valori esatti, si ottengono le equazioni della qdm in termini di correzione della pressione:

$$\begin{aligned} a_{i,j} u'_{i,j} &= \sum a_{nb} u'_{nb} + (p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) A_{i,j} \\ a_{l,j} v'_{l,j} &= \sum a_{nb} v'_{nb} + (p'_{l,j-1} - p'_{l,j}) A_{l,j} \end{aligned}$$

Queste equazioni, pur non avendo un significato fisico intrinseco e tendendo a un'identità al raggiungimento della convergenza del sistema, sono utili durante l'iterazione per correlare l'imbalance, ovvero la **non corretta conservazione della massa nella cella**, a un valore aggiornato della pressione.

Introduciamo ora le **ipotesi fondamentali dell'algoritmo SIMPLE**, iniziando con una semplificazione cruciale: l'**eliminazione** di tutti i **termini derivati dalla discretizzazione** relativi ai valori circostanti, noti come a_{nb} . Questo passaggio rimuove i contributi delle celle adiacenti, permettendoci di formulare un'equazione che corregge il valore della velocità basandosi sui **gradienti di pressione**, senza i **contributi esterni**. Tale approccio trascura volutamente gli **effetti dei correttori di velocità adiacenti**, focalizzandosi invece sui **correttori di pressione** per determinare la velocità. Questa scelta metodologica non compromette l'integrità della soluzione finale, poiché i valori dei correttori di pressione p' e di velocità v' tendono a 0 al raggiungimento della convergenza. Di conseguenza, le equazioni dei correttori saranno soddisfatte indipendentemente dai valori specifici inseriti, poiché alla convergenza i correttori p' e v' saranno nulli.

L'eliminazione dei valori circostanti non solo semplifica l'implementazione dell'algoritmo, ma garantisce anche la coerenza fisica del set di equazioni discrete al raggiungimento della convergenza.

Il processo iterativo prevede l'**aggiornamento dei campi di velocità e pressione** attraverso l'**addizione di correttori**

$$u'_{i,j} = d_{i,j}(p'_{i-1,j} - p'_{i,j})$$

$$v'_{i,j} = d_{i,j}(p'_{i,j-1} - p'_{i,j})$$

where $d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}}$ and $d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}}$

negativi e positivi all'ultimo campo calcolato, proseguendo fino a quando le equazioni non rispettano le condizioni delle equazioni di quantità di moto (qdm) e di continuità.

Definendo i **correttori di velocità** in termini di **correzione di pressione**, otteniamo:

$$u_{i,j} = u_{i,j}^* + d_{i,j}(p'_{i-1,j} - p'_{i,j})$$

$$v_{i,j} = v_{i,j}^* + d_{i,j}(p'_{i,j-1} - p'_{i,j})$$

Questa equazione fornisce il valore aggiornato della velocità in funzione del valore precedente, come determinato dal correttore di pressione. La correzione imposta alla velocità è il risultato diretto della pressione corretta. **Quando p' si annulla, la velocità non subisce ulteriori cambiamenti, indicando che il processo ha raggiunto la convergenza.**

In assenza di onde d'urto, queste espressioni ci dicono che il flusso fluisce proprio nella direzione stabilita dal gradiente di pressione. Ancora però il problema non è risolto in quanto non si ha ancora a disposizione l'equazione che fornisce il campo del correttore. Per chiudere il problema si deve far riferimento alla condizione di conservazione della massa. Si deve, di fatto, imporre che i valori corretti di velocità appena definiti rispettino la condizione di continuità. Sostituendo le espressioni per le velocità corrette si arriva a:

$$a_{i,j}p'_{i,j} = a_{i+1,j}p'_{i+1,j} + a_{i-1,j}p'_{i-1,j} + a_{i,j+1}p'_{i,j+1} + a_{i,j-1}p'_{i,j-1} + b'_{i,j}$$

L'equazione di correzione della pressione stabilisce una relazione tra i **termini di pressione** e il **termine sorgente**, che rappresenta lo **squilibrio di continuità** all'interno di una cella. Attraverso questa equazione è possibile calcolare il valore del correttore di pressione in base al grado di equilibrio rispetto alla conservazione della massa. Quando il termine sorgente si annulla, anche il correttore di pressione si riduce a zero.

Questa equazione include come **unica incognita il correttore di pressione**, che si manifesta come un Δp , sia positivo che negativo, che deve essere sommato algebricamente al valore di pressione ottenuto dall'iterazione precedente nel processo iterativo. Il termine noto b' , che rappresenta lo **squilibrio nell'equazione di continuità** causato da valori iniziali imprecisi di pressione e velocità, è fondamentale. Questo termine porta l'informazione necessaria per aggiustare lo **squilibrio di massa nelle celle** e tende a 0 quando l'equazione converge unicamente su $b' = 0$. Le semplificazioni introdotte non alterano la soluzione finale poiché, al raggiungimento della convergenza, i termini della soluzione tendono anch'essi a 0, rendendo le equazioni un'identità.

Risolvendo l'equazione si ottiene il valore del correttore di pressione, che permette di calcolare un nuovo valore di velocità per il passo successivo. La procedura iterativa si completa con l'aggiornamento della velocità, che richiede un nuovo set di coefficienti dipendenti dal campo di velocità aggiornato.

Il metodo descritto è di tipo **iterativo e segregato**, il che significa che le equazioni vengono risolte una alla volta in sequenza. Questo approccio può causare **oscillazioni** nel processo iterativo, specialmente se il valore iniziale di pressione

è notevolmente diverso dal suo valore effettivo. L'algoritmo SIMPLE, senza l'uso di un **coefficiente di sotto-rilassamento**, tende a **non convergere**.

Il coefficiente di rilassamento α_p è cruciale perché limita l'uso del correttore di pressione a solo una parte di esso ad ogni iterazione.

$$p^{nem} = p^* + \alpha_p p'$$

Solitamente, questo coefficiente varia tra 0 e 1, con un valore predefinito di 0.3. Un uso accurato del coefficiente di sotto-rilassamento può ridurre le oscillazioni e incrementare la stabilità, ma può anche rallentare la velocità di calcolo. Trovare il giusto equilibrio per questo coefficiente è fondamentale per l'efficacia della simulazione:

- un valore troppo alto può causare oscillazioni o divergenza,
- un valore troppo basso può rallentare significativamente la convergenza.

Il coefficiente di sotto-rilassamento viene applicato anche alle **componenti della velocità**.

La qualità della mesh influisce notevolmente sul valore del coefficiente di rilassamento; una mesh di bassa qualità richiede un coefficiente più aggressivo per controbilanciare gli effetti destabilizzanti introdotti dalla discretizzazione.

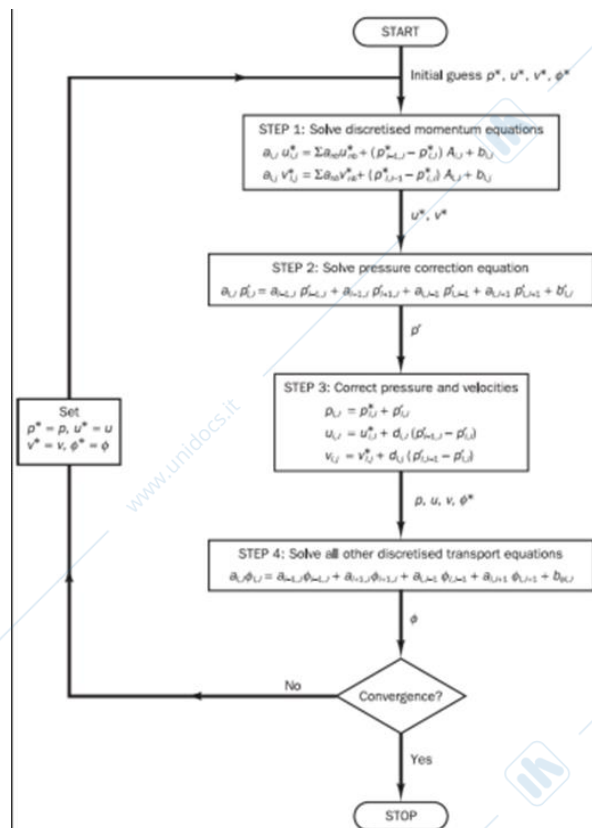
Questo coefficiente viene aggiunto sia al campo di pressione che a quello di velocità per stabilizzare l'algoritmo.

Il diagramma a blocchi illustra i vari passaggi dell'algoritmo, guidando attraverso le fasi del processo iterativo:

Si parte da un campo iniziale pressione;

1. Si impostano le equazioni in forma discretizzata e si risolve quella del momento per poter ricavare u^* e v^* ;
2. Si calcolano i coefficienti e i termini di origine per l'equazione di correzione della pressione;
3. Si risolve l'equazione di correzione della pressione da cui si ottiene p' ;
4. Si calcola la correzione di velocità per avere u' ;
5. Si aggiorna, con opportuno rilassamento, il campo di pressione e velocità ottenendo valori aggiornati di pressione e velocità p, u, v ;
6. Si ripete fino a convergenza.

In un contesto generale, è essenziale risolvere le grandezze associate alla turbolenza, alle specie chimiche, all'energia, ecc., in modo indipendente dall'equazione della quantità di moto (Step 4). Questo approccio disaccoppiato consente un'analisi più dettagliata e accurata dei vari fenomeni coinvolti.



Per determinare il raggiungimento della convergenza, si esamina se il residuo della quantità di moto si avvicina a zero o si valuta la tendenza verso lo zero del valore associato al coefficiente di correzione.

Il **metodo SIMPLEC** segue gli stessi passaggi intermedi del suo predecessore, ma semplifica notevolmente i valori relativi ai fattori correttivi u' e v' . In pratica, si modifica l'equazione del momento per escludere i termini di minore importanza, facilitando così il processo di calcolo senza compromettere la precisione dei risultati.

2.2. PIMPLE

Il metodo in questione è stato inizialmente concepito per analizzare **flussi compressibili non stazionari** e in seguito adattato per studiare **flussi incomprimibili stazionari** attraverso un approccio iterativo. Questo approccio è riconosciuto come un'**evoluzione dell'algoritmo SIMPLE**, arricchito da una **fase di correzione supplementare**. Tale **sub-iterazione** incrementa la **robustezza** dell'aggiornamento del campo di pressione. Il processo è articolato in tre distinte fasi:

1. Predictor step: Nella fase di predizione, si risolvono le equazioni della quantità di moto (qmd) discretizzate utilizzando una stima iniziale o la pressione ottenuta dall'iterazione precedente, indicata con p^* , per calcolare le velocità preliminari u^* e v^* . Questo passaggio segue la stessa logica dell'algoritmo SIMPLE.
2. Corrector step 1: Il primo passo correttivo consiste nell'applicare un'ulteriore correzione secondo l'algoritmo SIMPLE prima di aggiornare i valori di u^* e v^* . Si impiega l'equazione di correzione della pressione del SIMPLE per determinare un nuovo valore di pressione, p' , e si procede al calcolo delle velocità corrette, u^{**} e v^{**} , per due volte.
3. Corrector step 2: Nel secondo passo correttivo, basandosi su u^{**} e v^{**} , si effettua un'ulteriore correzione delle velocità, risolvendo nuovamente l'equazione della QDM, che porta alla definizione di un campo di velocità corretto per la seconda volta.

$$u_{i,j}^{***} = u_{i,j}^{**} + \frac{\sum a_{nb}(u_{nb}^{**} - u_{nb}^*)}{a_{i,j}} + d_{i,j}(p''_{i-1,j} - p''_{i,j})$$

$$v_{i,j}^{***} = v_{i,j}^{**} + \frac{\sum a_{nb}(v_{nb}^{**} - v_{nb}^*)}{a_{i,j}} + d_{i,j}(p''_{i,j-1} - p''_{i,j})$$

La seconda correzione della pressione, p'' , si aggiunge a quella precedente, p^{**} per ottenere p^{***} . Le velocità ulteriormente corrette, u^{***} e v^{***} , sono quindi calcolate utilizzando le nuove formulazioni, e una seconda correzione della pressione si deriva sostituendo i valori nell'equazione di continuità.

$$a_{1,j}p''_{1,j} = a_{1+1,j}p''_{1+1,j} + a_{1-1,j}p''_{1-1,j} + a_{1,j+1}p''_{1,j+1} + a_{1,j-1}p''_{1,j-1} + b''_{1,j}$$

In conclusione, il **twice-corrected pressure field** (campo di pressione corretto due volte), p^{***} , si ottiene:

$$p^{***} = p^{**} + p'' = p^* + p' + p''$$

In pratica è un **loop interno al SIMPLE** che poi si traduce in una implementazione che aggiorna i valori prima di completare la discretizzazione di tutti i termini. Questo processo, che avviene prima della discretizzazione effettiva (approssimazione dei gradienti e ricostruzione dei flussi), utilizza gli stessi valori di discretizzazione e si svolge in un ciclo interno. Tale approccio incrementa la robustezza del metodo, specialmente su griglie di qualità inferiore, spesso risultanti da geometrie complesse. Nel metodo sono presenti due correttori di pressione, impiegati per aggiornare il valore di pressione prima di procedere con l'iterazione successiva. La doppia correzione della pressione, effettuata utilizzando lo stesso set di valori iniziali, permette di aggiornare il correttore di pressione due volte, mantenendo invariati i termini sorgenti e i flussi al contorno fino al completamento dell'iterazione corrente.

A differenza del metodo SIMPLE, nel PISO, quando si passa al secondo step dopo aver ottenuto un primo set di velocità, si introduce un nuovo set di quantità di moto che aggiorna i valori del secondo correttore di velocità. In questo caso, i termini precedentemente omessi nel SIMPLE e nel primo step del PISO vengono considerati, poiché si effettua una "correzione della correzione", presupponendo che i valori ottenuti nel primo step di correzione siano sufficientemente precisi. Questi termini vengono quindi mantenuti per rafforzare l'algoritmo. Successivamente, si costruisce la seconda equazione di correzione della pressione, che viene inserita nell'equazione di continuità. Ottenuto il secondo correttore di pressione, si calcola il valore aggiornato della pressione sommando i due valori di correzione al valore iniziale del primo tentativo.

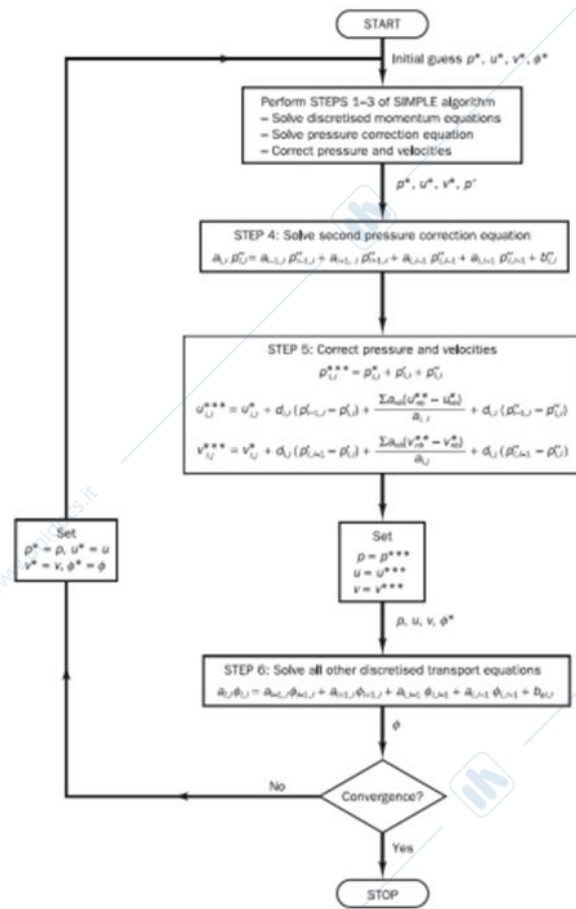
Il diagramma a blocchi illustra i vari passaggi dell' algoritmo, guidando attraverso le fasi del processo iterativo:

Il 6° passaggio, questo corrisponde al 4° passaggio del metodo SIMPLE, include la risoluzione di equazioni supplementari. Abbiamo introdotto un ulteriore passaggio interno al ciclo di iterazione singola, che precede l'aggiornamento dei campi di pressione e velocità e la successiva discretizzazione. Questo passaggio interno utilizza gli stessi coefficienti di discretizzazione impiegati nel metodo SIMPLE.

L'algoritmo PISO, quindi, risolve l'equazione con il correttore di pressione due volte, il che comporta una maggiore necessità di memoria. Anche per il PISO, è necessario un **coefficiente di rilassamento** per garantire la stabilità dell'algoritmo.

L'implementazione del metodo SIMPLE è relativamente semplice; inoltre, è implicito, poiché non si aggiorna il valore della pressione con valori precedenti. Di conseguenza, ogni iterazione implica la risoluzione di un sistema lineare, rendendo cruciale la soluzione di tali sistemi sia per i correttori di pressione che per quelli di velocità, al fine di assicurare l'efficienza dell'algoritmo.

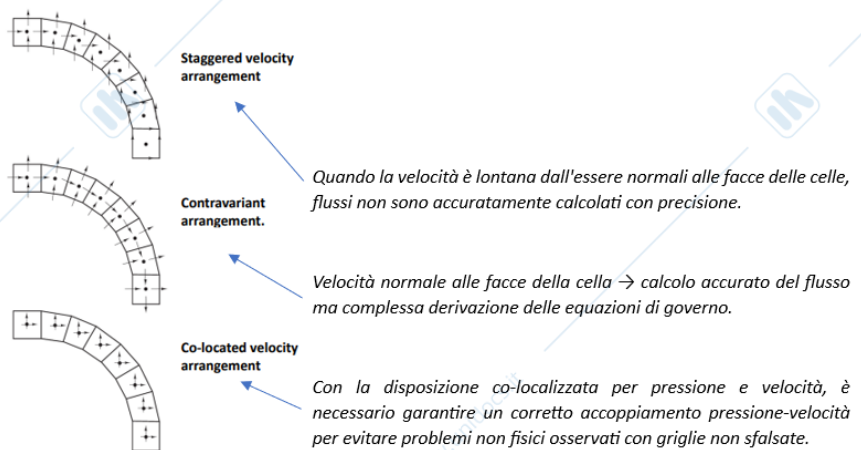
Il PISO si dimostra più efficiente del SIMPLE, riducendo i costi computazionali di un fattore vicino a 2. Il suo vantaggio principale è l'utilizzo in mesh di bassa precisione e con geometrie complesse. Il PISO è in grado di gestire flussi con numeri di Mach intorno a 0,4-0,5, che rappresentano la maggior parte dei casi negli ambiti industriali.



2.3. Unstructured grids co-location of P and V

Abbiamo esaminato l'importanza delle **griglie Straggered** nei **metodi Pressure-Based** per garantire una rappresentazione accurata dei gradienti di pressione. Tali griglie sono ideali quando il dominio può essere discretizzato con una **griglia strutturata**. Tuttavia, di fronte a geometrie complesse, è preferibile adottare solutori che operano su **griglie non strutturate**. In questo contesto, lo staggering di pressione (P) e velocità (v) in punti distinti diventa impraticabile, portando al riaffiorare del problema di disaccoppiamento tra P e v , il quale induce errori nel calcolo dei gradienti e genera soluzioni non conformi alla realtà fisica.

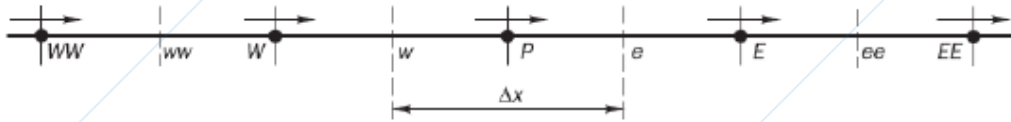
Utilizzando **griglie non strutturate**, si ritorna a un metodo di **salvataggio co-located** per pressione e velocità, cioè entrambe vengono memorizzate nello stesso punto. Questo punto può essere il **nodo**, nel caso di un **approccio vertex-centered**, o il **centroide della cella** per gli **schemi cell-centered**. Questa pratica comporta il rischio di calcolare gradienti di pressione inaccurati e di incontrare instabilità durante la determinazione della soluzione.



Per prevenire l'oscillazione del calcolo durante il salvataggio di P e v co-located, si ricorre comunemente all'**interpolazione di Rhie-Chow**. Questa tecnica impiega **discretizzazioni del 3° ordine** per la ricostruzione dei **gradienti di pressione**. Tale approccio attenua le oscillazioni che potrebbero svilupparsi a causa del disaccoppiamento tra P e v .

