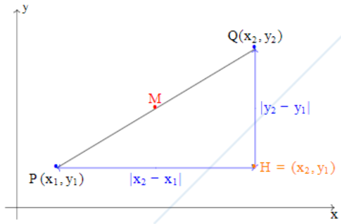
RIASSUNTO GEOMETRIA

Dati due punti $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, definiti nel piano cartesiano, il segmento può essere descritto con l'equazione parametrica:

$$\overline{PQ} = \{(1-t)(x_1,y_1) + t(x_2,y_2) : t \in [0,1]\}$$



Per trovare il punto medio M

$$M = \frac{1}{2}(x_1,y_1) + \frac{1}{2}(x_2,y_2) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Per trovare il baricentro G di n punti:

$$G = \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)$$

1. TRIANGOLI

Un triangolo avente vertici $A=(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, avrà area:

$$Area\ (ABC) = \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1|$$

In generale, un poligono con n lati, potrà sempre essere scomposto in n-2 triangoli, quindi la somma dei suoi angoli interni è $(n-2)180°$. Quindi, l'area di un poligono con n lati sarà:

$$A = \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - \cdots - y_nx_1|$$

2. RETTA NEL PIANO CARTESIANO

Equazione generica della retta:

$$ax + by + c = 0, \text{ con } a,b \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0)$$

La retta passante per due punti $P=(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ ha equazione:

$$(y-y_1)(x_2-x_1) = (y_2-y_1)(x-x_1)$$

N.B: Se $a=0, y=-\frac{c}{b}$, avremo una retta parallela all'asse delle ascisse; se $b=0, x=-\frac{c}{a}$, avremo una retta parallela all'asse delle ordinate; se $c=0$, il punto (0,0) è una soluzione, avremo una retta passante per l'origine.

Parallelismo e perpendicolarità:

Date due rette $k: a_1x + b_1y + c_1$, $s: a_2x + b_2y + c_2$, esse sono:

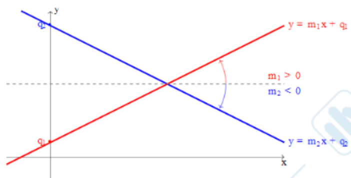
- Parallele se $(a_1,b_1) = (ra_2, rb_2), r \in \mathbb{R}$, oppure equivalentemente se $a_1b_2 = a_2b_1$
  In tal caso le due rette possono essere espresse nella formula:
  $$k: ax + by + c_1,\ s: ax + by + c_2$$
- Perpendicolari se $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

Posizioni reciproche di rette:

Considero il sistema delle due equazioni:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

- Se il sistema non ha soluzioni, le rette sono parallele;
- Se il sistema ammette una soluzione, le rette sono incidenti, la soluzione sono le coordinate dell'intersezione;
- Se il sistema ha infinite soluzioni, sono coincidenti.



Equazione esplicita di una retta:

Sia $m = -\frac{a}{b}, q = -\frac{c}{b}$, con $b \neq 0$, l'equazione diventa

$$y = mx + q$$

Dove m viene chiamato **coefficiente angolare**, indica la pendenza della retta; mentre q viene chiamato **quota**, indica l'altezza alla quale la retta interseca l'asse delle ordinate.
Analizzando i coefficienti angolari, possiamo scoprire la posizione reciproca di due rette $k: y = m_1x + q_1$, $s: y = m_2x + q_2$:

- Se $m_1 = m_2$, k // s, è coincidente se $q_1 = q_2$
- Se $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, k ⊥ s

Fascio di rette:

Il fascio di rette passante per un punto $P=(x_1,y_1)$ avrà equazione:

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) = 0 \text{ oppure } y - y_0 = m(x - x_0)$$

al variare dei parametri $\mathrm{a,b}$ determina tutte le rette passanti per P.

Asse di un segmento: Retta passante per il punto medio M, parallela al segmento stesso.

Distanze nel piano cartesiano:

- Distanza punto – punto, dati due punti $P=(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$:
$$d(P,Q) = \sqrt{|x_1 + x_2|^2 + |y_1 + y_2|^2} \qquad \text{(Teorema di Pitagora)}$$
- Distanza retta – retta, date due rette $k: a_1x + b_1y + c_1$, $s: a_2x + b_2y + c_2$, imponendo $k // s$:
$$d(k,s) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{(Lunghezza del segmento} \perp \text{alle due rette)}$$
- Distanza punto – retta, dato $P=(x_1,y_1)$, $s: ax + by + c$:
$$d(P,s) = \frac{|a_1x+b_1y+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{(Lunghezza del segmento} \perp \text{alla retta, passante per il punto)}$$

3. CIRCONFERENZA

Equazione fondamentale: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
Sotto forma di equazione di secondo grado: $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + ax + by + c = 0$, è una circonferenza se:
- $\alpha = \beta$, eventualmente uguali ad 1 dividendo l'intera equazione per il loro valore.
- $\gamma = 0$

In tal caso avrò $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, completando i quadrati con $\frac{a^2}{2}$ e $\frac{b^2}{2}$, otterrò:
$$(x + \frac{a}{2})^2 + (x + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - c$$
Che è equazione di una circonferenza solo se $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - c \geq 0$, in tal caso avrò che:
- Il centro $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$
- Il raggio $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$

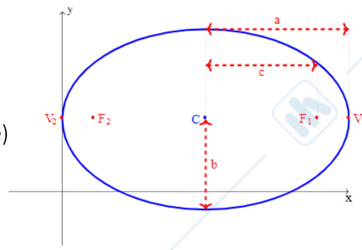
Circonferenza su tre punti non allineati: Dati tre punti A, B, C; il centro della circonferenza passante per i tre punti è l'intersezione degli assi dei segmenti $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ed ha raggio con lunghezza pari alla distanza dal centro ad uno dei tre punti.