Riferendosi alla griglia 1D non strutturata sottostante, con un approccio vertex-centered, si avrà:

$$u_e = \frac{u_P + u_E}{2} + \frac{1}{2}(d_P + d_E)(p_P - p_E) - \frac{1}{4}d_P(p_W - p_E) - \frac{1}{4}d_E(p_P - p_{EE})$$



In forma compatta:

$$u_e = \frac{u_P + u_E}{2} + \frac{d}{4} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \Big|_e \Delta x^3$$

L'interpolazione di Rhie-Chow può essere interpretata come l'**introduzione di un termine di gradiente di pressione di terzo ordine**. Questo termine supplementare introdotto serve a eseguire un dumping delle oscillazioni che altrimenti emergerebbero dal disaccoppiamento, consentendo di ristabilire la differenza di pressione attraverso le facce del volume di controllo.

Questa discussione può essere estesa anche a griglie 3D non strutturate, per le quali il valore di velocità u_e sulla faccia è dato da:

➤ **Extension to unstructured grids**

⇒ First rewrite as:

$$u_e = \frac{u_P + u_E}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{A_P \Delta x}{a_P} + \frac{A_E \Delta x}{a_E} \right) \left(\frac{p_P - p_E}{\Delta x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{A_P \Delta x}{a_P} (\nabla p)_P + \frac{A_E \Delta x}{a_E} (\nabla p)_E \right)$$

average of the nodal velocities straddling face e

pressure difference across the face multiplied by the average of d values at P and E

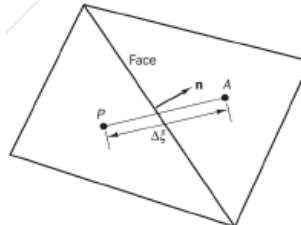
average of the product $d(\nabla p)$ at nodes P and E

$$(\nabla p)_P = \frac{p_W - p_E}{2\Delta x} \text{ and } (\nabla p)_E = \frac{p_P - p_{EE}}{2\Delta x}$$

➤ **Generalization to unstructured grid**

$$u_f = \left(\frac{\mathbf{u}_P + \mathbf{u}_A}{2} \right) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta V_P}{a_P} + \frac{\Delta V_A}{a_A} \right) \left(\frac{p_P - p_A}{\Delta \xi} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta V_P}{a_P} (\nabla p)_P + \frac{\Delta V_A}{a_A} (\nabla p)_A \right] \cdot \mathbf{e}_\xi$$

where $\Delta \xi$ is the distance between the nodes
 ΔV is the volume of the control volume



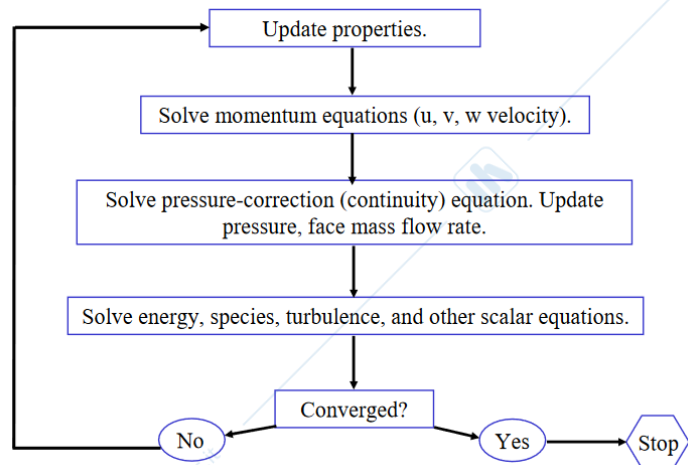
⇒ The gradients of pressure in P and E can be evaluated using an appropriate gradient reconstruction method

➔ See discretization/interpolation methods

2.4. Segregated vs Coupled

Gli algoritmi pressure-based possono essere generalizzati per gestire il problema del momento quantità di moto (qdm) e della pressione sia in termini segregati, come è stato fatto finora, sia in termini accoppiati. In un algoritmo pressure-based tipico, si procede alla risoluzione indipendente di tre gruppi di equazioni:

- il qdm, che necessita della soluzione di un sistema lineare;
- l'equazione di correzione della pressione;
- la soluzione di eventuali equazioni supplementari per altre grandezze scalari richieste dal problema.

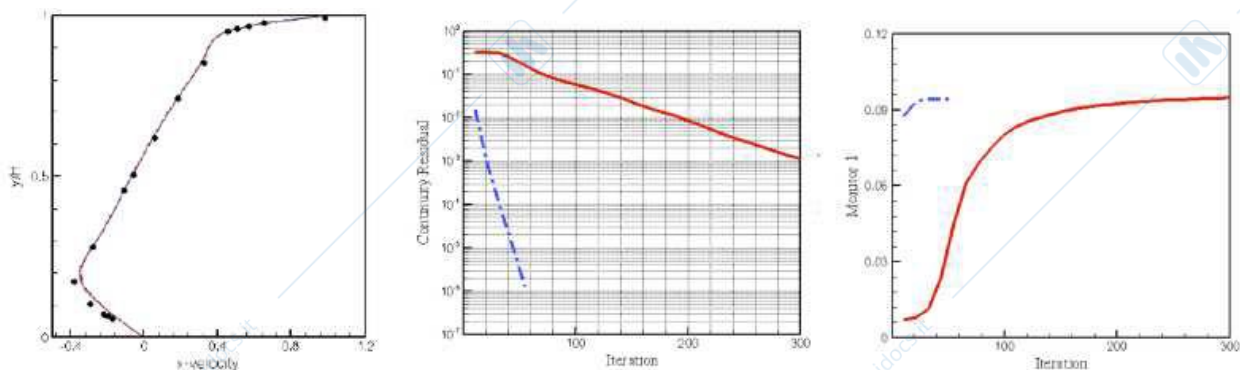


Questo **metodo segregato** è particolarmente efficace quando l'**accoppiamento tra le variabili è debole**. Ad esempio, nel caso di flusso incomprimibile, l'equazione dell'energia è fisicamente disaccoppiata dall'equazione del qdm, rendendo ragionevole un approccio segregato in cui le equazioni sono risolte in step separati. Tuttavia, quando l'**accoppiamento tra le variabili è forte**, potrebbe essere vantaggioso adottare un **approccio accoppiato**, in cui le equazioni sono risolte simultaneamente per tenere conto dell'interazione tra le variabili in modo più diretto e potenzialmente più accurato. Questo approccio richiede algoritmi più complessi e potrebbe essere più oneroso dal punto di vista computazionale, ma può fornire soluzioni più precise in scenari in cui l'interazione tra pressione e qdm è significativa.

Nel contesto dei flussi comprimibili o con numeri di Mach elevati, così come in situazioni che inducono l'accoppiamento delle equazioni, come ad esempio la turbolenza che collega la quantità di moto e le variazioni di densità, è preferibile adottare un **approccio di risoluzione accoppiata delle equazioni**. Ciò implica la risoluzione simultanea di tutte le equazioni come parte di un **unico sistema lineare**, dove l'insieme delle incognite appartiene all'intero problema. Questo metodo aumenta la robustezza nella gestione della rigidità del sistema. Generalmente, le equazioni relative alla turbolenza non sono accoppiate a causa delle difficoltà implementative legate alla dipendenza di queste equazioni dai coefficienti costitutivi della turbolenza, come la viscosità turbolenta.

Gli **algoritmi coupled** presentano il vantaggio di una **maggiore velocità di convergenza** e sono più efficaci nel raggiungere la convergenza partendo da una soluzione iniziale non ottimale. Tuttavia, il loro svantaggio risiede nella necessità di una **maggiore quantità di memoria**, poiché la risoluzione di un sistema lineare più ampio con un numero maggiore di incognite richiede una capacità di memoria superiore.

Consideriamo un esempio per confrontare due metodologie:



Inizialmente, abbiamo un flusso in condizione di quiete. Questo flusso viene accelerato a causa dell'attrito generato da una cavità, che induce una ricircolazione, un fenomeno caratteristico dei flussi stazionari.

Nonostante i processi differenti, la soluzione ottenuta rimane invariata. È interessante osservare il tasso di convergenza. Il secondo grafico, partendo da sinistra, illustra i residui derivanti dall'equazione di continuità, mentre l'ultimo grafico, sempre partendo da sinistra, rappresenta la quantità di moto in un punto specifico. Si evidenzia come l'uso dell'algoritmo coupled riduca significativamente il numero di iterazioni necessarie per raggiungere la convergenza.

2.5. Source terms

Il termine in questione è comunemente utilizzato, ad esempio, nella dinamica dei fluidi per descrivere gli effetti di trascinamento distribuiti all'interno di una cella. Questo si verifica quando si modella il flusso attraverso un mezzo poroso, rappresentando una metodologia per simulare il comportamento delle perdite di carico in griglie estremamente fitte. La discretizzazione diretta di tali geometrie è spesso impraticabile a causa della minuziosa spaziatura introdotta dalla griglia. Pertanto, il flusso del fluido attraverso la griglia viene approssimato come se stesse passando attraverso un mezzo poroso. L'effetto della porosità sulla dinamica del fluido è quindi trattato introducendo un termine sorgente di pozzo nella formulazione.

Nelle equazioni che modellano fenomeni fisici, i **termini sorgenti** sono utilizzati per rappresentare le **forze di un volume**, come nel caso dell'equazione della quantità di moto, o per descrivere la **generazione di energia** in un dato volume, come nell'equazione dell'energia. Questi termini sono particolarmente utili quando si desidera includere nell'analisi effetti fisici specifici senza necessità di dettagliarli completamente, ma piuttosto per valutarne l'impatto globale sul sistema studiato.

Per esemplificare, consideriamo l'**equazione di trasporto** per una variabile fisica generica ϕ :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Rate of increase of ϕ of fluid element | + Net rate of flow of ϕ out of fluid element | = Rate of increase of ϕ due to diffusion | + Rate of increase of ϕ due to sources |
|---|---|---|---|

Qui, S_ϕ simboleggia l'insieme dei termini sorgente che influenzano la variabile ϕ , potendo sia aumentarne il valore sia diminuirlo. La formulazione di S_ϕ è stata definita come segue:

$$\int_V S_\phi dV = S_\phi V_P$$

L'approccio utilizzato per **approssimare il termine** sorgente in un sistema algebrico lineare può essere descritto come il prodotto diretto tra il valore scalare della sorgente, calcolato nel centroide della cella, e il volume della cella stessa. Questo metodo di approssimazione può influenzare significativamente la soluzione del sistema, dato che il termine sorgente è funzione dello scalare. Ad esempio, nel calcolo di un termine di rilascio termico dovuto a scambio termico, è plausibile che la sorgente vari in base alla temperatura. Pertanto, è cruciale gestire la dipendenza del termine sorgente dallo scalare considerato.

Un approccio comune è quello di trattare i termini in maniera **esplicita**, calcolando il valore della sorgente basandosi sui valori dello scalare dell'iterazione precedente. Tuttavia, questo metodo può **disaccoppiare il legame fisico tra la sorgente e lo scalare**, con la possibilità di aggiornare il valore della sorgente solo nell'iterazione successiva. In presenza di una forte dipendenza dello scalare dalla sorgente, ciò può causare significative oscillazioni nel comportamento del sistema, destabilizzando l'algoritmo e il processo iterativo. L'uso di un **coefficiente di rilassamento** può mitigare questo effetto, ma tende ad allungare i tempi di convergenza del sistema.

La rappresentazione esplicita del sistema lineare può essere espressa attraverso l'equazione seguente:

$$\bar{A} \bar{\phi} = \bar{b}$$

Nell'affrontare problemi caratterizzati da **flussi reattivi** con intense interazioni tra la sorgente e la variabile di interesse, si rivela vantaggioso adottare un **approccio di linearizzazione**, per ricondurre l'analisi a un contesto **implicito**. Questo processo si realizza attraverso l'**approssimazione del termine sorgente al primo ordine**, equivalente a una serie troncata al primo termine. Di conseguenza, una sorgente generica, indicata come S_ϕ , sarà trattata secondo la seguente espressione:

$$S(\phi) = S_C + S_P \phi_P$$

dove:

- S_C rappresenta il **contributo esplicito**, espresso in forma esplicita.
- S_P indica il contributo implicito di S .
- ϕ_P è il **valore incognito** dello scalare ϕ .

In sostanza, la sorgente S_ϕ non è più considerata un **valore costante**, ma si compone di una parte S_C , che confluisce nel termine noto del sistema lineare, e di una parte S_P , che viene incorporata nella matrice del sistema. Questo influsso modifica la matrice del sistema lineare in esame, integrando una porzione del termine sorgente relativo alla grandezza scalare in questione. Tale metodologia incrementa significativamente la **robustezza** della dipendenza e dell'approssimazione impiegate nell'analisi dell'equazione differenziale in esame.

2.6. Picard's method

Il **metodo Picard**, da noi recentemente adottato, considera ϕ_P^* come l'approssimazione di ϕ nel punto P all'iterazione corrente, ottenuta mediante un'applicazione dell'**espansione di Taylor di primo ordine**:

$$S = S^* + \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^* (\phi_P - \phi_P^*)$$

dove ϕ^* rappresenta il **valore al passo iterativo precedente**. Successivamente, possiamo determinare i valori di S_C e S_P come segue:

$$S_C = S^* - \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^* \phi_P^* \quad (\text{parte esplicita})$$

$$S_P = \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^* \quad (\text{parte implicita})$$

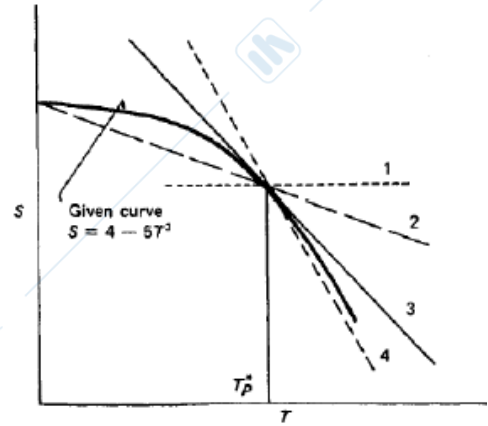
Nella modellazione di fenomeni fisici, è comune formulare un'**Equazione di Sorgente Unica (US)** per descrivere il termine sorgente di una grandezza scalare di interesse. Il nostro codice consente l'aggiunta di tali grandezze scalari al set di equazioni da risolvere. Per definire accuratamente la fisica del problema, è essenziale caratterizzare sia il coefficiente di diffusività sia il termine sorgente, solitamente attraverso l'approccio sopra descritto.

Consideriamo una **funzione sorgente generica** dipendente da una variabile scalare ϕ , come ad esempio la temperatura.

$$S(T) = 4 - 5T_p^{*3}$$

Esaminiamo diverse strategie di linearizzazione:

1. Senza alcuna linearizzazione, impostiamo $S_p = 0$. Di conseguenza, il valore del termine S_C preso dall'iterazione precedente utilizzando il valore di T_p , risultando in un valore costante e pari a $S_C = 4 - 5T_p^{*3}$. Questo approccio semplifica la relazione cubica continua tra il termine sorgente $S(T)$ e la variabile scalare T a una semplice linea retta, il che non è una rappresentazione accurata.
2. Nella prima linearizzazione, assegniamo $S_C = 4$ e $S_p = -5T_p^{*4}$. Questo metodo fornisce un'approssimazione che, sebbene sia più vicina al valore reale rispetto al primo caso, rimane comunque imprecisa.
3. Un ulteriore approccio prevede $S_C = 4 + 10T_p^{*3}$ e $S_p = -5T_p^{*2}$. Questo metodo si basa sul metodo di Picard e rappresenta la tangente alla curva $S(T)$.
4. Infine, $S_C = 4 + 20T_p^{*3}$ e $S_p = -25T_p^{*2}$. La tecnica di linearizzazione fornisce un'approssimazione accurata della relazione tra la sorgente e la variabile scalare nel punto specifico di interesse per la soluzione. Questo metodo consente di semplificare le equazioni complesse, rendendo più gestibile l'analisi del sistema. Nonostante ciò, uno degli effetti collaterali è l'incremento del tempo necessario per raggiungere la convergenza della soluzione.



In situazioni dove i termini sorgente mostrano una dipendenza non lineare dalla variabile scalare, come avviene nei flussi reattivi con relazioni esponenziali, si verifica una rigidità nel problema numerico. Questa rigidità si manifesta come una marcata interdipendenza tra le variabili, che non può essere efficacemente affrontata attraverso una semplice linearizzazione dei termini sorgente. Per superare questa sfida, è essenziale l'impiego di metodi specifici, progettati per gestire e risolvere la complessità intrinseca di tali problemi.

2.7. Unsteady Flow calculations

L'approccio **pressure-correction** e **pressure-based**, precedentemente esaminato, può essere esteso alla **risoluzione di flussi non stazionari**. È utile fare un riepilogo dei principi fondamentali per la soluzione delle equazioni di Navier-Stokes (N-S) in regime unsteady. Abbiamo considerato finora una metodologia iterativa per risolvere le equazioni di N-S in forma stazionaria. Tuttavia, per analizzare sia lo stato stazionario sia la variabilità temporale di un flusso in evoluzione, è necessario risolvere le equazioni di N-S includendo il termine evolutivo che dipende dal tempo.

Per affrontare questo compito, si distinguono tre principali formulazioni:

1. **Metodo Esplicito:** Questa formulazione prevede una discretizzazione temporale esplicita delle equazioni, con un'accuratezza del primo ordine. Per una grandezza generica ϕ , si utilizzano i valori ottenuti al passo temporale precedente, consentendo così una soluzione sequenziale dei bilanci sui volumi di controllo.
2. **Metodo Crank-Nicolson:** Questo metodo impiega una combinazione dei valori di ϕ al tempo precedente e al nuovo passo temporale, assicurando una discretizzazione di secondo ordine. Questa tecnica, essendo di tipo implicito, richiede la risoluzione di un sistema di equazioni algebriche a ogni passo temporale.

3. **Metodo Implicito:** In questa formulazione, tutti i valori di ϕ sono impiegati nella discretizzazione al nuovo passo temporale, garantendo un'accuratezza di base del primo ordine. Questo approccio richiede anch'esso la risoluzione di un sistema di equazioni algebriche a ogni passo temporale, ma è generalmente più stabile del metodo esplicito, specialmente per passi temporali più grandi.

| <i>Scheme</i> | <i>Stability</i> | <i>Accuracy</i> | <i>Positive coefficient criterion</i> |
|-----------------------|------------------------|-----------------|---|
| <i>Explicit</i> | Conditionally stable | First-order | $\Delta t < \frac{\rho(\Delta x)^2}{2\Gamma}$ |
| <i>Crank–Nicolson</i> | Unconditionally stable | Second-order | $\Delta t < \frac{\rho(\Delta x)^2}{\Gamma}$ |
| <i>Implicit</i> | Unconditionally stable | First-order | Always positive |

Gli **algoritmi SIMPLE** e **PISO** rappresentano una metodologia efficace per la **generalizzazione dei flussi non stazionari**, attraverso un approccio di tipo completamente **implicito**. Questi algoritmi, nella loro essenza iterativa, operano su un meccanismo implicito che, quando adattato a scenari non stazionari, implica la sostituzione delle iterazioni con step temporali progressivi. Questo processo porta a una discretizzazione implicita delle equazioni. In pratica, le equazioni discretizzate rimangono sostanzialmente invariate, fatta eccezione per la ridefinizione del coefficiente centrale a_p e del termine sorgente b_p , i quali devono essere aggiornati per incorporare i termini evolutivi aggiuntivi.

Il **metodo SIMPLE** e le sue varianti si basano su un approccio iterativo per assicurare la convergenza del correttore di pressione ad ogni intervallo temporale. In questo contesto, l'algoritmo viene risolto ripetutamente ad ogni step temporale. Questo processo è cruciale quando l'obiettivo è analizzare il comportamento transitorio fino al raggiungimento di uno stato stazionario. Tuttavia, se l'intento è osservare l'evoluzione del transitorio verso lo stato stazionario, si può optare per una minore precisione nella convergenza di ogni step temporale. Al contrario, se il problema richiede un'analisi dettagliata dell'evoluzione temporale, specialmente in scenari di "scale resolving" dove si indaga l'instabilità naturale del flusso, diventa essenziale mantenere un'elevata precisione ad ogni step temporale, come nel caso di soluzioni di tipo Large Eddy Simulation (LES). In queste situazioni, la precisione di ogni step temporale deve essere paragonabile a quella richiesta per una soluzione stazionaria. Di conseguenza, si implementa una serie di schemi SIMPLE per ciascun intervallo temporale, introducendo un termine evolutivo e assicurando la coerenza temporale in linea con le condizioni del numero di Courant (CFL), che variano in base alle caratteristiche specifiche del flusso in esame. Ad esempio, nelle soluzioni LES, è necessario che il numero di Courant sia inferiore a uno per garantire una corretta risoluzione del problema.

Il **metodo PISO** si dimostra particolarmente efficace per l'analisi di flussi non stazionari, grazie alla sua capacità di offrire una discretizzazione di terzo ordine per la pressione e di quarto ordine per la quantità di moto. Questo si traduce in un'elevata precisione temporale, che consente di ottenere campi di pressione e velocità accurati al termine di ogni ciclo predictor-corrector. Di conseguenza, il PISO elimina la necessità di un approccio iterativo per la risoluzione di ogni time step, risultando meno oneroso in termini computazionali rispetto al metodo SIMPLE, soprattutto quando non si devono gestire griglie di bassa qualità che richiederebbero time step estremamente ridotti per mantenere la stabilità del processo con numeri CFL inferiori a 1. In scenari dove è richiesta una soluzione time accurate, per assicurare la risoluzione precisa di ogni time step, è fondamentale garantire la convergenza dell'algoritmo ad ogni passo. In assenza di questa necessità, la convergenza per ogni time step potrebbe non essere indispensabile, permettendo un approccio più flessibile e potenzialmente più rapido verso la soluzione finale.

2.7.1. Unsteady SIMPLE

Nell'approccio SIMPLE non stazionario, è fondamentale includere la discretizzazione del termine evolutivo della densità all'interno dell'equazione di correzione della pressione. Questo termine funge da termine sorgente aggiuntivo.

$$a_{1,j}p'_{1,j} = a_{I+1,j}p'_{I+1,j} + a_{I-1,j}p'_{I-1,j} + a_{1,j+1}p'_{1,j+1} + a_{1,j-1}p'_{1,j-1} + b'_{1,j}$$

$$b'_{I,j} = (\rho u^* A)_{i,j} - (\rho u^* A)_{i+1,j} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1} + \frac{(\rho_p^0 - \rho_p) \Delta V}{\Delta t}$$

L'algoritmo procede in modo simile a quanto già osservato. L'analisi inizia al tempo $t = 0$ e si estende fino a $t = t_{max}$, che rappresenta il confine superiore dell'intervallo temporale entro il quale desideriamo calcolare il flusso.

2.7.2. PISO in unsteady calculations

Passando all'esempio sul PISO per calcoli non stazionari, esaminiamo l'effetto della scelta del numero di CFL (Co) in combinazione con i fattori di sotto-rilassamento ($URFs$). Si può osservare che con un numero di Courant Co significativamente maggiore di 1,5, sommato agli $URFs$, la soluzione perde la sua accuratezza temporale. Di conseguenza, si verifica una perdita nella risoluzione temporale e, quindi, nella capacità di risolvere strutture che vengono smussate da un elevato incremento temporale.

2.8. Pseudo-transient approach and $URF/\Delta t$ comparison

È possibile iniziare con un'analisi stazionaria per delineare lo stato stazionario del sistema. Questo approccio offre vantaggi significativi in termini di convergenza, consentendo una gestione più efficace delle condizioni iniziali che possono essere distanti dalla soluzione definitiva. Ad esempio, nel caso di un campo di flusso complesso dove è difficile stabilire una condizione iniziale adeguata per la pressione, iniziare direttamente con un'analisi stazionaria utilizzando un metodo SIMPLE potrebbe richiedere coefficienti di rilassamento molto bassi o potrebbe portare a una divergenza nella soluzione.

In alternativa, è possibile adottare un approccio non stazionario, simulando il flusso e il suo transitorio incrementando gradualmente il flusso di massa o partendo da uno stato di quiete. Questo metodo, pur non risolvendo con alta precisione l'evoluzione temporale del fenomeno, permette di stabilire una condizione iniziale più robusta, partendo da una situazione di innesco non eccessivamente prossima alla soluzione effettiva. Tale strategia può essere impiegata anche con algoritmi non stazionari, ma molti codici offrono questa opzione come alternativa all'analisi stazionaria, definendola "pseudo-transient". In sostanza, si tratta di sostituire il coefficiente di rilassamento tipico dei metodi basati sulla pressione con un time step virtuale, che fa evolvere l'algoritmo in un tempo numerico mantenendo un collegamento con l'evoluzione temporale reale. Questo principio può essere illustrato considerando l'equazione della quantità di moto per un metodo SIMPLE in forma stazionaria, aggiornata tramite il coefficiente di rilassamento:

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_u} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_{I-1,j} - p_{I,j}) A_{i,j} + b_{i,j} + \left[(1 - \alpha_u) \frac{a_{i,j}}{\alpha_u} \right] u_{i,j}^{(n-1)}$$

Contribution of previous iteration due to under relaxation

L'espressione implicita scritta in forma stazionaria invece è pari a:

$$\left(a_{i,j} + \frac{\rho_{i,j}^0 \Delta V}{\Delta t} \right) u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_{I-1,j} - p_{I,j}) A_{i,j} + b_{i,j} + \frac{\rho_{i,j}^0 \Delta V}{\Delta t} u_{i,j}^0$$

Contribution of previous time step

È evidente che il contributo derivante dal rilassamento, ottenuto dall'iterazione precedente, è inesistente quando il parametro $\alpha_n = 1$. Questa osservazione ci permette di comprendere come l'introduzione di un rilassamento equivalga alla diminuzione di un termine paragonabile a quello evolutivo. Tale riduzione può essere vantaggiosamente impiegata attraverso l'uso di un algoritmo di tipo transient o pseudotransient per determinare la soluzione stazionaria.

Analizzando i due termini, si procede alla valutazione dei comportamenti dei pressure correction, sia nell'ambito di una soluzione stazionaria ottenuta direttamente, sia per una soluzione unsteady che mira all'individuazione della soluzione stazionaria. Questo confronto è cruciale per ottimizzare gli algoritmi di calcolo e per garantire una maggiore precisione nella simulazione dei fenomeni fisici in esame.

$$(1 - \alpha_u) \frac{a_{i,j}}{\alpha_u} = \frac{\rho_{i,j}^o \Delta V}{\Delta t}$$

It is possible to achieve the effects of under-relaxed iterative steady state calculations from a given initial field by means of a pseudo-transient computation starting from the same initial field by taking an appropriate step size

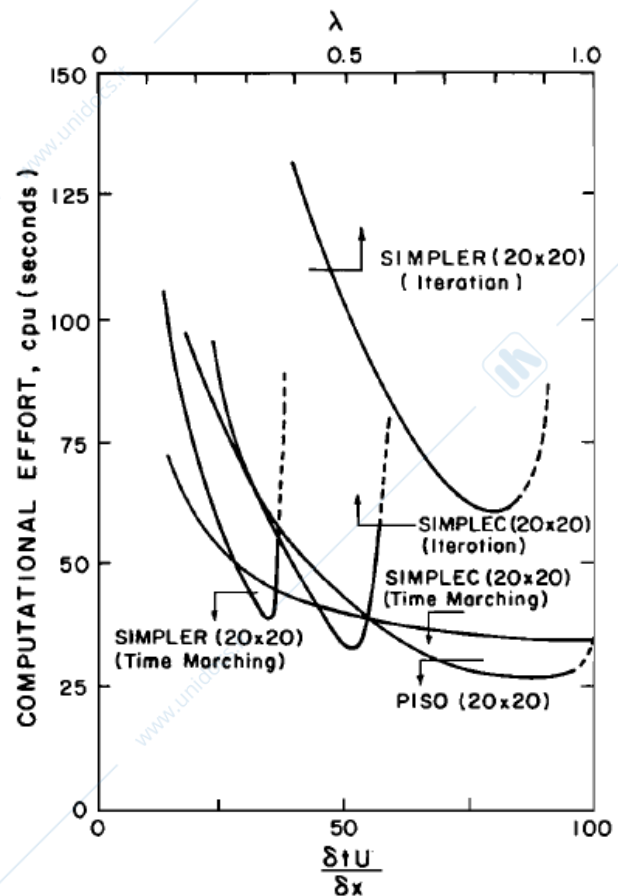
Steady state calculations may be interpreted as pseudo-transient solutions with spatially varying time steps. The pseudo-transient approach is useful for situations in which governing equations give rise to stability problems, e.g. buoyant flows, highly swirling flows and compressible flows with shocks.

2.9. Comparison of SIMPLE, SIMPLEC, PISO

Il diagramma presentato illustra le traiettorie di convergenza, evidenziando sulle ordinate il numero di iterazioni, descritto come sforzo computazionale, e sulle ascisse il valore del numero di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

Questo grafico ha lo scopo di dimostrare come il **costo computazionale** varia in funzione del rilassamento o del passo temporale; per esempio, nei problemi stazionari l'asse delle ascisse rappresenta i coefficienti di rilassamento, mentre nei problemi non lineari è espresso in termini di CFL. Si nota che, per il **metodo SIMPLE** in regime stazionario, incrementando il coefficiente di rilassamento si ottiene un vantaggio in termini di costo computazionale fino a un certo punto, oltre il quale la soluzione inizia a diventare instabile, portando a un aumento dei tempi di calcolo e, eventualmente, alla divergenza del processo (indicata dalla linea tratteggiata). Un ragionamento simile si applica agli altri **algoritmi di tipo time-marching**, influenzati dal valore del CFL.

Indipendentemente dall'algoritmo utilizzato, esiste un valore ottimale sia per il **coefficiente di rilassamento** sia per il **numero di Courant**, i quali variano a seconda della griglia di calcolo e della natura del problema. È importante notare che, nonostante l'intuizione possa suggerire che un valore più alto di CFL sia preferibile, esiste un limite dovuto alla discretizzazione impiegata e all'introduzione del correttore di pressione. Abbiamo assunto che le variazioni di pressione siano minime; pertanto, l'adozione di valori eccessivamente alti di CFL equivale a richiedere passi temporali troppo ampi, contravvenendo all'ipotesi di piccole variazioni di pressione.



3. Scale Resolving Methods for Turbulence modelling

La turbolenza rappresenta il **comportamento caotico e imprevedibile** di un **fluido**, che si verifica quando il **trasporto convettivo** prevale su quello **diffusivo**. Questo fenomeno è l'espressione dell'inclinazione intrinseca di un flusso a diventare instabile, manifestando **fluttuazioni** e **comportamenti aleatori** nelle sue **proprietà fondamentali**. Tale condizione si verifica quando le **forze inerziali**, legate alla velocità del flusso, superano le **forze viscosse**, che normalmente agiscono per smorzare le instabilità emergenti.

Il **numero di Reynolds** è un parametro che confronta queste due forze, indicando il **punto di transizione** verso la turbolenza. Quando il numero di Reynolds supera un valore critico, il flusso diventa turbolento.

- Pipe flows $Re_D = \frac{2300}{5} \cdot 10^4$
- Boundary layers $Re_x = 5 \cdot 10^5$
- flusso attorno a una sfera $Re_D = 0.1$

La turbolenza è considerata lo **stato naturale** per il **movimento dei fluidi**, con ogni flusso che tende a evolvere verso un **regime turbolento**. In tale stato, l'**energia meccanica** del flusso viene trasformata in **calore**.

La turbolenza è un fenomeno ubiquitario, presente in una vasta gamma di applicazioni:

- geofisica, con numeri di Reynolds dell'ordine di 10^9 , alle previsioni meteorologiche, all'ingegneria ambientale;
- sistemi ingegneristici, fino alle applicazioni aerospaziali e navali, con numeri di Reynolds rispettivamente dell'ordine di 10^8 e 10^9 ;
- aerodinamica dei veicoli, con numeri di Reynolds dell'ordine di 10^6 , nei sistemi di combustione;
- flussi biomedici, con numeri di Reynolds dell'ordine di 10^3 .

La comprensione della turbolenza è fondamentale per ottimizzare questi sistemi e migliorare le prestazioni in vari campi della scienza e dell'ingegneria.

La turbolenza gioca un ruolo cruciale nell'**incrementare il trasporto di massa, quantità di moto ed energia**, risultando in un'**intensificazione dei processi di miscelazione**. Questo fenomeno comporta che i meccanismi di trasporto per le grandezze scalari interessate non siano più unicamente influenzati dal gradiente della grandezza in questione. Ad esempio, in condizioni laminari, il **trasporto termico** è governato esclusivamente dalla conducibilità termica del fluido e, di conseguenza, è direttamente proporzionale al gradiente di temperatura. Tuttavia, in **condizioni turbolente**, il trasporto di calore è **notevolmente potenziato dalle fluttuazioni del campo di velocità**, che promuovono il movimento di pacchetti di fluido attraverso l'agitazione turbolenta. Pertanto, la comprensione, l'analisi e la previsione della turbolenza diventano elementi fondamentali per la stima accurata di grandezze ingegneristiche critiche. La turbolenza, quindi, non è solo un fenomeno fisico complesso, ma anche un aspetto vitale nell'ingegneria dei fluidi, che richiede attenzione dettagliata per ottimizzare i sistemi e garantire l'efficienza operativa.

I **benefici macroscopici** della turbolenza si manifestano in vari modi significativi. I vantaggi sono i seguenti:

- l'**aumento del mixing**, che facilita l'omogeneizzazione di diverse sostanze in un flusso fluido.
- la turbolenza contribuisce all'**incremento dello scambio termico**, elemento cruciale nei sistemi di raffreddamento. Questo è ottenuto attraverso l'uso di promotori di turbolenza come costolature, perni, fossette, pilastri e alettature, che intensificano il trasferimento di calore.
- Un altro aspetto positivo è la **riduzione del drag**, particolarmente vantaggioso in oggetti aerodinamici.
- La turbolenza rende il **flusso più stabile e prevedibile**, nonostante la **maggior disuniformità**. Quest'ultima caratteristica indica che il campo di moto diventa variabile sia nello spazio che nel tempo, generando strutture tridimensionali complesse. Queste strutture portano a un fronte di discontinuità più irregolare ed esteso.
- Infine, la turbolenza gioca un ruolo fondamentale nella **generazione di rumore aerodinamico**.

La turbolenza è un fenomeno complesso e multidimensionale, caratterizzato da un **comportamento non-stazionario e tridimensionale**. Questa instabilità dinamica è evidenziata dalla presenza di **vorticità**, ovvero la formazione di vortici, noti anche come eddies, che contribuiscono a una variazione delle componenti di velocità all'interno del flusso. Questi vortici sono elementi chiave della turbolenza, manifestandosi in **strutture coerenti di moto vorticoso** che, nonostante il loro **comportamento caotico**, seguono una **logica deterministica**, sebbene emergano in posizioni casuali. Questa natura imprevedibile rende inadeguati gli approcci puramente statici o deterministici nella risoluzione della turbolenza, richiedendo invece un'analisi che combini metodi medi e stocastici per una descrizione accurata della formazione di tali strutture.

La turbolenza **si estende su un vasto spettro di scale**, con fluttuazioni di velocità che si verificano su dimensioni molto diverse. I vortici presenti nel flusso turbolento sono definiti da scale di lunghezza, velocità e tempo variabili, e la coesistenza di vortici di grandi e piccole dimensioni è una caratteristica distintiva del fenomeno. Questa interazione tra scale diverse è fondamentale per il processo di cascata energetica, che descrive il trasferimento continuo di energia dalle scale maggiori a quelle minori, dove avviene la dissipazione.

La turbolenza può essere descritta come un **fenomeno continuo**, governato da un insieme di equazioni di Navier-Stokes valide sotto l'ipotesi di mezzo continuo. Anche le scale più piccole del fenomeno turbolento sono significativamente maggiori di qualsiasi scala molecolare, permettendo così l'applicazione dell'ipotesi di continuità. Inoltre, la turbolenza è un fenomeno che si autoalimenta, innescato da perturbazioni inevitabili che si verificano all'interno del flusso. Questa autogenerazione è un aspetto cruciale della dinamica dei fluidi e richiede una comprensione approfondita per la modellazione e la previsione del comportamento dei fluidi in condizioni turbolente.

La turbolenza è un fenomeno che possiede una **memoria intrinseca**; non è possibile definire lo stato turbolento di un fluido basandosi unicamente sulle condizioni locali come la temperatura. Per una descrizione accurata della turbolenza in un dato momento, è essenziale considerare la storia completa del flusso. Inoltre, lo stato dinamico di un flusso in una specifica posizione non può essere adeguatamente compreso o previsto se si prendono in considerazione soltanto le condizioni locali e immediate. La comprensione della turbolenza richiede un approccio che integri sia le informazioni istantanee che quelle storiche del movimento del fluido.

3.1. Energy Cascade

L'Energy Cascade descrive il **flusso di energia** in un sistema turbolento, dalle scale più grandi a quelle più piccole. L'energia entra nel sistema alle scale maggiori, comparabili con il flusso principale $[L_0, U_0 \text{ con } Re_0 = o(Re)]$, dove la produzione di energia cinetica turbolenta dipende dalle **condizioni al contorno e iniziali**, ed è generalmente **anisotropa**. Man mano che l'energia si trasferisce a scale più piccole, i **vortici si disgregano in strutture più piccole**, con un trasferimento di energia indipendente dalla scala. Alle scale più piccole in assoluto, l'energia viene dissipata in calore, secondo l'**ipotesi di Kolmogorov di isotropia locale**.

Punti chiave:

- L'energia entra nel sistema alle scale più grandi
- La produzione di energia cinetica turbolenta dipende dalle condizioni al contorno e iniziali
- Il processo è generalmente anisotropo alle scale maggiori
- L'energia si trasferisce progressivamente a scale di dimensione minore
- Il trasferimento di energia è indipendente dalla scala L : $\frac{k(L)}{\tau(L)} \propto \frac{U^2(L)}{\tau(L)} = \varepsilon$
- Alle scale più piccole, l'energia viene convertita in energia termica
- Si verifica un fenomeno di "back-scattering" dalle scale minori a quelle maggiori
- Alle scale più piccole, si applica l'ipotesi di Kolmogorov di isotropia locale
- Il grafico mostra le diverse fasi: produzione, cascata inerziale e dissipazione

3.2. Scala di Kolmogorov e inertial subrange

La **scala di Kolmogorov** e l'**inertial subrange** sono concetti fondamentali nella teoria della turbolenza, basati sulle ipotesi di similarità di Kolmogorov.

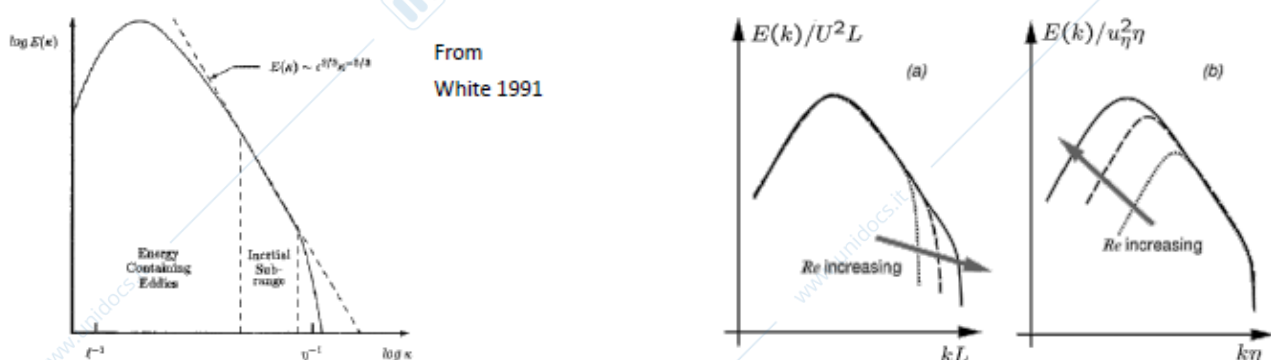
- La **prima ipotesi di similarità di Kolmogorov** afferma che a numeri di Reynolds sufficientemente alti, le **caratteristiche statistiche** del moto alle scale più piccole sono determinate univocamente dalla **viscosità cinematica** ν e dalla **dissipazione di energia** ε . Questo permette di definire **scale caratteristiche di lunghezza** (η), **velocità** (U_η) e **tempo** (τ_η) in funzione di ν , ε e del numero di Reynolds. Queste scale, note come scale di Kolmogorov, rappresentano le dimensioni dei vortici più piccoli dove avviene la dissipazione viscosa dell'energia:

$$\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4} = l_0 \text{Re}^{-3/4} \quad U_\eta = (\nu \varepsilon)^{1/4} = U_0 \text{Re}^{-1/4} \quad \tau_\eta = (\nu / \varepsilon)^{1/2} = \tau_0 \text{Re}^{-1/2}$$

- La **seconda ipotesi di similarità di Kolmogorov** estende questo concetto alle scale intermedie, affermando che le loro **caratteristiche statistiche** dipendono **solo da** ε e sono **indipendenti da** ν . Questa regione, chiamata **inertial subrange**, è caratterizzata da un trasferimento di energia dalle scale più grandi a quelle più piccole senza dissipazione significativa. Questo ci permette di andare a costruire la tipica forma dello spettro di energia di un campo di moto turbolento in funzione della dimensione caratteristica delle scale stesse.