Posizioni reciproche tra retta e circonferenza:

Considero il sistema delle due equazioni:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}$$
- Se ottengo due soluzioni, la retta è secante;
- Se ottengo una soluzione, la retta sarà tangente;
- Se non ho nessuna soluzione, la retta sarà esterna.

4. CURVE DI EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + ax + by + c = 0$$
A seconda del segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, posso avere tre tipi di curve:
- $\Delta < 0$: curva di tipo ellittico (circonferenze, ellissi, nessun punto);
- $\Delta = 0$: curva di tipo parabolico (parabole, coppie di rette parallele);
- $\Delta > 0$: curva di tipo iperbolico (iperboli, coppie di rette incidenti)



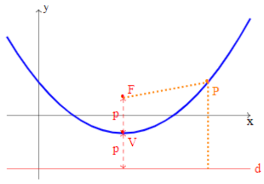
Ellisse: (luogo dei punti nel piano, la cui somma delle distanze da due punti fissi "fuochi" è costante)

Equazione fondamentale: $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = 2a$

Se la retta passante per i fuochi è parallela all'asse delle ascisse: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, 0 < b \leq a$, con centro $C = (x_0, y_0)$

Se invece è parallela all'asse delle ordinate, l'equazione diventa: $\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1, 0 < b \leq a$

La retta che passa per i fuochi interseca l'ellisse nei vertici V1, V2, con distanza 2a tra loro, questo segmento è chiamato asse maggiore. La retta perpendicolare all'asse maggiore, passante per il centro è chiamata asse minore, ed interseca l'ellisse in due punti a distanza b dal centro. Indicando con c la distanza dei fuochi dal centro avremo:
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$



Parabola: (Luogo dei punti nel piano equidistanti ad un dato un "fuoco" e una retta detta direttrice)

Equazione fondamentale: $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Se l'asse della parabola è parallelo all'asse delle ordinate, l'equazione diventa: $y-y_0=\pm\frac{1}{4p}(x-x_0)^2$, con vertice $V(x_0,y_0)$ e distanza p tra fuoco e vertice.

Se l'asse della parabola è parallelo all'asse delle ascisse, il ruolo di x e y si inverte: $x-x_0=\pm\frac{1}{4p}(y-y_0)^2$

Se la parabola è rivolta verso l'alto (o verso destra), l'equazione ha forma $+\frac{1}{4p}$, se invece è rivolta verso il basso (o verso sinistra), l'equazione ha forma $-\frac{1}{4p}$.

Iperbole: (Luogo di tutti i punti nel piano la cui differenza della loro distanza da un dato "fuoco", ha modulo costante.)

Equazione fondamentale: $\left|\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}-\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\right|=2a$

Se la retta passante per i fuochi dell'iperbole è parallela all'asse delle ascisse, l'equazione avrà forma: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, con centro $C=(x_0,y_0)$

La retta $y=y_0$ interseca l'iperbole in due punti, detti vertici. Indicando con **a** la distanza tra un vertice ed il centro, con **c** la distanza del centro da ciascuno dei due fuochi, avremo:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

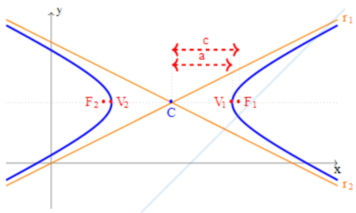
In un'iperbole si possono individuare due rette che intersecano l'iperbole all'infinito, chiamati **asintoti**, con equazione:

$$r_{1,2}: y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$$

Se i fuochi si trovano su una retta parallela all'asse delle ordinate, l'equazione diventa: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$

Nel caso di un'iperbole equilatera, con asintoti perpendicolari, essa si gira di 45° e la sua equazione diventa: $xy=k$

5. SUPERFICI E VOLUMI



Sfera:

- Area laterale: $A=4\pi r^2$
- Volume: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

Piramide retta: (il vertice superiore coincide con il centro della base) es. Cono

- Superficie laterale: $S_L=\frac{Pa}{2}=\frac{P\sqrt{h^2+r^2}}{2}$, con a si indica l'apotema. (segmento vertice - perimetro della base)
- Superficie totale: $S=S_B+S_L$

Piramide generica:

- Volume: $V=\frac{S_B h}{3}$

Cilindro circolare retto:

- Superficie totale: $S=2S_B+S_L=2(\pi r^2)+(2\pi rh)$
- Volume: $V=\pi r^2 h$

Cilindro:

- Volume: $V=S_B h$