Le formule presentate (η , U_η , τ_η) mostrano come queste scale dipendano dal **numero di Reynolds**, evidenziando che all'**aumentare di Re**, le **scale di Kolmogorov diventano sempre più piccole rispetto alle scale caratteristiche del flusso**.

I grafici illustrano lo **spettro di energia** in funzione del **numero d'onda** k . Si nota chiaramente la distinzione tra la **zona di produzione di energia** (grandi scale), l'**inertial subrange** (pendenza $-5/3$ nella scala log-log), e la **zona di dissipazione** (piccole scale).



All'aumentare del numero di Reynolds, l'inertial subrange si estende, separando maggiormente le scale di produzione da quelle di dissipazione.

3.3. Flussi turbolenti

I **flussi turbolenti liberi**, noti come "**free shear flows**", sono un importante tipo di flusso turbolento che si verifica lontano dalle pareti. La turbolenza in questi flussi è generata principalmente dalle **differenze nelle velocità medie** tra diverse regioni del flusso. Esempi tipici includono **getti liberi** (free jets), **strati di miscelazione** (mixing layers) e **scie** (wakes).

Una caratteristica fondamentale di questi flussi è la loro **proprietà di auto-similarità** (self-similarity). Questo significa che il profilo di velocità media, quando normalizzato opportunamente, può essere descritto come una funzione di una variabile spaziale anch'essa normalizzata. Matematicamente, questo si esprime come $U_n = U/U_{ref}$ che è funzione di $y_n = y/y_{ref}$, dove U è la velocità locale, U_{ref} una velocità di riferimento, y la coordinata spaziale e y_{ref} una lunghezza di riferimento.

Un'altra caratteristica importante è la **tridimensionalità** che si sviluppa a seguito dell'**instabilità delle strutture laminari iniziali**. Questo processo porta alla formazione di strutture coerenti come anelli vorticosi (vortex rings), instabilità di Kelvin-Helmholtz e il distacco di vortici (vortex shedding).

I **flussi turbolenti delimitati da pareti (wall bounded flows)** sono di grande interesse ingegneristico e si caratterizzano per lo sviluppo di uno **strato limite** tra il flusso indisturbato e la parete. Questi flussi presentano una struttura complessa, suddivisa in quattro **regioni principali** con fisica differente:

1. **Viscous Sublayer** ($y^+ < 5$): Dominata dagli **sforzi viscosi**, con un profilo di velocità lineare. In altre parole, gli sforzi viscosi sono molto più grandi degli sforzi turbolenti.

$$\frac{\partial U}{\partial y} \rightarrow u^+ = y^+$$

2. **Buffer Layer** ($5 < y^+ < 25$): Zona di transizione dove sforzi viscosi e turbolenti sono comparabili.

3. **Logarithmic Layer** ($y^+ > 25 \div 60$): Dominata dagli **sforzi turbolenti**, con un profilo di velocità logaritmico. Il flusso è insensibile alle condizioni esterne.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{u_r}{ky} \rightarrow u^+ = \left(\frac{1}{k}\right) \log y^+ + B$$

dove k è la costante di von Kármán.

4. **Wake Region** ($y^+ > 30\% \delta$): Influenzata dalle condizioni esterne del flusso.

$$\tau_w = \rho \nu \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} \quad u_r = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad y^+ = \frac{u_r y}{\nu}$$

dove u_r è la **velocità di attrito**. La **tensione di taglio alla parete** τ_w è legata al gradiente di velocità alla parete.

Il grafico sopra mostra la struttura dello strato limite, mentre quello a destra mostra i contributi relativi degli sforzi viscosi e di Reynolds al variare della distanza dalla parete.

Questa struttura complessa determina il comportamento del campo di moto e della turbolenza vicino alla parete, con un picco di energia cinetica turbolenta osservabile in prossimità del buffer layer, nella transizione tra la zona inerziale e quella viscosa.

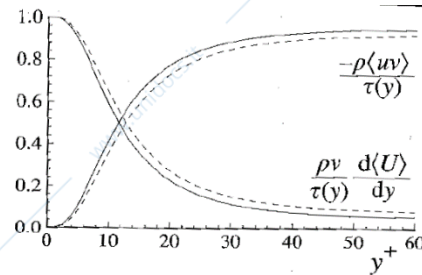
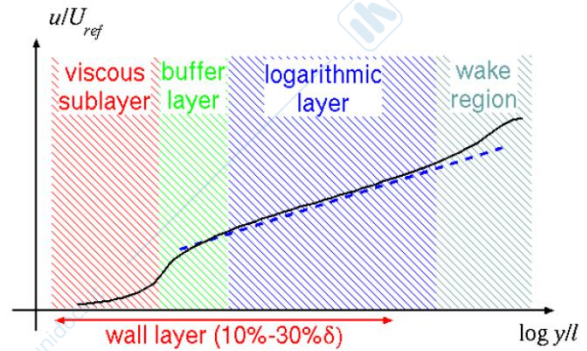
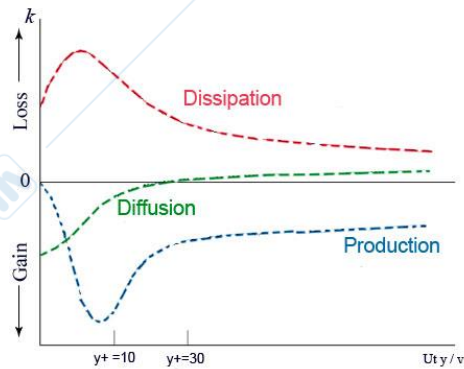


Fig. 7.4. Profiles of the fractional contributions of the viscous and Reynolds stresses to the total stress. DNS data of Kim *et al.* (1987): dashed lines, $Re = 5,600$; solid lines, $Re = 13,750$.

La turbolenza all'**interno dello strato limite** dà origine a strutture distinte quali i vortici, la cui formazione è notevolmente influenzata dalla superficie di contatto. Esistono principalmente due tipi di queste strutture:

- gli **"Streaks"**, situati nel sottile strato viscoso, rappresentano l'interazione tra la finitura superficiale del muro e il sottile strato viscoso stesso, manifestandosi attraverso una serie di strutture che alternano velocità elevate e ridotte;
- gli **"Hairpins"**, localizzati nello strato logaritmico, sono strutture peculiari che emergono all'interfaccia tra lo strato logaritmico e il sottile strato viscoso, caratterizzate da un'estensione e sollevamento di tubi di vorticità perpendicolari al flusso principale, noti come quasi streamwise vortex tube nel sottile strato viscoso.

Picco di produzione di energia cinetica turbolenta vicino al buffer layer (sotto regione all'interno del flusso turbolento vicino a una parete, situata tra il sottostrato viscoso e lo strato logaritmico).



3.4. Equazioni di Navier-Stokes per flussi turbolenti

Le **equazioni di Navier-Stokes**, quando applicate ai **flussi turbolenti**, mantengono la stessa forma di quelle per i **flussi**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{U} = 0$$

$$\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{U} \vec{U} = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\mu (\nabla \vec{U} + \nabla \vec{U}^T) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{U}) \right] + \vec{F}_b$$

$$\frac{\partial \rho h_0}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{U} h_0 = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi + S_h$$

laminari, tuttavia, si differenziano per il **comportamento fisico** che manifestano. Queste equazioni sono composte da termini che rappresentano gli **effetti temporali, convettivi, diffusivi e di sorgente**, e si distinguono per la loro marcata **non linearità**.

Nei flussi turbolenti, le equazioni formano un **sistema accoppiato**:

- esiste un **forte legame** tra l'equazione del momento e quella della continuità, mediato dal gradiente di pressione;
- un **legame più tenue** con l'equazione dell'energia, che assume importanza in presenza di variazioni di densità.

Contrariamente a certi scenari di flusso laminare, dove è possibile introdurre semplificazioni come la stazionarietà o la riduzione dimensionale del problema, i flussi turbolenti precludono tali semplificazioni a causa della loro complessità intrinseca.

Le equazioni di Navier-Stokes, pilastri della fluidodinamica, descrivono con precisione i fenomeni associati ai flussi turbolenti. Tuttavia, risolvere direttamente queste equazioni per analizzare il moto turbolento può comportare un onere computazionale significativo.

Una **soluzione esatta della turbolenza**, che non si avvale di modelli approssimativi come le RANS, richiede l'impiego dell'**equazione nella sua forma integrale**, evitando di semplificarne gli effetti sulla media del campo di moto. È fondamentale **non presupporre la stazionarietà** del flusso turbolento, né **ridurre la complessità a modelli mono o bidimensionali**, poiché ciò eliminerebbe le **caratteristiche intrinseche della turbolenza**, come l'instazionarietà. Inoltre, è importante evitare semplificazioni che introducano simmetria e periodicità non presenti nel fenomeno reale.

3.5. Studio di flussi turbolenti

Lo studio dei flussi turbolenti può essere affrontato attraverso tre approcci principali:

- L'**approccio teorico** è limitato a casi molto semplici e non turbolenti.
- Quello **sperimentale**, sebbene fondamentale, può essere costoso e limitato nelle condizioni di investigazione.
- L'**approccio computazionale** emerge come una via promettente, permettendo l'ottimizzazione di design innovativi e l'esplorazione di condizioni difficilmente replicabili sperimentalmente, pur presentando sfide legate all'accuratezza dei modelli utilizzati.

Si esplorano aspetti come la fisica del problema, la caratterizzazione ingegneristica del flusso (lift, drag, trasferimento di calore) e le caratteristiche globali influenzate dalle piccole scale. Vengono anche considerati i vincoli di tempo e risorse, spaziando dalla ricerca di base alle applicazioni industriali rapide. Inoltre, si evidenziano diversi livelli di accuratezza richiesti, dall'analisi qualitativa a quella quantitativa dettagliata.

Il dilemma centrale presentato è se risolvere direttamente le equazioni o modellarle, sottolineando la complessità e le sfide metodologiche nello studio dei flussi turbolenti.

3.6. Approcci computazionali

Si elencano i principali approcci computazionali per lo studio dei flussi turbolenti, partendo dalle **equazioni di Navier-Stokes (NS)** che contengono tutte le informazioni necessarie per la **modellazione fisico-matematica** di un **flusso turbolento**. Tuttavia, estrarre direttamente queste informazioni dalle equazioni NS è computazionalmente costoso, soprattutto quando si vuole risolvere le scale più piccole di turbolenza. I vari approcci computazionali si differenziano per il modo in cui gestiscono le informazioni: alcune vengono risolte direttamente, altre vengono modellate.

Ecco una panoramica dei tre principali approcci discussi nell'immagine:

1. Direct Numerical Simulation (DNS):

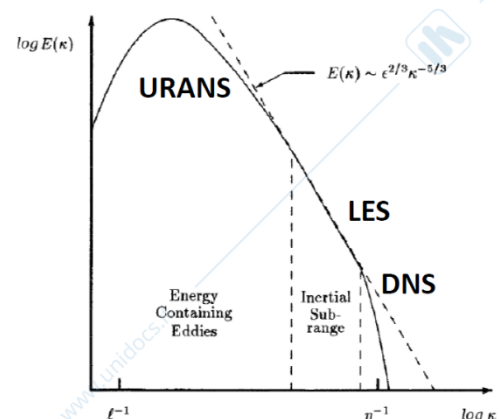
- Risolve direttamente tutte le scale spaziali e temporali del flusso
- Utilizza una griglia sufficientemente fine e passi temporali molto piccoli
- Cattura l'intero spettro delle scale di turbolenza
- È l'approccio più accurato, ma anche il più costoso computazionalmente

2. Large Eddy Simulation (LES):

- Risolve direttamente le scale più grandi del flusso
- Modella le scale più piccole (subgrid scales, tipicamente $n < I < I_{Ta} \approx 10\eta$) mediante un filtro spaziale
- Offre un compromesso tra accuratezza e costo computazionale
- Cattura una parte significativa dello spettro di turbolenza

3. Reynolds (Favre) Averaged Navier Stokes equations (RANS):

- Modella tutte le scale di turbolenza
- Fornisce una soluzione media statistica del flusso
- Considera solo gli effetti della turbolenza sul moto medio
- Può includere effetti non stazionari (URANS)
- È l'approccio meno costoso computazionalmente ma anche il meno dettagliato

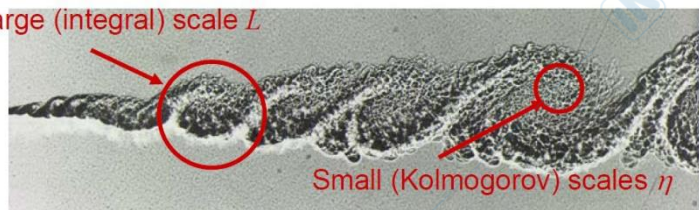


Questi approcci formano una gerarchia in termini di risoluzione e costo computazionale, con il **DNS** che offre la massima accuratezza ma al costo più elevato, il **RANS** che è il più efficiente ma meno dettagliato, e il **LES** che si posiziona come un compromesso tra i due estremi.

3.6.1. Direct Numerical Simulation (DNS)

L'analisi dei flussi turbolenti richiede un notevole impegno computazionale, specialmente quando si considera l'aumento del numero di Reynolds. Questo parametro è infatti indicativo della complessità del flusso, che cresce con l'aumentare delle dimensioni del volume di calcolo.

- **Complessità computazionale:**
 - La DNS richiede risorse di calcolo enormi e tempi computazionali molto lunghi
 - Questi requisiti aumentano drasticamente con l'aumento del numero di Reynolds
- **Dimensionamento del problema:**
 - La dimensione del **volume di calcolo** (I_0) e del **volume di controllo** (η) sono correlate
 - Il **numero totale di punti griglia** ($N_x * N_y * N_z$) scala approssimativamente come $Re^{\frac{9}{4}}$
- **Aspetti temporali:**
 - Il **tempo caratteristico** del fenomeno (T) e il **time step di integrazione** (τ_η) sono correlati
 - Il **numero di passi temporali** (N_T) scala approssimativamente come $Re^{\frac{1}{2}}$
- **Costo computazionale totale:**
 - Combinando gli aspetti spaziali e temporali, il **costo totale** ($N_x * N_y * N_z * N_T$) scala come $Re^{\frac{11}{4}}$
 - Questo rende estremamente complesso affrontare flussi di interesse applicativo con numeri di Reynolds elevati
- **Esempi pratici:**
 - Per $Re = 10^4$, sono necessarie circa 10^3 ore CPU su una macchina Gflop
 - Per $Re = 10^9$, sono necessarie circa 10^{11} ore CPU su una macchina Tflop
- **Importanza scientifica:**
 - La DNS è uno strumento fondamentale per lo studio della turbolenza
 - **Fornisce una soluzione completa nello spazio e nel tempo**
 - Permette di descrivere fenomeni difficilmente investigabili sperimentalmente senza interferenze
- **Scale di turbolenza:**
 - L'immagine mostra le diverse scale coinvolte nella turbolenza
 - Vengono evidenziate le **Large (integral) scales** (L) e le **Small (Kolmogorov) scales** (η)



In sintesi, la DNS offre un'accuratezza senza pari nello studio dei flussi turbolenti, ma il suo utilizzo è limitato a numeri di Reynolds relativamente bassi a causa dell'enorme costo computazionale. Nonostante ciò, rimane uno strumento insostituibile per la ricerca di base sulla turbolenza.

3.6.2. Large Eddy Simulation (LES)

La simulazione LES è un approccio avanzato per modellare il flusso turbolento, in cui la soluzione, e in particolare la **componente turbolenta**, viene **decomposta** attraverso un filtro in due parti:

- le **scale maggiori** (risolte direttamente);
- le **scale subgrid** (modellate).

Le **scale subgrid** sono così denominate perché il **filtro** utilizzato nelle equazioni LES di Navier-Stokes corrisponde alla **dimensione della griglia di calcolo**. Di conseguenza, le **fluttuazioni di velocità** con dimensioni inferiori alla griglia non sono risolte direttamente e devono essere modellate per tenere conto dei loro effetti significativi sul bilancio energetico complessivo del flusso. I modelli utilizzati per le scale subgrid sono tipicamente **isotropi**, il che significa che la struttura della turbolenza a queste scale minori è più semplice da rappresentare, facilitando così la modellazione. A scale maggiori, la LES conserva una correlazione più stretta con la turbolenza rispetto alla simulazione diretta della turbolenza (DNS), risultando in un costo computazionale più contenuto.

Riassumendo, le caratteristiche principali della LES includono:

- Le **scale integrali** che variano poco con il numero di Reynolds (Re), rendendo il costo computazionale quasi indipendente da Re :

$$N_x * N_y * N_z \propto Re^{0.4}$$

- Le **scale subgrid** sono isotrope e presentano un comportamento universale, il che semplifica la loro modellazione.

Tuttavia, **vicino alle pareti**, la **quota di energia cinetica turbolenta** da risolvere è dominata dalle scale minori. Per ottenere una simulazione accurata, è necessario risolvere circa l'80% dell'energia turbolenta totale, il che richiede la discretizzazione di scale molto piccole a causa dell'effetto di smorzamento delle pareti sulle fluttuazioni turbolente. Questo requisito porta a costi computazionali significativi.

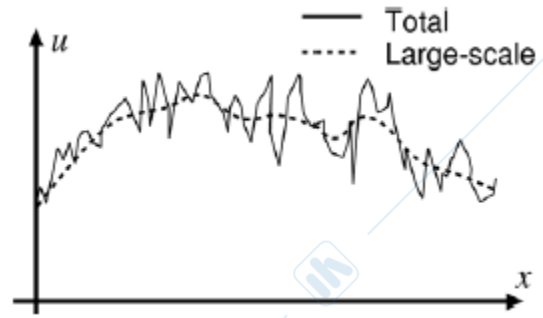
Riassumendo:

- le **dimensioni delle scale** rilevanti vicino alle pareti sono espresse in **wall units**,
- la **velocità rappresentativa** è definita come la velocità di attrito ($u_\tau \approx Re^9$).
- la **spaziatura della griglia** rimanga costante per garantire l'accuratezza dei risultati ($\Delta x^+ = \Delta x \cdot u_\tau / \nu$).
- Il **principale vincolo di costo** per la Simulazione delle Grandi Vortici (LES) è la necessità di una **scalatura comparabile** con quella della Simulazione Numerica Diretta (DNS) vicino alle pareti.
- Le **Wall functions** offrono solo una soluzione parziale al problema, poiché la loro accuratezza è limitata.

Per superare queste limitazioni, si introducono **modelli ibridi**. La **Detached Eddy Simulation (DES)** permette un **passaggio automatico** dalla modellazione RANS vicino alla parete a una modellazione LES nel flusso libero. Questo approccio consente una **risoluzione parziale**, ma **diretta** delle **strutture turbolente**, ed è fondamentale per analizzare fenomeni strettamente correlati alla turbolenza, come la combustione turbolenta, gli effetti di scia e le reazioni chimiche.

In generale, per tutti gli effetti legati all'instazionarietà delle scale turbolente, che non sono influenzati dalle caratteristiche specifiche del dispositivo e che determinano il comportamento del flusso, la LES fornisce una descrizione quasi esatta. Tuttavia, nei casi con alti numeri di Mach e una forte influenza della geometria sul flusso, i vantaggi della LES sono marginali a causa degli elevati numeri di Reynolds coinvolti.

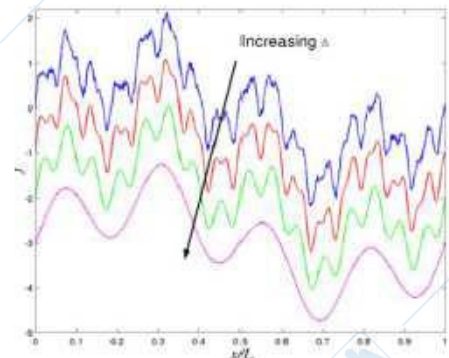
La Large Eddy Simulation si basa sulla riformulazione delle equazioni di Navier-Stokes, con l'obiettivo di **catturare non solo il moto medio** (RANS), ma anche le **scale spazio-temporali più grandi** nella loro interezza. Il concetto chiave è l'applicazione di un **filtro passa-alto alle equazioni**, che limita la soluzione alle strutture al di sopra di una certa dimensione specifica.



Questo processo di filtraggio è realizzato attraverso l'operatore indicato come:

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \Delta) \phi(\mathbf{x}', t) dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

Il **processo di filtraggio** è essenzialmente una **media spaziale locale** che dipende dalla lunghezza del filtro stesso. Incrementando questa lunghezza, si eliminano progressivamente le influenze di scale dimensionali sempre maggiori. È possibile osservare, attraverso la rappresentazione grafica, come **filtri di piccole dimensioni** siano sensibili a minime oscillazioni, mentre un **filtro di dimensioni maggiori** consente di isolare e analizzare solamente le frequenze più elevate. Il filtro più comunemente impiegato, soprattutto per la discretizzazione nelle simulazioni ai volumi finiti, è il **filtro Top-hat**, noto anche come **box filter**.



$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \Delta) = \begin{cases} 1/\Delta^3 & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq \Delta / 2 \\ 0 & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > \Delta / 2 \end{cases}$$

Nell'ambito della discretizzazione delle equazioni di Navier-Stokes filtrate per i volumi finiti, il filtro adottato corrisponde implicitamente alla dimensione caratteristica della griglia di calcolo. Di conseguenza, il **filtro di cut-off**, indicato con Δ , è definito (nella formulazione FVM) in base a:

$$\Delta = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

Quando si applica il filtro, si ottiene un'equazione che include il termine \bar{u} , rappresentante il **vettore della velocità filtrata**, a confronto con u che indica il valore **non filtrato** e quindi teoricamente esatto:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \text{div}(\text{grad}(\bar{u})) - (\text{div}(\rho \bar{u} \bar{\mathbf{u}}) - \text{div}(\rho \bar{u} \bar{\mathbf{u}}))$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \text{div}(\text{grad}(\bar{v})) - (\text{div}(\rho \bar{v} \bar{\mathbf{u}}) - \text{div}(\rho \bar{v} \bar{\mathbf{u}}))$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{w})}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{w} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \text{div}(\text{grad}(\bar{w})) - (\text{div}(\rho \bar{w} \bar{\mathbf{u}}) - \text{div}(\rho \bar{w} \bar{\mathbf{u}}))$$

$$\tau_{ij} = \rho \overline{u_i u_j} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j = \rho \overline{u_i u_j} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j$$

L'effetto delle sub-grid-scales sulle scale principali, esplicito dal tensore corrispondente, deve essere valutato tramite specifici modelli

Termini incogniti

Per quanto riguarda il termine in grassetto \bar{u} , si giunge a formulazioni che corrispondono alle **equazioni di Navier-Stokes in condizioni laminari**. Nelle **equazioni RANS** emergono termini aggiuntivi che correlano il prodotto del valore istantaneo filtrato con il valore filtrato. Questi termini incogniti contribuiscono alla formazione di un **tensore** per la conservazione della quantità di moto, analogo al tensore degli sforzi di Reynolds osservato nelle equazioni mediate secondo Favre. In questo contesto, tali termini rappresentano i **trasporti** e gli **sforzi di taglio** derivanti dall'**interazione tra la turbolenza non risolta e quella risolta**. Questo sforzo è anche denominato τ_{sgs} indicando la **scala subgrid**, che rimane un termine incognito nelle equazioni poiché il suo comportamento non è completamente descrivibile.

Espandendo questo concetto in base alla definizione di filtro, si ha:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{x}, t) + \phi'(\mathbf{x}, t)$$

To be modelled (below filter)
Solved (above filter)

$$\tau_{ij} = \rho \overline{u_i u_j} - \rho \overline{u_i} \overline{u_j} = \underbrace{(\rho \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \rho \overline{u_i} \overline{u_j})}_{\text{Leonard tensor, represents interactions among large scales}} + \underbrace{\rho \overline{\bar{u}_i u'_j} + \rho \overline{u'_i \bar{u}_j} + \rho \overline{u'_i u'_j}}_{\text{Reynolds stress-like term, represents interactions among SGS}}$$

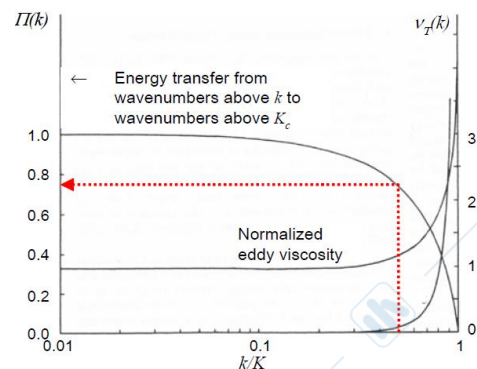
Clark tensor - cross-scale interactions between large and SGS

Il valore istantaneo si determina sommando il **valore filtrato** al **valore modello**; per gli sforzi di sottogriglia, si considera la somma dei termini menzionati.

Il termine τ_{ij} , influenzato dai valori filtrati, definisce l'equazione introducendo un termine di trasporto, ovvero **sforzi supplementari** che rappresentano un effetto cruciale delle scale non risolte sulle scale risolte. Questo tipo di termini si manifesta in ogni equazione scalare di trasporto filtrata che si intende integrare nel set di equazioni, come l'energia o la conservazione di altre grandezze scalari, presentando un termine analogo.

Gli **sforzi di sottogriglia** non sono completamente disaccoppiati dal campo risolto, ma interagiscono reciprocamente. Lo scambio energetico tra le scale di griglia e quelle di sottogriglia è particolarmente intenso vicino alla dimensione del filtro. Per modellare questi sforzi, si adotta comunemente l'ipotesi di Boussinesq, presupponendo che ogni componente del tensore sia proporzionale, attraverso un coefficiente di viscosità non specificato, al tensore delle deformazioni del flusso (strain rate del flusso).

$$\tau_{sgs} = -2\nu_{sgs} \bar{S}_{ij} \quad \nu_{sgs} = (C_s \Delta)^2 \|S\| \quad \leftrightarrow \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$



A differenza dell'approccio RANS, la viscosità ν_{sgs} è proporzionale al modulo di S . Tale coefficiente, confrontato con quello dell'approccio RANS, evidenzia una differenza sostanziale: la viscosità turbolenta ν_{sgs} dipende dalla dimensione della griglia e non è una proprietà intrinseca del flusso.

3.6.3. Reynolds (Favre) Averaged Navier Stokes equation (RANS)

Le equazioni di **Reynolds (Favre) Averaged Navier-Stokes (RANS)** rappresentano un approccio computazionalmente efficiente per la simulazione dei flussi turbolenti. Questo metodo si basa sulla risoluzione di una **griglia di calcolo** che è **determinata dal flusso medio** piuttosto che dalle strutture turbolente, il che riduce significativamente il costo computazionale. In particolare, nelle **zone adiacenti alle pareti**, le dimensioni caratteristiche nella direzione y sono simili a quelle utilizzate nel Large Eddy Simulation (LES), consentendo una risoluzione diretta del campo di moto, sebbene questa operazione possa essere dispendiosa per numeri di Reynolds (Re) elevati. L'implementazione delle funzioni di parete, o Wall functions, semplifica ulteriormente il processo e riduce i costi.

La soluzione ottenuta con il metodo RANS è generalmente interpretata come un campo di moto medio, senza fornire dettagli sulla instazionarietà, come nel caso dell'Unsteady RANS (URANS) che è limitato in questo senso, né informazioni sulle strutture turbolente in termini di forma o dimensione. Per simulare l'effetto della turbolenza sul flusso medio, il metodo RANS si affida a modelli di turbolenza, che devono rimanere semplici per mantenere il vantaggio del risparmio computazionale. Tuttavia, questi modelli sono generalmente molto sensibili al caso specifico e alla zona di flusso considerata; ad esempio, la turbolenza vicino alla parete differisce notevolmente dalla turbolenza nel flusso libero. Inoltre, i modelli basati su ipotesi di equilibrio non sono affidabili in zone con gradienti di pressione avversi o in zone di separazione del flusso.

Nonostante queste limitazioni, il metodo RANS rimane uno strumento di semplice impostazione, calcolo e post-elaborazione. La maggiore viscosità effettiva riduce l'influenza delle condizioni iniziali, degli schemi numerici e delle condizioni al contorno. Per queste ragioni, il metodo RANS è considerato lo stato dell'arte per le simulazioni di flusso di interesse industriale, offrendo un compromesso ottimale tra accuratezza, complessità e costo computazionale.

3.7. SGS models

I **modelli SGS** forniscono una descrizione dettagliata dei fenomeni che si verificano all'**interno delle sottogriglie**, ovvero quelle scale più minute non risolte dal filtro. Questi modelli sono particolarmente vantaggiosi in quanto permettono di studiare lo **scambio energetico in condizioni isotrope**. L'**ipotesi di isotropia della turbolenza** è giustificata, eccetto che nelle vicinanze delle pareti, dove il flusso tende naturalmente a dissiparsi e a svilupparsi da uno stato di isotropia. Questa assunzione è ora più facilmente verificabile rispetto al passato. Inoltre, l'**ipotesi di Boussinesq**, che postula un **equilibrio tra lo sforzo turbolento e la deformazione del flusso**, è considerata più valida per le scale di sottogriglia rispetto all'intero spettro della turbolenza. La **modellazione del tensore** di sottogriglia è sostanzialmente analoga a quella del tensore degli sforzi di Reynolds, con l'eccezione dell'introduzione di una **viscosità di sottogriglia**, ν_{sgs} , che è indipendente dal flusso. Questo parametro non è determinato dalle caratteristiche generali della turbolenza, ma piuttosto dal tipo di filtro impiegato e dall'intensità delle deformazioni del fluido.

$$\tau_{sgs} = -2\nu_{sgs}\bar{S}_{ij} \quad \nu_{sgs} = (C_s\Delta)^2 \|S\| \quad \leftrightarrow \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

✓ Con questa assunzione le NSE filtrate risultano praticamente uguali alle RANS

- ν in LES è accoppiata alla griglia
- ν in RANS è una proprietà del flusso e calcolata tramite equazioni di k e ε
- Ruolo del raffinamento della griglia completamente diverso
 - LES maggiore fisica (maggior numero di scale risolte)
 - RANS convergenza soluzione

Il **modello di Smagorinsky** è il più diffuso tra i modelli di scala sub-griglia (SGS) per la simulazione delle correnti turbolente:

$$\tau_{sgs} = -2\nu_{sgs}\bar{S}_{ij} \quad \nu_{sgs} = (C_s\Delta)^2 \|S\| \quad \text{Viscosità di sotto-griglia}$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial\bar{u}_i/\partial x_j + \partial\bar{u}_j/\partial x_i) \quad \text{Strain rate tensor (solved quantities)}$$

Questo modello si basa sull'**ipotesi di un equilibrio turbolento**, ovvero assume che ci sia un equilibrio perfetto nella energy cascade, con un trasferimento di energia costante dalle scale maggiori a quelle minori, senza influenze esterne come interazioni con pareti o confini del flusso. Tuttavia, il **coefficiente di Smagorinsky** deve essere adattato per ogni specifico tipo di flusso per garantire precisione, un compito spesso trascurato a causa della sua complessità. In alternativa, si utilizza il **modello dinamico di Smagorinsky**, che adatta automaticamente il coefficiente C_s in base a modelli aggiuntivi. Ad esempio, applicando un secondo filtro di dimensioni superiori al primo, si possono calcolare due tensioni di sottogriglia correlate da una relazione matematica, permettendo di ottenere un valore di C_s valido per entrambe le tensioni e fornendo una descrizione più generale rispetto a un singolo modello di sottogriglia. Questo approccio offre una rappresentazione più flessibile e meno onerosa dal punto di vista computazionale. Per affrontare le situazioni in cui il modello di Smagorinsky non è efficace, come vicino alle pareti dove le ipotesi di equilibrio e isotropia non sono valide, si ricorre a correzioni. Un esempio è il **modello WALE (Wall Adapting Local Eddy Viscosity)** di Nicoud, che introduce un nuovo invariante che dipende sia dalla deformazione che dalla rotazione del flusso, fornendo così una soluzione più accurata in condizioni di flusso complesse.

Il modello di Smagorinsky è il più antico modello LES (Large Eddy Simulation) e, nonostante la sua semplicità, è ampiamente utilizzato. Tuttavia, presenta alcune limitazioni: non è particolarmente adatto per flussi confinati da pareti, ma può essere adeguato per flussi privi di sforzi di taglio. Il valore della costante di Smagorinsky (C_s) è dell'ordine di $O(10^{-1})$, con valori in letteratura che variano da 0,06 a 0,35. Uno dei principali svantaggi di questo modello è che il valore del coefficiente dipende dalle condizioni del flusso.

Il **modello Smagorinsky-Lilly** rappresenta un'evoluzione, approssimando il coefficiente C_s in termini della **costante di Kolmogorov** C_K attraverso la formula:

$$C_s \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{2} C_K \right)^{-3/4}$$

Questo modello suggerisce valori specifici di C_s per diversi tipi di flusso:

- 0,1 per flussi confinati da pareti,
- 0,18 per turbolenza isotropa e
- 0,24 per flussi privi di sforzi di taglio.

Il **modello Dynamic Smagorinsky** rappresenta un ulteriore passo avanti, permettendo di valutare automaticamente la costante C_s . Applica un **secondo filtro** alle equazioni di Navier-Stokes e utilizza l'**identità di Germano** per collegare gli sforzi di sottogriglia. Introduce il concetto di eddy-viscosity ai tensori degli sforzi e utilizza la minimizzazione ai minimi quadrati di Lilly per determinare C_s . La formula per C_s in questo modello è:

$$C_s(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij}^2}$$

Dove L_{ij} rappresenta il **tensore di Leonard** associato al test-filter e M_{ij} è definito da una complessa espressione che coinvolge il filtro e il gradiente di velocità.

Infine, il **modello Wall Adapting Local Eddy viscosity** (WALE) di Nicoud è stato progettato per superare molte delle carenze del modello Smagorinsky senza aggiungere complessità significative. Si basa sugli invarianti del tensore gradiente di velocità invece del tensore strain-rate usato nel modello di Smagorinsky. Questo approccio permette di riprodurre naturalmente il comportamento nella regione vicino alla parete senza necessità di funzioni di smorzamento, ed è corretto anche per flussi transizionali.

3.8. LES requisiti procedura numerica

I **requisiti fondamentali** per le simulazioni Large Eddy Simulation (LES) richiedono che:

- la griglia sia progettata per **risolvere almeno l'80% dell'energia cinetica turbolenta**, secondo il **criterio di Pope**.
- la **dimensione del filtro** deve superare di un ordine di grandezza la **scala di Kolmogorov**, per prevenire un onere computazionale troppo elevato.
- È essenziale mantenere un'**elevata qualità degli elementi** per prevenire l'introduzione eccessiva di **dissipazione artificiale** attraverso lo skewness, il che potrebbe ostacolare la capacità di risolvere correttamente i fenomeni turbolenti.
- Per quanto concerne la risoluzione a parete, è possibile portare avanti la simulazione fino al sottostrato viscoso e ottenere una soluzione completa dello strato limite turbolento, noto come Wall Resolved "EWS". Questo approccio richiede che $y^+ < 1$, *Streamwise* $X^+ < 150$ ed *Spanwise* $Z^+ < 50$.

È possibile effettuare verifiche sia a priori che a posteriori.

Nelle **verifiche a priori**, che riguardano più il dimensionamento che la verifica stessa, è possibile eseguire una simulazione RANS, sia in regime stazionario che non stazionario, e utilizzare i parametri caratteristici della turbolenza, come $k - w$ e $k - \varepsilon$, per stimare le scale caratteristiche, come la scala integrale e quella di Kolmogorov. Questo permette di ottenere una stima preliminare della dimensione del filtro basata sulla scala di Kolmogorov stimata dalla simulazione RANS. Sebbene questa stima non sia precisa, fornisce una base di partenza utile. Tuttavia, le verifiche a posteriori sono essenziali, poiché le scale di Kolmogorov calcolate dalla LES sono generalmente più accurate di quelle stimate dalla RANS.

Durante le **verifiche a posteriori**, è fondamentale controllare che il **rapporto tra le energie cinetiche** sia superiore a 0,8. Inoltre, è necessario assicurarsi che la **lunghezza di Kolmogorov** sia almeno un ordine di grandezza maggiore rispetto a quella impiegata nell'esperimento.

→ **Verifica diretta**

– Energia cinetica turbolenta di griglia $E_t = \text{tr}(R_t)$ $R_t = \frac{1}{T} \int_T U_i U_j dt$

– Energia cinetica turbolenta di sottogriglia $E_{sgs} = \text{tr} \left(v_{sgs} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$

$$\frac{E_t}{E_{sgs}} > 0.8$$

Criterio di Pope

→ **Verifica indiretta**

– Stima della lunghezza di Kolmogorov $\eta = \left(\frac{V^3}{\varepsilon} \right)^{0.25} \Rightarrow o(\eta) = 0.1 \cdot o(\Delta)$

Criterio di Celik

Man mano che ci si avvicina alla parete e le dimensioni caratteristiche delle scale di turbolenza diminuiscono significativamente, i requisiti per la dimensione della griglia e il suo raffinamento diventano più stringenti nell'ambito della LES. Di conseguenza, nelle applicazioni più comuni, la LES viene spesso combinata con funzioni di parete, che permettono di non risolvere completamente lo strato limite. Originariamente, la LES è stata sviluppata per flussi non fortemente influenzati dal flusso a parete, come ad esempio nello studio di camere di combustione, dove le velocità sono relativamente basse e quindi è possibile trascurare un'analisi dettagliata dello strato limite.

3.9. Condizioni al contorno per LES

Nell'ambito delle **condizioni al contorno** (BC), la simulazione LES incrementa la complessità del fenomeno, rendendo di conseguenza più complesse anche le BC. È essenziale che le BC descrivano la turbolenza con un grado di dettaglio paragonabile a quello adottato dalla LES. Pertanto, è necessario definire con precisione nello spazio e nel tempo tutte le scale di turbolenza per assicurare una rappresentazione accurata dello spettro della turbolenza risolta e delle equazioni da risolvere all'interno del dominio, garantendo così l'evoluzione corretta di tutte le scale della griglia. Questo requisito per le BC può risultare gravoso, e per questo motivo sono state proposte diverse soluzioni alternative.

Per quanto riguarda le **condizioni inlet** (condizioni di ingresso), è indispensabile fornire informazioni complete sulle scale risolte per velocità, temperatura e specie chimiche. Ciò implica:

1. La **definizione di una funzione $f(x, t)$** che emuli la turbolenza e rispetti le scale caratteristiche predefinite. Tale funzione deve potersi adattare agevolmente alle condizioni medie di flusso. Ad esempio, assumendo di impostare una BC di pressione totale all'ingresso, si assegnerà il vettore velocità e si caratterizzerà la turbolenza principalmente attraverso la variabilità virtuale nello spazio e nel tempo della direzione del vettore velocità, piuttosto che del suo modulo, che si adatterà in base allo sviluppo del campo di moto nel dominio. Di conseguenza, la funzione utilizzata per descrivere la turbolenza in ingresso dovrà essere facilmente adattabile alle condizioni di portata in massa che si manifestano nel dominio.
2. L'impiego di condizioni al contorno (BC) di tipo RANS implica l'**introduzione di un flusso laminare**, ovvero uniforme, che può rallentare o addirittura prevenire la transizione verso la turbolenza, allontanandosi così dalla realtà fisica osservabile. È possibile assegnare un valore di energia cinetica turbolenta alla porzione di flusso non risolta dalla griglia di calcolo, ma l'aggiunta di vettori di velocità filtrati e costanti introduce un elemento laminare nel sistema. Questo può avere un impatto significativo sul comportamento successivo del flusso,

influenzando lo sviluppo della turbolenza o impedendo la transizione alla turbolenza. L'utilizzo di BC di tipo RANS è appropriato quando la superficie di contorno è sufficientemente distante dall'area di interesse dello studio. Ad esempio, nell'analisi di una camera di combustione, si può presumere che la maggior parte della turbolenza si sviluppi all'interno del vortice (swirl), rendendo accettabile l'uso di una BC di tipo RANS in tale contesto.

3. Per quanto riguarda il metodo stocastico, esso si basa sull'**uso di funzioni matematiche e statistiche** per definire le **caratteristiche della funzione f** e per descrivere il **comportamento aleatorio della turbolenza**. Questo approccio permette di trattare la natura imprevedibile della turbolenza attraverso modelli probabilistici, fornendo una rappresentazione più accurata del fenomeno rispetto ai metodi deterministici tradizionali.
4. Il **metodo di riciclo** della turbolenza rappresenta un approccio efficace in diverse situazioni aerodinamiche, specialmente quando si tratta di simulare le condizioni di turbolenza tipiche di una galleria del vento. Immaginiamo di analizzare il flusso attorno a un oggetto non aerodinamico all'interno di un tubo: in questo contesto di aerodinamica esterna, la turbolenza è caratterizzata da uno stato di equilibrio e isotropia. La strategia adottata prevede l'uso di una Boundary Condition (BC) di ingresso particolare che inizia la simulazione con una condizione uniforme di tipo RANS. Man mano che la turbolenza si sviluppa a una certa distanza dall'ingresso, si procede a rimappare il campo di velocità nella stessa posizione longitudinale e alla stessa quota y come BC all'ingresso. Questo processo iterativo di riciclo permette alla turbolenza di evolversi naturalmente, e benché l'inizio sia con un flusso laminare, la turbolenza che si forma è fisicamente accurata e risente della presenza dell'oggetto non aerodinamico, specialmente in condizioni subsoniche. Riciclando la turbolenza generata a valle dell'ingresso, si ottiene una soluzione che converge e che rispecchia correttamente lo spettro di turbolenza. Sebbene questo metodo sia applicabile principalmente in aerodinamica esterna, è notevole per il suo onere computazionale dovuto al transitorio iniziale.

In alternativa, si possono impiegare metodi stocastici come il **vortex-generator** o la **sintetic turbulence generation**, che sono formulazioni analitiche volte a riprodurre la funzione di caratterizzazione dello spettro di turbolenza. Generalmente, si raccomanda di estendere la boundary e posizionare l'ingresso lontano dalla zona di interesse per minimizzare l'impatto sul campo di moto e consentire l'uso di condizioni RANS.

Per quanto riguarda le **condizioni outlet** (condizioni di uscita):

1. Nell'ambito delle simulazioni LES, caratterizzate da essere non stazionarie e accurate nel tempo con intervalli temporali molto brevi, emergono **problematiche legate alla riflessione delle onde di pressione**, che l'approccio cerca di mitigare. Al contrario, le simulazioni RANS, a causa di intervalli temporali più ampi, non sono in grado di catturare le onde di pressione acustiche che si formano all'interno del dominio di calcolo. Con l'approccio LES, oltre a modellare la turbolenza, la soluzione risolta nel tempo descrive anche le onde di pressione naturali generate dal flusso e che si propagano nel dominio. Le **condizioni convenzionali di pressione media** imposta sull'uscita presentano il **difetto di riflettere le onde di pressione generate all'interno del dominio**; ciò avviene perché impongono una **condizione di pressione costante**, che viene percepita come il complemento a uno della fluttuazione, risultando così in una riflessione. Tale problema può essere trascurato in certe applicazioni dove l'energia contenuta nelle onde acustiche è irrilevante (ad esempio, nei problemi di aerodinamica esterna, l'energia associata alle fluttuazioni acustiche può essere ignorata all'uscita). Tuttavia, in altri settori, come quello aeroacustico (turbine, combustori, ecc.), è fondamentale poiché può alterare significativamente i risultati. Una strategia per prevenire la riflessione, seppur rudimentale ma efficace, consiste nell'estendere il dominio di calcolo e diradare la mesh nella sua parte terminale. Introducendo un blocco di mesh che induce una significativa dissipazione numerica, le onde di pressione vengono attenuate virtualmente dalla dissipazione artificiale introdotta, eliminando così i problemi di riflessione. Nei domini di elevata complessità, specialmente quelli confinati, è possibile applicare condizioni al contorno non riflettenti utilizzando gli invarianti di Riemann. Questo approccio consente di implementare una condizione al contorno su misura che facilita una trasmissione e riflessione parziale delle onde di pressione. Ad esempio, per modellare il comportamento di un ugello in condizioni di strozzamento, si può ricorrere a questa tecnica per rappresentare accuratamente la parziale riflessione delle onde.

Per quanto riguarda le **condizioni di simmetria** o **vuoto**, è generalmente sconsigliato affidarsi a tali approcci. Anche se la geometria del dominio può essere simmetrica, non necessariamente lo sarà il flusso. È noto che le **simulazioni LES che adottano condizioni di simmetria possono non essere affidabili**. Inoltre, l'imposizione di periodicità può influenzare significativamente la simulazione, a seconda della sua collocazione. Ad esempio, nell'analisi di un vano palare, l'adozione di periodicità potrebbe omettere gli effetti dell'interazione tra la scia di un profilo e un altro, fissando frequenze sulle strutture che potrebbero non corrispondere alla realtà. Pertanto, è consigliabile evitare la simmetria e valutare attentamente l'uso della periodicità, come nel caso di **simulazioni full-annular** per studi aeroacustici di combustori.

3.10. Near-wall treatment

Possiamo riassumere i concetti chiave relativi al **trattamento delle pareti** nella fluidodinamica computazionale, concentrandoci in particolare sugli approcci di Large Eddy Simulation (LES):

Il trattamento delle pareti è cruciale nella modellazione della turbolenza a causa del **comportamento complesso del flusso fluido vicino ai confini solidi**. Nello **strato logaritmico** vicino alla parete, la **scala di lunghezza turbolenta** (L_t) dei grandi vortici è espressa come $L_t = \kappa y$, dove y è la distanza dalla parete e κ è una costante. Questa relazione lineare indica che le scale di lunghezza della turbolenza si avvicinano a zero vicino alla parete, richiedendo una risoluzione della griglia estremamente fine per catturare accuratamente la dinamica del flusso.

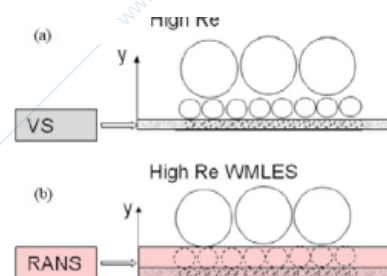
Si possono definire 3 approcci principali per gestire le regioni vicino alle pareti nel LES:

1. **Wall-Resolved LES - WRLES:** Questo metodo risolve direttamente tutte le scale fino allo strato viscoso. Richiede una risoluzione della griglia molto fine, specialmente ad alti numeri di Reynolds dove lo strato viscoso diventa sempre più sottile. Sebbene accurato, WRLES è computazionalmente proibitivo per flussi ingegneristici ad alto numero di Reynolds.
2. **Wall Functions - WFLES:** Questo approccio utilizza funzioni di parete per modellare la regione vicino alla parete, simile ai modelli RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes). È computazionalmente più efficiente, ma può sacrificare parte dell'accuratezza in flussi complessi.
3. **Wall Modeled LES - WMLES:** è un'alternativa che bilancia accuratezza e costo computazionale. Combina i modelli RANS e LES, utilizzando RANS per lo strato molto vicino alla parete e passando alla formulazione LES quando la spaziatura della griglia diventa sufficiente per risolvere le scale locali. Il **modello di Shur** è menzionato come esempio, con l'equazione:

Shur model

$$v_t = f_D \min\left\{(\kappa y)^2, (C_{SMAG}\Delta)^2\right\} S$$

- κ – Von Karman constant
- S – strain rate
- f_D – wall damping function



Questo approccio ibrido permette una simulazione accurata di flussi ad alto numero di Reynolds senza i requisiti estremi di risoluzione della griglia del WRLES.

3.11. Global Hybrid RANS-LES → DES models

I **modelli DES (Detached Eddy Simulation)** rappresentano un campo in continua evoluzione, con nuove varianti introdotte annualmente. La DES originale è stata pioniera in questo ambito. Il concetto fondamentale dietro la DES è l'**uso del filtro di scala**, ovvero la dimensione della griglia computazionale, per facilitare la transizione della soluzione numerica da una simulazione LES (Large Eddy Simulation), tipica delle regioni lontane dalle pareti, a una simulazione RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes), più adatta nelle vicinanze delle pareti, mantenendo inalterata la dimensione del filtro. La sfida principale dei modelli DES risiede nel fatto che la dimensione della griglia è l'unico parametro a disposizione per gestire la **transizione da LES a RANS**, e deve essere scelta con cura per garantire anche una discretizzazione adeguata. A volte, questa unica dimensione può non essere sufficiente, portando a situazioni in cui non si ottengono i benefici né della LES né della RANS. La difficoltà sta quindi nel trovare un equilibrio che soddisfi entrambi gli approcci. Per superare queste limitazioni, sono state sviluppate varianti come la **D-DES (Delayed DES)** e la **SBES (Stress-Blended Eddy Simulation)**, che introducono una funzione di shielding. Questa funzione permette di realizzare la transizione in modo più autonomo rispetto alla dimensione della griglia, basandosi piuttosto sulle caratteristiche locali della turbolenza. Questo approccio consente di individuare le dimensioni ottimali per una transizione efficace da LES a RANS.

Il **vantaggio principale** di questi modelli avanzati è la **capacità di combinare l'accuratezza di una simulazione LES nel free stream** con quella di una **URANS, Unsteady RANS, vicino alle pareti**, fornendo una soluzione time-accurate che cattura la t Questa slide presenta il concetto di modelli ibridi RANS-LES globali, noti anche come Detached-Eddy Simulation (DES). Questi modelli rappresentano un approccio avanzato nella simulazione numerica della turbolenza, combinando i vantaggi dei metodi RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) e LES (Large Eddy Simulation).

Si riporta lo sviluppo di una **procedura di calcolo** che esibisce un **comportamento ibrido**, basata sulla **derivazione di Spalart-Allmaras**. Questo approccio si basa su un bilancio tra produzione e dissipazione della turbolenza, espresso dalla formula:

$$P_v \approx \varepsilon_v$$

Ridefinendo la lunghezza caratteristica, si ottiene uno switch automatico tra la zona LES e la zona RANS:

$$\hat{d} = \min(d, C_{DES}\Delta)$$

Dove \hat{d} è la distanza dalla parete, C_{DES} è una costante del modello, e Δ è la dimensione caratteristica della griglia locale.

Questo approccio permette di utilizzare il modello RANS vicino alle pareti (dove $d \ll \Delta$) e il modello LES lontano dalle pareti (dove $C_{DES}\Delta \ll d$).

Si menziona anche che questa procedura può essere adattata ad altri modelli RANS, come il modello $k - \omega$, dove la lunghezza caratteristica è definita come:

$$l_{k-\omega} = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{\beta * \omega}$$

3.12. Global Hybrid RANS-LES → DES models

Di seguito si illustrano i requisiti della griglia computazionale per la Detached-Eddy Simulation (DES), evidenziando la complessità nella generazione di una mesh adeguata a questo tipo di simulazione ibrida.

La DES richiede una griglia che possa adattarsi a diversi regimi di flusso e modelli di turbolenza in varie parti del dominio computazionale. Le quattro regioni principali sono:

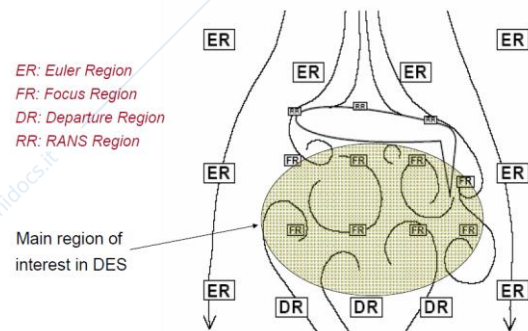
1. **Regione di Euler:** Si estende per la maggior parte del dominio, ma contiene relativamente poche celle. Questa regione è lontana dalle pareti e dalle zone di interesse primario, dove il flusso può essere trattato con approssimazioni meno dettagliate.

2. **Regione RANS:** Qui è cruciale mantenere una spaziatura della griglia corretta per risolvere adeguatamente la viscosità turbolenta. Questa regione è tipicamente vicina alle pareti solide dove il modello RANS è più appropriato.
3. **Regione LES e Focus:** Questa è la zona vicino alla parete dove il flusso separato deve essere risolto con alta precisione. La spaziatura della griglia in questa regione è determinante per l'accuratezza dell'intera soluzione. È qui che il modello LES viene applicato per catturare i dettagli delle grandi strutture turbolente.
4. **Regioni Grigie:** Sono le zone di transizione tra le diverse regioni menzionate sopra. Una zona grigia particolarmente importante è quella che gestisce il passaggio dalla regione RANS alla regione di focus.

Si sottolinea che **generare una mesh adatta per DES** è difficile a causa dei 2 tipi di trattamento previsti (RANS e LES) e della necessità di gestire geometrie spesso più complesse rispetto a quelle tipicamente utilizzate in simulazioni LES pure.

Un punto chiave evidenziato è che il **contenuto turbolento** della **regione di focus** deve essere generato dalle instabilità degli strati di taglio (shear layers) che si distaccano dal profilo. Questo richiede una risoluzione della griglia sufficientemente fine in queste aree per catturare accuratamente la dinamica del distacco e dell'evoluzione delle strutture turbolente.

In sintesi, la creazione di una griglia per DES richiede un attento bilanciamento tra efficienza computazionale (mantenendo una griglia grossolana dove possibile) e accuratezza (raffinando la griglia nelle regioni critiche). Questo approccio permette di ottenere simulazioni dettagliate nelle aree di interesse, mantenendo al contempo un costo computazionale gestibile per configurazioni ingegneristiche complesse.



3.13. SBES - Stress-Blended Eddy Simulation

La **Stress-Blended Eddy Simulation** (SBES) è un metodo avanzato di simulazione fluidodinamica. Il concetto chiave è quello di **"shielding"** (schermatura), che protegge gli strati limite RANS dalla formulazione LES dipendente dalla griglia. Questo affronta una limitazione principale del metodo DES (Detached Eddy Simulation).

Il modello SBES combina i modelli RANS e LES esistenti basandosi sullo **stress**:

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{RANS} f_s + \tau_{ij}^{LES} (1 - f_s)$$

Dove f_s è la **funzione di schermatura**. Una formulazione simile viene utilizzata per la viscosità turbolenta:

$$\mu_t = \mu_t^{RANS} f_s + \mu_t^{LES} (1 - f_s)$$

Queste equazioni mostrano come SBES fonde i contributi RANS e LES, con f_s che controlla la transizione tra i due.

Le caratteristiche principali di SBES includono:

1. Alta protezione asintotica degli strati limite RANS durante il raffinamento della mesh
2. Transizione affidabile e rapida da RANS a LES nelle SSL (Separated Shear Layers)
3. Compatibilità con la modalità WMLES (Wall-Modeled LES)
4. Possibilità di combinare tutti i modelli RANS e LES algebrici
5. Robustezza anche su mesh industriali non perfette

3.14. SST-Scale Adaptive Simulation

La **simulazione adattativa di scala SST (SAS)** rappresenta un'alternativa al metodo DES, distinguendosi per non essere una simulazione LES convenzionale. La SAS utilizza **equazioni mediate secondo Favre**, basate sul modello *URANS* $k - \omega$ SST, e introduce un **termine sorgente supplementare**, PSAS, che modula la **dissipazione di ω** in funzione della **lunghezza di Von Karman L_{vK}** , la quale dipende dalla **derivata seconda della velocità**. Questo approccio mira a catturare la tendenza intrinseca del flusso a diventare instabile. Quando la lunghezza di Von Karman indica un'instabilità naturale del campo di moto, la SAS interviene per modulare l'equazione di ω , avvicinandosi così a una risoluzione LES, in particolare in zone dove la turbolenza è limitata e desiderata. In pratica, si ottiene una LES "like", o simile, attraverso un processo di migrazione automatica verso una griglia di subgrid di primo ordine, attivando la risoluzione della turbolenza in aree localmente instabili.

Nei **campi di moto caratterizzati da forte instazionarietà**, come flussi swirlati o getti di impingement, la soluzione SAS può risultare vicina o talvolta superiore in accuratezza rispetto a un LES tradizionale. Tuttavia, in scenari dove il **flusso non presenta una significativa instabilità naturale** e la **turbolenza rimane confinata a scale più ridotte**, la SAS può non essere altrettanto precisa, manifestando difficoltà nel raggiungere una soluzione stabile e ottimale. Pertanto, la scelta tra SAS e altre metodologie di simulazione dipenderà strettamente dalle caratteristiche specifiche del flusso da analizzare.

L'immagine descrive il metodo SST-Scale Adaptive Simulation (SST-SAS), un approccio ibrido basato sul modello $k-\omega$ SST URANS. A differenza del metodo DES, SST-SAS non è un modello zonale, il che significa che la transizione tra le scale LES e RANS avviene automaticamente basandosi sulla soluzione locale.

- Viene introdotta una lunghezza di VonKarman funzione della derivata seconda della velocità

$$L_{vK} = \kappa \left| \frac{U'}{U''} \right|$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(u_j k)}{\partial x_j} = \tilde{P}_k - \beta^* \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma_k \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \omega)}{\partial x_j} = \gamma 2 S_{ij} S_{ij} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma_\omega \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + P_{SAS}$$

$$P_{SAS} = \max \left[2 \tilde{\zeta}_2 \kappa S_{ij} S_{ij} \left(\frac{L}{L_{vK}^{(t)}} \right)^2 - C \frac{2k}{\sigma_\Phi} \max \left(\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), 0 \right]$$

$$L_{vK}^{(t)} = \max \left(L_{vK}, C_S \sqrt{\frac{\kappa \tilde{\zeta}_2}{\beta / c_\mu - \gamma}} \cdot \Delta \right)$$

Le equazioni mostrate rappresentano il modello matematico del SST-SAS:

- **L'equazione per k** (energia cinetica turbolenta) include i termini standard di trasporto, produzione, dissipazione e diffusione.
- **L'equazione per ω** (frequenza turbolenta specifica) contiene un termine aggiuntivo PSAS, che è la chiave del metodo SAS. In questo termine, L e L_{vK} sono lunghezze caratteristiche.

Queste formule permettono al modello di adattarsi dinamicamente alle strutture turbolente risolte, passando da un comportamento RANS a uno più simile a LES nelle regioni dove la risoluzione della griglia lo consente. Questo approccio mira a combinare l'efficienza computazionale del RANS con la precisione del LES nelle regioni di interesse, senza la necessità di definire esplicitamente zone diverse nel dominio di calcolo.

3.15. Identificazione dei vortici

La nostra soluzione LES o SAS, una volta completata, fornirà un vasto insieme di risultati. In particolare, la LES non solo genererà valori medi, che possono essere calcolati attraverso la media dei risultati non stazionari, ma includerà anche termini transitori e misure istantanee di variabili quali pressione e velocità.

Per identificare queste strutture, è essenziale impiegare tecniche specifiche di identificazione dei vortici in fase di post-elaborazione:

- **Minimo di Pressione Locale** è una tecnica che rileva i vortici attraverso un minimo di pressione lungo l'asse, equilibrato dalle forze centrifughe. Tuttavia, questo metodo può portare a falsi positivi e presenta difficoltà nell'identificare tutti i minimi locali di pressione.
- **Streamlines**, rappresentate da linee di flusso chiuse, possono identificare i vortici; però, questo approccio non è invariante rispetto a trasformazioni galileiane, il che significa che un vortice identificato in un sistema di riferimento potrebbe non essere rilevato in un altro. Inoltre, le linee di flusso sono influenzate dalle fluttuazioni e potrebbero non evidenziare le strutture coerenti del moto.
- **Modulo della Vorticità**, d'altra parte, non è un indicatore affidabile, specialmente quando la vorticità di fondo è dell'ordine di grandezza dei vortici stessi, come nei flussi limitati da pareti, dove il massimo della vorticità si verifica proprio in prossimità della parete. I metodi considerati più accurati includono il Metodo agli Autovalori, che analizza gli autovalori complessi del gradiente di velocità, fornendo la direzione di rotazione (parte reale) e, tramite gli autovettori associati, definisce la forma del vortice.

L'identificazione dei **vortici nella turbolenza**, un fenomeno che comprende strutture spazialmente coerenti (CS) che evolvono nel tempo, è assai complessa. Queste strutture sono cruciali per il **trasporto turbolento**, rendendo importante il loro studio qualitativo e quantitativo. Si introducono adesso i metodi più accurati:

1. **Autovalori complessi del gradiente di velocità** [Chong]:

$$\lambda^3 - P\lambda^2 + Q\lambda - R = 0$$

$$P = \nabla \cdot U ; Q = \frac{1}{2}(\|\Omega\|^2 - \|S\|^2) ; R = \det(\nabla U)$$

$$D = \left(\frac{1}{2}Q\right)^3 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 > 0$$

2. **Positività del secondo invariante del gradiente di velocità** [Hunt]:

Un vortice è identificato quando $Q > 0$

3. **Secondo autovalore di $\Omega\Omega + SS$; $\lambda_2 < 0$** [Jeong and Hussain]:

Questo criterio è più restrittivo e affidabile

L'analisi evidenzia che **metodi basati su Q criterion e λ_2** offrono una migliore capacità di identificazione dei vortici, sebbene siano più complessi da calcolare. Il Q criterion è considerato il miglior compromesso tra accuratezza e complessità computazionale.

Queste tecniche sono fondamentali per comprendere la struttura e la dinamica della turbolenza, con importanti applicazioni in fluidodinamica computazionale e analisi di flussi complessi.

4. Parallel computational Fluid Dynamics

4.1. Serial Optimization

L'ottimizzazione seriale è fondamentale per ridurre il tempo di calcolo totale, migliorare la precisione del modello e preparare il codice per la parallelizzazione. Sebbene il calcolo parallelo sembri più efficiente, l'ottimizzazione seriale rimane cruciale per evitare che le parti non parallele del codice influenzino negativamente le prestazioni della scalabilità parallela.

Nonostante possa sembrare un concetto datato nell'era del calcolo parallelo massivo, rimane cruciale per diverse ragioni:

- **Benefici per calcoli notturni:** Migliora l'efficienza delle simulazioni CFD (Computational Fluid Dynamics) che vengono eseguite durante la notte.
- **Utilità per calcoli CFD giornalieri:** Riduce i tempi di elaborazione per setup di calcolo predefiniti.
- **Importanza nei processi di design e ottimizzazione:** Quando i costi computazionali dipendono più dalla quantità totale di calcoli che dal costo di una singola computazione, l'ottimizzazione seriale permette di:
 - Ridurre il tempo di soluzione per un dato setup.
 - Migliorare l'accuratezza del modello nello stesso tempo di elaborazione.

L'ottimizzazione seriale è particolarmente importante quando si cerca una forte scalabilità parallela, poiché le prestazioni sono principalmente influenzate dalla parte non parallela del codice.

Vincoli dell'ottimizzazione seriale:

- **Leggibilità del codice:** È importante mantenere il codice leggibile e comprensibile, evitando ottimizzazioni che lo rendano complesso.
- **Accuratezza numerica:** Si deve prestare attenzione alle ottimizzazioni che possono influenzare la precisione numerica, come quelle aggressive del compilatore.
- **Requisiti di memoria:** Il codice deve essere ottimizzato per minimizzare i requisiti di memoria, utilizzando tecniche come l'ordinamento delle matrici in modo da migliorare l'accesso ai dati.

Profilazione del codice:

Analizzare il comportamento del codice in fase di esecuzione per identificare le parti più dispendiose in termini di tempo è essenziale per l'ottimizzazione. Nel contesto della CFD, l'uso efficiente della memoria e l'intensità computazionale del codice sono cruciali. Inoltre, sfruttare le capacità di ottimizzazione del compilatore può migliorare significativamente le prestazioni.

Linee guida pratiche:

- **Ridurre il lavoro necessario:** Evitare operazioni costose e limitare l'uso di funzioni trascendenti come radici quadrate e funzioni trigonometriche, che hanno latenze elevate e possono ostacolare le ottimizzazioni del compilatore.
- **Movimento del codice invariante del ciclo:** Spostare le operazioni costanti fuori dai cicli per evitare ricalcoli inutili.
- **Vettorizzazione:** Sfruttare la capacità dei processori moderni di eseguire più istruzioni su dati vettoriali contemporaneamente, migliorando significativamente le prestazioni. In particolare, il modello SIMD (Single Instruction, Multiple Data) consente a un singolo processore di eseguire istruzioni parallele su più dati (vettori) contemporaneamente, anziché elaborare ogni dato scalare uno alla volta. Questa si esegue come:

- **Analisi delle ottimizzazioni del compilatore:** Il primo passo consiste nell'analizzare come il compilatore ottimizza automaticamente il codice. Questa analisi è spesso basata su rapporti di log forniti dal compilatore, che indicano quali parti del codice sono state vettorizzate e quali no.
- **Modifiche al codice sorgente:** Se l'analisi del compilatore mostra che alcune parti del codice non sono state vettorizzate, è necessario intervenire manualmente per migliorare la situazione. Le modifiche includono:
 - **Risoluzione delle dipendenze nei cicli:** Per esempio, riordinare i cicli o usare tecniche come quella red/black per risolvere dipendenze che impediscono la vettorizzazione.
 - **Gestione delle funzioni trascendenti, dei rami condizionali e dei cicli piccoli:** Le funzioni trascendenti (come le funzioni trigonometriche o la radice quadrata) e le condizioni logiche possono ostacolare la vettorizzazione. In alcuni casi, può essere utile riscrivere il codice per minimizzare questi elementi.

4.2. Current HPC architectures

Il termine "**Current HPC architectures**" si riferisce alle **architetture di calcolo ad alte prestazioni (HPC, High-Performance Computing)** attualmente utilizzate per eseguire applicazioni che richiedono potenza computazionale molto elevata. Le architetture HPC sono progettate per affrontare problemi complessi che richiedono enormi capacità di calcolo e gestione di grandi quantità di dati, come simulazioni scientifiche, modellazione climatica, ricerca genomica, analisi finanziarie su larga scala, e molto altro.

1. **MIMD** rappresenta una delle architetture più versatili e popolari nel campo del calcolo parallelo. Nelle architetture MIMD, diversi processori possono eseguire istruzioni differenti su diversi flussi di dati contemporaneamente. Questo consente di avere un'elevata flessibilità e potenza computazionale, dato che ogni processore può gestire compiti diversi in parallelo.
 - **Single Program, Multiple Data (SPMD):** In questa configurazione, più CPU autonome eseguono lo stesso programma simultaneamente, ma su insiemi di dati indipendenti. L'obiettivo è aumentare l'efficienza elaborando grandi volumi di dati simultaneamente, mantenendo la coerenza delle operazioni attraverso l'uso dello stesso codice.
 - **Multiple Program, Multiple Data (MPMD):** Qui, le CPU eseguono programmi diversi su diversi flussi di dati. Spesso, una CPU agisce come "master" e gestisce il coordinamento, mentre le altre CPU, definite "slave", eseguono compiti secondari. Questo modello è particolarmente utile quando si devono gestire applicazioni complesse che richiedono l'esecuzione simultanea di programmi differenti.
2. **Architetture di memoria condivisa e distribuita:** questa sezione distingue tra architetture di memoria condivisa e distribuita, ciascuna con le sue specifiche caratteristiche e sfide.
 - **Memoria condivisa:** in questo modello, tutti i processori condividono uno spazio di memoria globale, il che significa che qualsiasi processore può accedere a qualsiasi indirizzo di memoria. Questo approccio è comune nei sistemi di elaborazione simmetrica (SMP - Symmetric Multi Processing), dove la memoria viene condivisa equamente tra i processori. Un vantaggio di questo modello è la semplicità nella programmazione, poiché i dati sono facilmente accessibili da qualsiasi processore. Tuttavia, il collo di bottiglia principale risiede nell'efficienza e nella larghezza di banda dell'accesso alla memoria, poiché troppi processori che tentano di accedere simultaneamente alla memoria possono rallentare le prestazioni del sistema.
 - **Memoria distribuita:** In questo modello, ogni processore ha il proprio spazio di memoria locale e l'accesso ai dati di altri processori deve avvenire tramite una rete di interconnessione esterna. Le architetture a memoria distribuita sono comuni nei cluster, dove un insieme di server indipendenti collabora per risolvere problemi di calcolo intensivo. Sebbene questo modello offra una scalabilità

superiore rispetto alla memoria condivisa, la principale sfida è rappresentata dall'efficienza e dalla larghezza di banda della rete di interconnessione, che può diventare un collo di bottiglia nelle prestazioni complessive del sistema.

In sintesi, le "Current HPC architectures" rappresentano lo stato dell'arte delle tecnologie e delle metodologie utilizzate per realizzare sistemi di calcolo in grado di affrontare sfide computazionali molto complesse, utilizzando diverse strategie per ottimizzare l'uso delle risorse computazionali disponibili.

4.3. SPMD – General domain decomposition

L'**approccio SPMD**, ovvero l'esecuzione di un singolo programma su molteplici dati, è molto comune nei codici generali utilizzati nel calcolo parallelo. Questa tecnica è ampiamente adottata perché consente di suddividere un problema complesso in sottoproblemi più piccoli che possono essere risolti in parallelo, utilizzando più processori.

Molti codici di uso generale, come quelli utilizzati per simulazioni scientifiche o ingegneristiche, si basano su **computazioni SMP (Symmetric Multi Processing)** che seguono l'**approccio SPMD**. In questa configurazione, ogni processore esegue lo stesso codice, ma su porzioni diverse del dataset. Ciò consente di distribuire il carico di lavoro tra i processori, migliorando l'efficienza complessiva.

Il **costo di comunicazione** di un **sottodominio**, ovvero la quantità di dati che devono essere scambiati tra i processori durante l'elaborazione parallela, è influenzato da due fattori principali:

- **Edge-cut:** Rappresenta il numero di connessioni tagliate o interrotte tra sottodomini adiacenti. Un edge-cut più elevato implica un maggiore scambio di dati tra processori, aumentando il costo di comunicazione. In pratica, l'edge-cut è utilizzato come indicatore della qualità della partizione, soprattutto nei codici cell-vertex, dove una buona partizione minimizza la comunicazione necessaria tra processori.
- **Numero di Sotto-Domini Adiacenti:** Più sottodomini adiacenti condividono confini con un sottodominio specifico, maggiore sarà il costo di comunicazione.

La **decomposizione del dominio**, che consiste nel dividere un problema complesso in sottoproblemi più piccoli, segue tipicamente tre fasi principali:

- **Partizionamento del Grafo (Graph Partitioning):** Il dominio viene rappresentato come un grafo, e poi suddiviso in sotto-grafi (sottodomini) che possono essere processati in parallelo. L'obiettivo è minimizzare l'edge-cut per ridurre la comunicazione tra sottodomini.
- **Riordinamento dei Nodi (Nodes Reordering):** Una volta partizionato il grafo, i nodi vengono riordinati per ottimizzare ulteriormente l'accesso ai dati e la comunicazione tra processori.
- **Generazione dei Blocchi (Blocks Generation):** I sottodomini riordinati vengono poi organizzati in blocchi di dati che saranno effettivamente utilizzati dai processori per l'elaborazione parallela.

L'ottimizzazione seriale e la parallelizzazione sono fondamentali nel calcolo CFD per migliorare l'efficienza del tempo di calcolo. Le architetture HPC, con la loro capacità di gestire calcoli massicci attraverso l'esecuzione parallela, richiedono una progettazione attenta sia delle ottimizzazioni seriali che delle tecniche di decomposizione del dominio per raggiungere prestazioni ottimali. Attraverso l'approccio SPMD, è possibile distribuire il carico computazionale su più processori, minimizzando i costi di comunicazione tra i sottodomini, il che è fondamentale per ottenere prestazioni elevate in simulazioni complesse.

4.4. Parallel computation performances

Il concetto di "strong-scaling" e la Legge di Amdahl sono fondamentali per comprendere l'efficienza e l'efficacia dell'implementazione parallela nei sistemi di calcolo ad alte prestazioni (HPC).

1. Strong-Scaling Performance

Il concetto di "strong-scaling" si riferisce alla capacità di un sistema di ridurre il tempo di esecuzione di un problema fisso man mano che si aumentano le risorse di calcolo, come il numero di processori utilizzati. In altre parole, il lavoro totale rimane costante, ma l'obiettivo della parallelizzazione è quello di minimizzare il tempo necessario per risolvere un dato problema, distribuendo questo lavoro su più processori.

Quando si parla di strong-scaling, l'obiettivo principale è ridurre il tempo di esecuzione (**time to solution**) senza aumentare la dimensione del problema. Ciò significa che l'efficienza del sistema dipende da quanto bene il carico di lavoro può essere suddiviso e gestito in parallelo dai processori disponibili.

2. Low-Level Benchmarks

I benchmark a basso livello sono strumenti utilizzati per misurare le capacità di base di un'implementazione parallela. Questi test sono fondamentali durante lo sviluppo del codice per assicurarsi che le operazioni parallele vengano eseguite in modo efficiente. Vengono utilizzati nel processo di sviluppo del codice per identificare e correggere inefficienze, migliorando così l'implementazione parallela.

3. Legge di Amdahl

La Legge di Amdahl è una formula utilizzata per **prevedere il miglioramento massimo delle prestazioni (speedup) di un sistema di calcolo parallelo**, in base alla frazione di codice che può essere eseguita in parallelo.

La Legge di Amdahl mostra che il miglioramento delle prestazioni dovuto alla parallelizzazione ha un limite superiore, che dipende dalla porzione di codice che può essere effettivamente parallelizzata. Ad esempio, se solo il 50% del codice può essere eseguito in parallelo, il massimo speedup teorico è 2, indipendentemente dal numero di processori aggiunti.

Il grafico illustra lo speedup in funzione del numero di processori per diverse frazioni parallele (f_p). Linee con un f_p più alto mostrano un maggiore potenziale di speedup, mentre linee con f_p basso mostrano un limite più marcato allo speedup, sottolineando la natura asintotica della Legge di Amdahl.

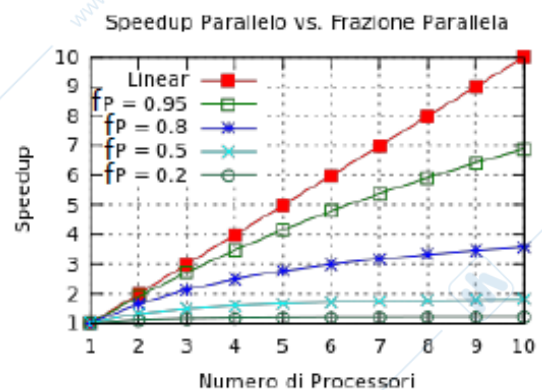
$$S_p = \frac{t_s}{t_p} = \frac{1}{\frac{f_p}{p} + (1 - f_p)} \quad \epsilon = \frac{S_p}{p}$$

S_p : speedup

f_p : parallel fraction of code

ϵ : parallel efficiency

p : number of processes



5. Assessment of CFD investigations

L'obiettivo principale delle investigazioni di fluidodinamica computazionale (CFD) è ottenere un alto livello di credibilità e fiducia nei risultati ottenuti durante la progettazione e l'analisi di un sistema di propulsione. Questo è essenziale perché i risultati CFD vengono utilizzati per prendere decisioni critiche nella progettazione, il che richiede che siano quanto più accurati e affidabili possibile.

- **Credibilità e Fiducia:** Sono ottenute dimostrando livelli accettabili di errore e incertezza, valutati attraverso processi di verifica e validazione. La verifica assicura che il modello implementato sia corretto e coerente con le equazioni matematiche, mentre la validazione confronta i risultati CFD con dati sperimentali o misurazioni reali per garantirne l'accuratezza.
- **Domanda Centrale:** "Quanto sono affidabili i tuoi risultati CFD?" Questa è la domanda chiave che guida l'intera discussione. Determinare l'affidabilità dei risultati CFD è complesso, ma è possibile identificare e comprendere le fonti di errore e i metodi per dimostrare la qualità dei risultati CFD.

I risultati CFD possono essere utilizzati a **vari livelli**, ciascuno con **requisiti di accuratezza** differenti:

- **Informazioni Qualitative:** Queste forniscono una descrizione concettuale delle caratteristiche del campo di flusso. Gli usi qualitativi non richiedono elevata accuratezza, ma piuttosto una rappresentazione generale del comportamento del flusso. Esempi includono la visualizzazione di vortici o schemi di flusso.
- **Quantità Incrementali (ΔP):** Questo livello coinvolge il calcolo delle variazioni di pressione $P = P_{base} + \Delta P$. Quando si considerano differenze, alcuni errori possono annullarsi parzialmente, rendendo i risultati più accurati. Tuttavia, richiedono ancora un'accuratezza moderata. Il calcolo delle quantità incrementali può essere esemplificato dalla formula $\Delta P = (P_2 - P_1)_{actual} + (E_2 - E_1) = P_{actual} + \Delta E$ dove P_{actual} rappresenta la variazione effettiva di pressione e ΔE gli errori residuali.
- **Quantità Assolute (P):** Questi richiedono il massimo livello di accuratezza, poiché le quantità assolute non possono beneficiare della cancellazione parziale degli errori. Ad esempio, la pressione assoluta P deve essere calcolata con estrema precisione, poiché qualsiasi errore potrebbe influenzare significativamente le decisioni progettuali.

A seconda del livello, i requisiti di accuratezza possono variare, ma la verifica e la validazione rimangono processi fondamentali per garantire che i risultati siano affidabili. La domanda cruciale sulla qualità dei risultati CFD orienta l'intera discussione verso una comprensione più approfondita degli errori e delle incertezze che possono influenzare le simulazioni, nonché dei metodi per minimizzarli e controllarli.

La **verifica** è definita come il processo di determinazione dell'accuratezza con cui un'implementazione del modello rappresenta la descrizione concettuale sviluppata dal progettista e la soluzione del modello. Secondo lo standard AIAA-G-077-1998, la verifica si concentra sull'assicurare che:

- **Assenza di Errori di Programmazione:** Il codice deve essere privo di errori di programmazione che potrebbero compromettere la corretta implementazione del modello.
- **Corretta Implementazione delle Equazioni e dei Modelli:** Il codice deve implementare accuratamente le equazioni matematiche e i modelli fisici, garantendo che siano coerenti con la descrizione concettuale originale.
- **Errori di Discretizzazione:** Viene anche esaminata la presenza di errori derivanti dalla discretizzazione delle equazioni CFD, ovvero dalla loro rappresentazione in un dominio discreto (spazio-tempo) anziché continuo.

In sostanza, la verifica riguarda l'integrità del processo di simulazione dal punto di vista tecnico, assicurando che il software funzioni come previsto senza deviazioni dovute a errori interni.

La **validazione** è definita come il processo di determinazione del grado in cui un modello rappresenta accuratamente il mondo reale, dal punto di vista degli usi previsti del modello. Sempre secondo *AIAA-G-077-1998*, la validazione si focalizza su:

- **Accuratezza del Modello:** La validazione verifica che i risultati CFD siano in accordo con la realtà, cioè con i dati osservati negli esperimenti, nei test di volo o nelle applicazioni pratiche.
- **Rappresentazione del Mondo Reale:** Questa fase assicura che il modello non solo funzioni correttamente (come verificato nella fase di verifica), ma che sia anche rappresentativo dei fenomeni fisici reali che intende simulare. In altre parole, un modello validato è in grado di fornire previsioni affidabili per scenari del mondo reale.

La validazione è quindi un processo critico per dimostrare che il modello è utile e applicabile nella pratica, fornendo risultati che possono essere utilizzati con fiducia nel contesto di applicazioni ingegneristiche reali.

L'**incertezza** è descritta come una potenziale deficienza in qualsiasi fase o attività del processo di modellazione, dovuta alla mancanza di conoscenza. Secondo *AIAA-G-077-1998*:

- **Definizione di Potenziale:** Il termine "potenziale" indica che le deficienze potrebbero esistere o meno, e queste non sono necessariamente note a priori. L'incertezza è quindi una mancanza di certezza che può emergere a causa della limitata comprensione o conoscenza di certi aspetti del modello o del fenomeno studiato.
- **Lacuna di Conoscenza:** Questa incertezza è spesso legata a ciò che non si conosce o non si può conoscere a fondo al momento della simulazione, e può influenzare i risultati.

L'incertezza rappresenta quindi una sfida nella modellazione CFD, in quanto introduce elementi di dubbio che devono essere attentamente gestiti per garantire la qualità dei risultati.

L'**errore** è definito come una deficienza riconoscibile in qualsiasi fase o attività della simulazione che non è dovuta alla mancanza di conoscenza. Secondo *AIAA-G-077-1998*:

- **Deficienze Conoscibili:** Gli errori sono difetti che possono essere identificati attraverso l'esame. Una volta riconosciuti, possono essere affrontati e corretti.
- **Errori Riconosciuti vs Non Riconosciuti:** Gli errori riconosciuti hanno procedure stabilite per la loro identificazione e rimozione. Gli errori non riconosciuti, d'altro canto, rimangono non scoperti e non esistono procedure stabilite per individuarli. Questo rende gli errori particolarmente insidiosi, in quanto possono compromettere i risultati della simulazione senza che l'operatore ne sia consapevole.

Gli **errori** nei risultati CFD possono essere suddivisi in diverse categorie:

- **Physical Modeling Error:** Errori legati al modello fisico utilizzato, che solitamente sono riconosciuti e possono essere quantificati.
- **Discretization Error:** Errori dovuti alla rappresentazione delle equazioni del flusso continuo e dei modelli fisici in un dominio discreto di spazio (griglia) e tempo. Questi errori sono dipendenti dalla griglia e la conoscenza a priori della griglia ottimale per un livello desiderato di accuratezza spesso manca. Questi errori sono quantificati attraverso metodi di verifica che esaminano la convergenza della griglia e sono considerati controllabili.
- **Programming Error:** Errori nel codice programmato che dovrebbero essere minimizzati dagli sviluppatori.
- **Computer Round-off Error:** Errori di arrotondamento numerico da parte del computer, generalmente trascurabili o controllabili.
- **Usage Error:** Errori che derivano dall'uso improprio del software CFD, minimizzabili attraverso un'adeguata formazione.
- **Post-Processing Error:** Errori durante l'elaborazione successiva dei dati, che sono solitamente controllabili.

Total Error = **Physical Modeling Error**
 + **Discretization Error**
 + **Programming Error**
 + **Computer Round-off Error**
 + **Usage Error**
 + **Post-Processing Error**

In particolare, si sottolinea che questi errori derivano dal fatto che le equazioni del flusso continuo e i modelli fisici vengono rappresentati in un dominio discreto. Poiché la soluzione non è nota in anticipo, la generazione della griglia potrebbe non produrre quella ottimale. Gli **errori di discretizzazione** sono controllabili e quantificabili attraverso metodi di verifica che esaminano la convergenza della griglia.

- **Origine degli Errori di Discretizzazione:** Gli errori di discretizzazione nascono dal fatto che le equazioni continue devono essere adattate a una griglia discreta di punti nello spazio e nel tempo. Poiché il modello continuo non è perfettamente adattabile alla griglia discreta, si creano delle discrepanze tra la soluzione continua ideale e la soluzione discretizzata calcolata.
- **Dipendenza dalla Griglia:** Il livello di errore è influenzato dalle interazioni tra la soluzione e la griglia. Poiché la soluzione non è nota a priori, la griglia generata potrebbe non essere ottimale per ridurre al minimo gli errori di discretizzazione. In pratica, la scelta della dimensione e della struttura della griglia gioca un ruolo cruciale nella precisione del risultato.
- **Quantificazione degli Errori:** Gli errori di discretizzazione possono essere quantificati tramite metodi di verifica che esaminano la convergenza della griglia. La verifica della convergenza consiste nell'analizzare come la soluzione cambia al variare della griglia: se la soluzione tende a stabilizzarsi con il raffinamento della griglia, l'errore di discretizzazione è sotto controllo.
- **Controllabilità:** Gli errori di discretizzazione sono considerati controllabili, il che significa che è possibile ridurli modificando la griglia (ad esempio, aumentando la risoluzione della griglia o migliorandone la qualità). A differenza di altri tipi di errori che possono essere più difficili da gestire, come quelli legati alla modellizzazione fisica, gli errori di discretizzazione possono essere gestiti e ridotti attraverso l'analisi e la modifica della configurazione della griglia.

La **convergenza iterativa** si riferisce al comportamento della soluzione mentre l'algoritmo iterativo avanza. L'obiettivo è che, iterando, i risultati della simulazione si avvicinino a un valore fisso, con i residui che si abbassano e si stabilizzano. Questo concetto si applica sia a soluzioni di flusso stazionarie che instazionarie. Nel caso di flussi instazionari, la convergenza iterativa è valutata su un intervallo di tempo.

La convergenza iterativa può essere dimostrata in diversi modi:

- **Valore del massimo cambiamento nella soluzione durante un'iterazione** ($\delta Q_{big} = \max \delta Q_{i,m}$): Misurando il più grande cambiamento nella soluzione tra iterazioni successive.
- **Storia delle iterazioni della norma L2 del residuo dell'equazione:** Monitorando come la norma L2 dei residui diminuisce durante le iterazioni. L2 Residual rappresenta la differenza tra la soluzione attuale di un problema e la soluzione esatta o precedente, misurando quanto è cambiata la soluzione tra le iterazioni. Viene calcolata utilizzando la norma L2 di una quantità δQ , che rappresenta la variazione tra soluzioni.

$$L2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M (\delta \hat{Q}_{i,m})^2}{M * N}}$$

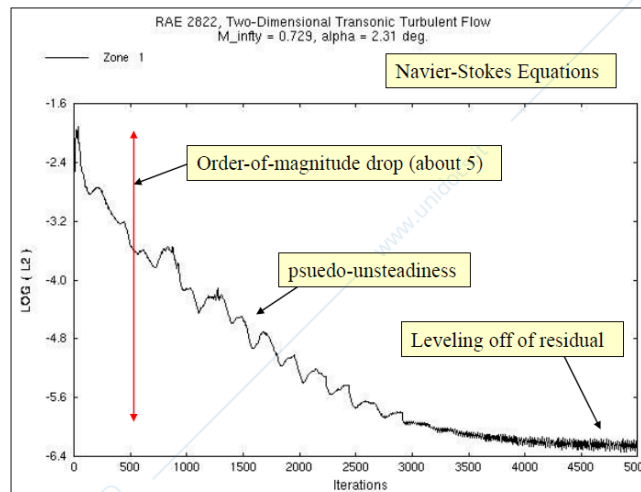
Dove N rappresenta il Numero totale di punti della griglia, mentre M il Numero di elementi in Q (in questo caso, 5 per le equazioni di Navier-Stokes).

L'**L2 Residual** rappresenta la variazione nella soluzione su un'iterazione, mediata su tutti i punti della griglia e le equazioni. L'**L2 Residual** viene solitamente mostrato su un grafico come valori logaritmici, ovvero **log(L2)**, per facilitare l'interpretazione.

La **riduzione dell'L2 Residual** indica che la soluzione si sta **avvicinando alla convergenza**, e l'ordine di grandezza del residuo dà un'idea dell'entità di questa variazione. In altre parole, l'obiettivo è che L2 Residual si avvicini a zero durante le iterazioni, il che indica che la soluzione si sta stabilizzando e convergendo verso una soluzione accettabile.

- **Esaminare le variabili conservative:** Analisi di variabili come la massa, la quantità di moto e l'energia per verificare la conservazione durante le iterazioni.
- **Storia delle iterazioni di una quantità locale o globale del flusso:** Valutazione delle variazioni di grandezze fisiche locali o globali.
- Solitamente, vengono utilizzate combinazioni di queste misure per determinare la convergenza iterativa.

La **convergenza della griglia** riguarda la relazione tra la risoluzione della griglia e i risultati della simulazione. Man mano che lo spaziamento della griglia viene ridotto, i risultati della simulazione dovrebbero diventare meno sensibili alle variazioni della griglia e avvicinarsi ai risultati del modello continuo (ossia, la soluzione reale delle equazioni differenziali senza approssimazioni di discretizzazione).



Il grafico illustra un esempio di **grafico del residuo** e discute il comportamento del residuo durante la risoluzione di equazioni complesse, come le **equazioni di Navier-Stokes**, applicate a un flusso transonico bidimensionale turbolento.

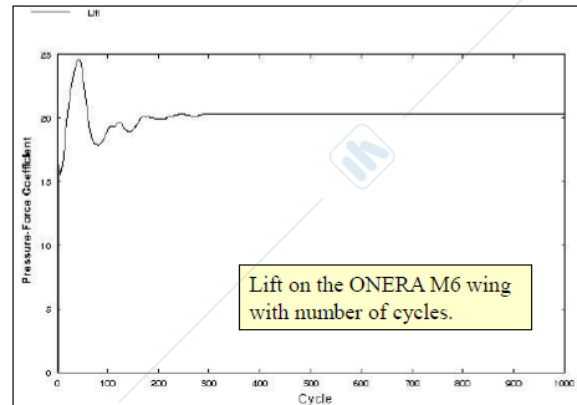
Vediamo i punti principali:

- **Comportamento del Residuo:** Il comportamento del residuo non è necessariamente regolare o costante. Quando si risolvono flussi complessi, come quelli turbolenti, il residuo può mostrare oscillazioni o "unsteadiness" (instabilità).
- **Caduta del residuo di più ordini di grandezza:** Inizialmente, il grafico mostra una significativa riduzione del residuo, corrispondente a una diminuzione dell'errore della soluzione. Nel grafico si vede un calo di circa **5 ordini di grandezza**, che rappresenta una forte riduzione dell'errore, spesso considerato un segno di buon progresso verso la convergenza.
- **Pseudo-instabilità (pseudo-unsteadiness):** Dopo il calo iniziale, si osservano delle oscillazioni nel residuo. Queste oscillazioni sono causate da turbolenza o da una separazione del flusso, entrambe caratteristiche dei flussi instabili. Anche se questo fenomeno di **pseudo-unsteadiness** rallenta la convergenza, il residuo continua a diminuire lentamente.
- **Livellamento del residuo:** Verso la fine del grafico (intorno alle 4500 iterazioni), il residuo si livella e non cala più significativamente, indicando che la soluzione ha raggiunto un punto in cui non cambia sostanzialmente con ulteriori iterazioni. Questo livellamento è comune e può rappresentare una sorta di convergenza.

Il **monitoraggio del cambiamento** di una **proprietà locale** o **globale** è probabilmente il miglior metodo per valutare la convergenza iterativa di un calcolo. Questo perché tali proprietà riflettono direttamente le quantità rilevanti per l'analisi ingegneristica, garantendo che il processo di iterazione stia procedendo nella giusta direzione e convergendo verso un risultato stabile.

- **Quantità Locale:** Si riferisce a un valore puntuale in un determinato punto del campo di flusso.
- **Quantità Globale:** È integrata su una porzione del campo di flusso, rappresentando una misura complessiva su una regione più ampia.

Il grafico a destra mostra l'andamento del coefficiente di forza di pressione in funzione del numero di cicli iterativi. In questo esempio, la forza di sollevamento su un'ala di un modello di ONERA M6 è monitorata lungo le iterazioni. Si osserva che, dopo un iniziale andamento oscillatorio, il coefficiente si stabilizza, indicando che la soluzione sta convergendo.



Si passa adesso al concetto di "**Verification Assessment**" (Valutazione della Verifica) e se ne delinea i due aspetti principali:

- **Verification of a Code** (Verifica di un Codice):
 - Questo aspetto si concentra sull'assicurarsi che il codice utilizzato per le simulazioni sia privo di errori di programmazione e che implementi correttamente le equazioni e i modelli teorici.
 - I metodi di verifica includono:
 - L'esame dei moduli di codice per rilevare eventuali errori.
 - La verifica di ipotesi di base come la conservazione della massa.
 - Il confronto dei risultati del codice con risultati analitici o soluzioni note.
 - Questo passaggio è essenziale per garantire che il software stia eseguendo i calcoli come previsto senza introdurre errori dovuti a problemi di codifica.
- **Verification of a Calculation** (Verifica di un Calcolo):
 - Questo aspetto riguarda la verifica che una specifica simulazione o calcolo fornisca un livello di accuratezza accettabile.
 - Il metodo principale menzionato per questa verifica è lo **studio della convergenza della griglia** ("grid convergence study"). Questo studio valuta come i risultati della simulazione cambiano al variare della discretizzazione della griglia computazionale, aiutando a identificare se il calcolo sta convergendo verso una soluzione stabile e accurata man mano che la griglia viene raffinata.
 - Questo processo è fondamentale per assicurarsi che i risultati della simulazione siano indipendenti dalla risoluzione della griglia, garantendo che il modello numerico sia accurato.

Il "**Grid Convergence Study**" (Studio della Convergenza della Griglia), un processo cruciale nella verifica e validazione delle simulazioni numeriche, in particolare nell'ambito della fluidodinamica computazionale (CFD). Il "Grid Convergence Study" quantifica tre aspetti principali:

1. **Ordered Discretization Error Band:** Questo si riferisce all'errore di discretizzazione "ordinato", che è correlato alla dimensione della griglia e all'ordine di accuratezza p . L'errore di discretizzazione è la differenza tra la soluzione numerica e la soluzione esatta dovuta alla discretizzazione delle equazioni continue.

2. **Order of Grid Convergence (Order-of-Accuracy):** Il parametro p rappresenta l'ordine di convergenza della griglia, o ordine di accuratezza, che indica come l'errore di discretizzazione diminuisce all'aumentare della risoluzione della griglia.
3. **Continuum Value or "Zero Grid Spacing" Value:** Questo è il valore dell'osservabile (come velocità, pressione, ecc.) nel limite in cui la dimensione della griglia tende a zero, cioè il valore che ci si aspetta di ottenere nella soluzione continua ideale.

Approccio:

- **Assunzione o Dimostrazione che Altri Errori Siano Sotto Controllo:** Prima di procedere con lo studio della convergenza della griglia, è importante assumere o dimostrare che tutti gli altri errori (ad esempio, errori di modellazione, errori numerici, ecc.) siano trascurabili, minimizzati, accettabili o sotto controllo. Questo assicura che il focus sia esclusivamente sull'errore di discretizzazione.
- **Esecuzione di Soluzioni CFD su Griglie di Raffinamento Crescente:** La simulazione viene eseguita su due o più griglie con risoluzioni crescenti. Ciò permette di analizzare come il risultato della simulazione cambia con il raffinamento della griglia.
- **Asintotico Range di Convergenza:** Le soluzioni devono trovarsi nel "range asintotico di convergenza", dove l'errore diminuisce secondo la teoria, consentendo di calcolare correttamente l'ordine di accuratezza ppp .
- **Calcolo dell'Ordine di Convergenza ppp :** Se sono disponibili tre soluzioni su griglie con diversa risoluzione, è possibile calcolare l'ordine di convergenza ppp , che fornisce una misura quantitativa di come l'errore di discretizzazione diminuisce con il raffinamento della griglia.
- **Utilizzo dell'Estrapolazione di Richardson:** L'estrapolazione di Richardson viene utilizzata per stimare il valore nel continuo, ovvero il valore che la soluzione numerica assumerebbe se la dimensione della griglia fosse infinitesimale.
- **Calcolo degli Indici di Convergenza della Griglia (GCI):** I GCI vengono calcolati come misura dell'errore di discretizzazione, fornendo un'indicazione quantitativa dell'affidabilità della soluzione numerica rispetto alla griglia utilizzata.

Indice di Convergenza della Griglia (GCI):

- **Scopo:** Il GCI viene utilizzato per valutare l'errore associato alla discretizzazione nelle simulazioni numeriche, in particolare nella fluidodinamica computazionale (CFD). Fornisce una stima dell'incertezza dovuta alla risoluzione della griglia.
- **Basato sull'estrapolazione di Richardson:** Il calcolo del GCI si basa sull'estrapolazione di Richardson, una tecnica che stima l'errore in una soluzione calcolata confrontando i risultati ottenuti con diverse risoluzioni della griglia.
- **Banda d'errore sulla soluzione con griglia fine:** Il GCI quantifica l'errore sulla griglia più fine stimando quanto cambierebbe la soluzione se la griglia fosse ulteriormente raffinata. Viene espresso come percentuale della soluzione.

La formula del GCI è la seguente:

$$GCI_{fine} = \frac{FS |\varepsilon|}{(r^p - 1)}$$

dove:

- FS è il **Fattore di Sicurezza**, tipicamente 1,25 quando si utilizzano tre o più livelli di griglia.
- ε rappresenta l'errore relativo tra due livelli di griglia successivi $\left(\varepsilon = \frac{f_2 - f_1}{f_1}\right)$
- r è il rapporto di affinamento della griglia, che è il rapporto tra le spazature della griglia tra livelli successivi.
- p è l'ordine di accuratezza del metodo numerico utilizzato.

Range Asintotico di Convergenza:

- **Definizione:** Le soluzioni si trovano in un intervallo in cui gli errori diminuiscono a un ritmo indicato dall'ordine di convergenza p . Questo intervallo rappresenta la condizione ideale in cui il metodo numerico mostra il suo comportamento asintotico, cioè quando la soluzione converge verso quella esatta in modo prevedibile e conforme all'ordine di accuratezza del metodo.

- **Verifica della Costante $C = E/h^p$:**

dove:

- E rappresenta l'errore tra la soluzione numerica e quella esatta.
- h è la dimensione della griglia.
- p è l'ordine di convergenza del metodo numerico.

Verificare che la costante C rimanga effettivamente costante tra diverse soluzioni. Se C risulta essere costante, significa che l'errore diminuisce in accordo con la riduzione della dimensione della griglia h secondo l'ordine p .

- **Verifica con i valori del GCI su tre soluzioni:**

- **Rapporto dei GCI:** Per verificare che il metodo numerico stia operando nel regime asintotico, si confrontano i valori di GCI su tre diverse soluzioni con la seguente relazione:

$$GCI_{23} = r^p \times GCI_{12}$$

dove:

- GCI_{23} è l'indice di convergenza tra la seconda e la terza griglia.
- GCI_{12} è l'indice di convergenza tra la prima e la seconda griglia.
- r è il rapporto di raffinamento della griglia.

SOMMARIO

| | | |
|--------|--|-----|
| 1. | DISCRETIZATION OF NS EQUATIONS ON UNSTRUCTURED GRIDS..... | 97 |
| 1.1. | UNSTRUCTURED GRIDS..... | 98 |
| 1.2. | MESH QUALITY ASSESSMENT..... | 99 |
| 1.3. | DISCRETIZATION ON UNSTRUCTURED GRIDS..... | 100 |
| 1.3.1. | FV discretization..... | 101 |
| 1.3.2. | Discretization: diffusive term..... | 103 |
| 1.3.3. | Discretization: convective term..... | 103 |
| 1.3.4. | Accuracy of discretization..... | 104 |
| 1.3.5. | Discretization schemes..... | 104 |
| 2. | PRESSURE –VELOCITY COUPLING..... | 108 |
| 2.1. | SIMPLE..... | 111 |
| 2.2. | PIMPLE..... | 114 |
| 2.3. | UNSTRUCTURED GRIDS CO-LOCATION OF P AND V..... | 115 |
| 2.4. | SEGREGATED VS COUPLED..... | 117 |
| 2.5. | SOURCE TERMS..... | 118 |
| 2.6. | PICARD'S METHOD..... | 119 |
| 2.7. | UNSTEADY FLOW CALCULATIONS..... | 120 |
| 2.7.1. | Unsteady SIMPLE..... | 121 |
| 2.7.2. | PISO in unsteady calculations..... | 122 |
| 2.8. | PSEUDO-TRANSIENT APPROACH AND $URF/\Delta t$ COMPARISON..... | 122 |
| 2.9. | COMPARISON OF SIMPLE, SIMPLEC, PISO..... | 123 |
| 3. | SCALE RESOLVING METHODS FOR TURBULENCE MODELLING..... | 124 |
| 3.1. | ENERGY CASCADE..... | 125 |
| 3.2. | SCALA DI KOLMOGOROV E INERTIAL SUBRANGE..... | 126 |
| 3.3. | FLUSSI TURBOLENTI..... | 126 |
| 3.4. | EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES PER FLUSSI TURBOLENTI..... | 128 |
| 3.5. | STUDIO DI FLUSSI TURBOLENTI..... | 129 |
| 3.6. | APPROCCI COMPUTAZIONALI..... | 129 |
| 3.6.1. | Direct Numerical Simulation (DNS)..... | 130 |
| 3.6.2. | Large Eddy Simulation (LES)..... | 131 |
| 3.6.3. | Reynolds (Favre) Averaged Navier Stokes equation (RANS)..... | 133 |
| 3.7. | SGS MODELS..... | 134 |
| 3.8. | LES REQUISITI PROCEDURA NUMERICA..... | 135 |
| 3.9. | CONDIZIONI AL CONTORNO PER LES..... | 136 |
| 3.10. | NEAR-WALL TREATMENT..... | 138 |
| 3.11. | GLOBAL HYBRID RANS-LES \rightarrow DES MODELS..... | 139 |
| 3.12. | GLOBAL HYBRID RANS-LES \rightarrow DES MODELS..... | 139 |
| 3.13. | SBES - STRESS-BLENDED EDDY SIMULATION..... | 140 |
| 3.14. | SST-SCALE ADAPTIVE SIMULATION..... | 141 |
| 3.15. | IDENTIFICAZIONE DEI VORTICI..... | 142 |
| 4. | PARALLEL COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS..... | 143 |
| 4.1. | SERIAL OPTIMIZATION..... | 143 |
| 4.2. | CURRENT HPC ARCHITECTURES..... | 144 |
| 4.3. | SPMD – GENERAL DOMAIN DECOMPOSITION..... | 145 |
| 4.4. | PARALLEL COMPUTATION PERFORMANCES..... | 146 |
| 5. | ASSESSMENT OF CFD INVESTIGATIONS..... | 147 |

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari