DOMANDE ANALISI I

1. Scrivere la definizione di successione convergente e di limite per una successione.
2. Scrivere la definizione di successione convergente, divergente ed irregolare.
3. Scrivere la definizione di successione limitata. Dimostrare che se una successione è convergente allora essa è anche limitata. Dire se è vero il contrario.
4. Enunciare e dimostrare il teorema dell'unicità di limite per successioni.
5. Scrivere la definizione di successioni monotone. Enunciare e dimostrare il teorema sul limite delle successioni monotone.
6. Enunciare il teorema del confronto per successioni.
7. Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (algebra degli infiniti). Fare esempi di forme indeterminate.
8. Enunciare il criterio del rapporto per successioni positive.
9. Enunciare il principio di induzione.
10. Scrivere la definizione di maggioranti, minoranti, massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore per un sottoinsieme di numeri reali.
11. Scrivere la definizione di estremo superiore, estremo inferiore per un sottoinsieme di numeri reali.
12. Scrivere la definizione di immagine e controimmagine di una funzione.
13. Scrivere la definizione di funzione iniettiva, suriettiva e biettiva. Scrivere la definizione di funzione inversa. Dato il grafico di una funzione invertibile, dire come si disegna il grafico della sua inversa.
14. Scrivere la definizione di funzione limitata, monotona, simmetrica e periodica. Disegnare il grafico per ogni tipo di funzione.
15. Enunciare il prodotto di composizione di funzioni.
16. Dimostrare che la stretta monotonia implica l'invertibilità di una funzione.
17. Enunciare il teorema sull'algebra dei limiti per successioni e dimostrarlo nel caso del limite della somma e del prodotto.
18. Enunciare e dimostrare il Teorema della permanenza del segno per successioni.
19. Scrivere la definizione di funzione continua su un intervallo ed enunciare il Teorema di Weierstrass. Far vedere, attraverso controesempi, che le tre ipotesi sono tutte essenziali.
20. Enunciare e dimostrare il Teorema dei valori intermedi.
21. Scrivere la definizione di asintoti orizzontali, verticali e obliqui.
22. Enunciare il teorema sulla continuità della funzione inversa.
23. Scrivere la definizione di funzione derivabile in un punto. Spiegare il significato geometrico della derivata.
24. Scrivere la definizione di funzione continua e derivabile in un punto. Enunciare e dimostrare la relazione fra continuità e derivabilità.
25. Scrivere la definizione di derivata destra e sinistra.

26 Enunciare il teorema sull'algebra delle derivate e dimostrare la regola di Leibniz.

27 Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione composita.

28 Scrivere la definizione di punto di massimo e minimo relativo e la definizione di punto critico. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

29 Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange o del valor medio.

30 Caratterizzare le funzioni costanti su un intervallo I.

31 Enunciare e dimostrare il test di monotonia.

32 Definire una funzione concava o convessa in un punto. Definire un punto di flesso. Enunciare il test di convessità.

33 Enunciare il Teorema di De l'Hôpital.

34 Enunciare la formula di Taylor di ordine n con resto nella forma di Peano o di Lagrange.

35 Scrivere la definizione di primitiva. Dimostrare che due primitive definite su un intervallo differiscono al più per una costante.

36 Enunciare e dimostrare la regola di integrazione per parti.

37 Enunciare e dimostrare la regola di integrazione per sostituzione.

38 Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.

39 Scrivere la definizione di funzione integrale. Sia f integrabile su (a,b), dimostrare che $F(x) = \int_a^x f(u)\,du$ è continua in (a,b).

40 Scrivere la definizione di funzione integrale. Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

41 Enunciare e dimostrare il corollario del Teorema fondamentale del calcolo integrale.

42 Scrivere la definizione di serie convergente, divergente, irregolare.

43 Definire le serie telescopiche e discuterne le proprietà di convergenza.

44 Scrivere la definizione di serie geometrica. Enunciare e dimostrare quando converge/diverge/è irregolare.

45 Enunciare e dimostrare la proprietà fondamentale delle serie a termini non negativi.

46 Scrivere la definizione di serie armonica e di serie armonica generalizzata.

47 Enunciare la condizione necessaria per la convergenza delle serie. Tale condizione è sufficiente?

48 Enunciare e dimostrare il criterio della radice.

49 Enunciare e dimostrare il criterio del confronto e del confronto asintotico per le serie a termini positivi

50 Serie a termini di segno variabile: definizione di convergenza assoluta

51 Definire la serie a termini a segno alterno. Enunciare il criterio di Leibniz.

SUCCESSIONI

1 SUCCESSIONE CONVERGENTE E LIMITE PER UNA SUCCESSIONE

- Una successione $\{a_n\}$ si dice convergente se esiste un numero $\ell \in \mathbb{R}$ con la proprietà che qualunque sia $\varepsilon > 0$ risulti definitivamente: $|a_n - \ell| < \varepsilon$ o $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$
  esiste n_0 t.c. $\forall\, n > n_0$
- ℓ è il limite della successione $\{a_n\}$ e quindi:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \quad \text{o} \quad a_n \longrightarrow \ell \text{ per } n \to +\infty$$

2 SUCCESSIONE CONVERGENTE, DIVERGENTE, IRREGOLARE

- Una successione $\{a_n\}$ si dice che diverge a $+\infty$ se per ogni $M >$ si ha $a_n > M$ definitivamente e quindi: $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$
- Una successione $\{a_n\}$ si dice che diverge a $-\infty$ se per ogni $M > 0$ si ha $a_n < -M$ definitivamente e quindi: $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$
- Una successione $\{a_n\}$ si dice irregolare se essa non è ne convergente ne divergente e il limite non esiste, quindi $\lim_{n \to +\infty} a_n =$ non esiste

3 SUCCESSIONE LIMITATA, SUCCESSIONE CONVERGENTE-LIMITATA

- Una successione $\{a_n\}$ si dice limitata se esistono due numeri n, m tale che per ogni n, m risulti che $m \leq a_n \leq M \quad \forall n$.
- Ogni successione convergente è limitata
- $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente: cioè $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ quando $n \to +\infty$ e quindi:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall\, n > n_0 \text{ si ha } |a_n - \ell| < \varepsilon$$

- Per la disuguaglianza triangolare inversa:

disuguaglianza triangolare:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$
$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

$$|a_n| - |\ell| \leq |a_n - \ell| < \varepsilon$$

$$|a_n| \leq \underbrace{\varepsilon + |\ell|}_{c} \quad \text{per l'arbitrarietà di } \varepsilon$$

$$|a_n| \leq c \quad \text{quindi } a_n \text{ è una successione limitata}$$

- Non è vero che una successione limitata è convergente:

Esempio: $\lim_{n \to +\infty} (-1)^n =$ è una successione limitata ma non converge mai ad un numero, infatti prende sempre due valori: $(-1)(+1)$

4 TEOREMA UNICITÁ LIMITE SUCCESSIONI

• Se esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ esso è unico, cioè non possono esistere due limiti distinti.

Dimostrazione per assurdo

• Supponiamo che $\lim_n a_n$ tende a due limiti distinti quando $n \to +\infty$, cioè:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = m \qquad \text{con } \ell < m$$

• Per definizione ~~per dimostrazione~~ sop, per ogni $\varepsilon > 0$ devono esistere due intorni I_1 e I_2 di c tali che si abbia:

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad \forall x \in I_1 \setminus c$$
$$m - \varepsilon < a_n < m + \varepsilon \quad \forall x \in I_2 \setminus c$$

• Le due uguaglianze devono valere contemporaneamente e possiamo scegliere $\varepsilon = \frac{m-\ell}{2}$.

• Esse diventano quindi:

$$\frac{3\ell - m}{2} < a_n < \frac{\ell + m}{2} \quad \forall x \in I_1 \setminus c$$
$$\frac{\ell + m}{2} < a_n < \frac{3m - \ell}{2} \quad \forall x \in I_2 \setminus c.$$

• Consideriamo tutti gli $x \in I_1 \cap I_2 \setminus c$, le due disuguaguaglianza devono valere contemporaneamente:

$$\frac{\ell+m}{2} < a_n < \frac{\ell+m}{2} \longrightarrow \text{assurdo!}$$

5 SUCCESSIONI MONOTONE, TEOREMA LIMITE SUCCESSIONI MONOTONE

• Una successione ~~monotona~~ si dice monotona se vale una delle seguenti ipotesi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:
- $\{a_n\}$ è crescente se $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{a_n\}$ è decrescente se $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{a_n\}$ è costante se $a_n = a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

• $\{a_n\}$ è una successione monotona crescente e superiormente limitata $\longrightarrow \{a_n\}$ è convergente e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$

• $\{a_n\}$ è una successione monotona decrescente e inferiormente limitata $\longrightarrow \{a_n\}$ è convergente e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$

Dimostrazione: $\{a_n\}$ è decrescente

$\ell \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \longrightarrow$ definizione di inf (estremo inferiore) $\quad \ell =$ estremo inferiore

• Fissato $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che: $\ell \leq a_{n_\varepsilon} \leq \ell + \varepsilon$

Sappiamo che la successione è decrescente, quindi:

$$\ell \leq a_n \leq a_{n_\varepsilon} < \ell + \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

Dalla definizione di limite si ha che: $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Supponiamo che $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\infty$, cioè $\forall M > 0 \ \exists n_M \in \mathbb{N} \quad a_{n_M} < -M$

per la decrescenza della successione: $a_n \leq a_{n_M} < -M \quad \forall n \geq n_M$

e quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

6 TEOREMA CONFRONTO SUCCESSIONI

Siano $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $\{c_n\}$ tre successioni reali tali che $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ allora possiamo dire che $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$

7 ALGEBRA DEGLI INFINITI, FORME INDETERMINATE

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni con $n \in \mathbb{N}$

$a_n \to x$

$b_n \to y$ si può dire

x		y	
a	$+$	∞	$= +\infty$
a	$-$	∞	$= -\infty$
$+\infty$	$+$	∞	$= +\infty$
$-\infty$	$-$	∞	$= -\infty$

x		y	
a	$\cdot$	∞	$= \infty$
a	$:$	0	$= \infty$
a	$:$	∞	$= 0$

$a \neq 0$

Forme indeterminate

$$\left[\frac{0}{0}\right];\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right];\ [0\cdot\infty];\ [1^{\infty}];\ [\infty-\infty];\ [0^0];\ [\infty^0]$$

8 CRITERIO DEL RAPPORTO PER SUCCESSIONI POSITIVE

Sia $\{a_n\}$ una successione positiva (cioè $a_n \geq 0 \ \forall n$). Se esiste:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$$

e $\ell < 1$, allora $a_n \to 0$

$\ell > 1$ (anche $\ell = +\infty$) allora $a_n \to +\infty$

- PROPRIETÀ CARATTERISTICA ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE

→ Se l'estremo superiore (inferiore) appartiene al sottoinsieme, allora esso è il massimo (minimo) del sottoinsieme.

TEOREMA DI COMPLETEZZA

→ Se il sottoinsieme è limitato superiormente (inferiormente) e ammette estremo superiore (inferiore) allora tale estremo è unico.

9 PRINCIPIO DI INDUZIONE

Il principio di induzione può essere applicato per teoremi con la struttura: per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, vale la proprietà $p(n)$. n_0 è il più piccolo intero per cui si vuole che la proprietà sia vera; se $n_0 = 0$ il teorema è valido per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per dimostrare per induzione:

- $p(n)$ è vera per $n = n_0$
- se p è vera per $n = n_0$, si dimostra che è vera anche per $p(n+1)$
- allora $p(n)$ è vera per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.

10 MAGGIORANTI, MINORANTI, MASSIMO E MINIMO, ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE

$X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme dei numeri reali

- $y \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di X se $\forall x \in X$ risulta $y \geq x$
- $y \in \mathbb{R}$ si dice minorante di X se $\forall x \in X$ risulta $y \leq x$.
- A è un massimo di X, se $A \in X$ e $A \geq x \ \forall x \in X$.
- B è ~~un~~ minimo di X, se $B \in X$ e $B \leq x, \forall x \in X$.
- $\inf X$ (estremo inferiore di X) è il massimo dei minoranti di X.
- $\sup X$ (estremo superiore di X) è il minimo dei maggioranti di X.

11 ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE, PROPRIETÀ CARATTERISTICA

$Y \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme dei numeri reali

- $\inf Y$ (estremo inferiore di Y) è il massimo dei minoranti di Y.
- $\sup Y$ (estremo superiore di Y) è il minimo dei maggioranti di Y.

12 IMMAGINE E CONTROIMMAGINE DI UNA FUNZIONE

L'immagine di una funzione è l'insieme dei valori assunti dalla funzione sul proprio dominio, ed è quindi contenuta nel codominio.

- $f: A \to B \quad f(a) = b \qquad b$ è l'immagine di a attraverso f

La controimmagine di una funzione f dell'insieme C, è insieme degli elementi a del dominio A la cui immagine appartiene a C.

$f: A \to B \qquad \text{dom } f = A \qquad C \subseteq B$
$\qquad\qquad\qquad \text{codom } f = B$

- $f^{-1}(C) = \{a \in A \text{ t.c. } f(a) \in C\}$

13 FUNZIONE INIETTIVA, SURIETTIVA, BIIETTIVA,

DEFINIZIONE DI FUNZIONE INVERSA

DISEGNARE GRAFICO DELLA SUA INVERSA, TRAMITE UNA FUNZIONE INVERTIBILE

- Funzione suriettiva: se l'immagine di f coincide con il codominio
- Funzione iniettiva: elementi distinti del dominio hanno immagini distinte

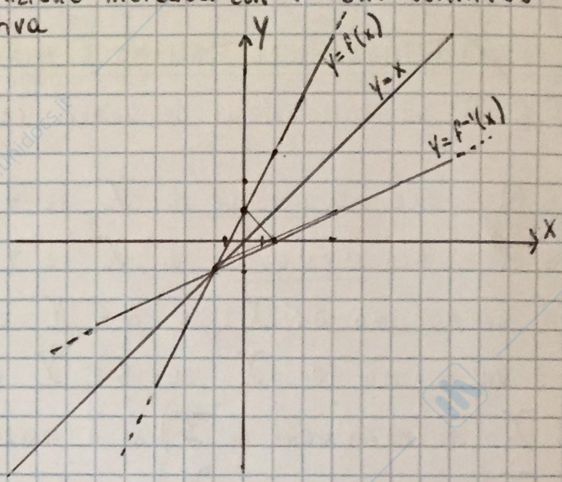
  $f: A \rightarrow B$ è iniettiva se $a \neq a'$, $a, a_1 \in A$ si ha che $f(a) \neq f(a')$
- Funzione biiettiva: funzione sia suriettiva che iniettiva

- La funzione inversa di una data funzione f è quella funzione indicata con f^{-1} che definisce l'associazione inversa di f. $f: A \rightarrow B$ deve essere bigettiva

$y = f(x) = 2x + 1$ $\qquad x = \frac{y-1}{2}$

~~$f^{-1}(x) =$~~

- Il grafico della funzione inversa è il simmetrico del grafico di partenza rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



14 FUNZIONE LIMITATA, MONOTONA, SIMMETRICA E PERIODICA

DISEGNARE GRAFICO PER OGNI FUNZIONE

- Una funzione si dice limitata se è limitata sia superiormente che inferiormente

  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ si dice limitata se l'insieme delle immagini di f, $f(A) \subseteq B$ è limitato inferiormente e superiormente (cioè si ha sup e inf finiti)

- ~~Alx~~ Una funzione periodica è una funzione che ripete il comportamento che presenta su un certo intervallo periodicamente su tutto il proprio dominio.

  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice periodica se esiste un numero reale T (periodo) tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha:

  $f(x+T) = f(x)$ $\qquad$ f è periodica di T, $T > 0$ se è il più piccolo numero reale positivo

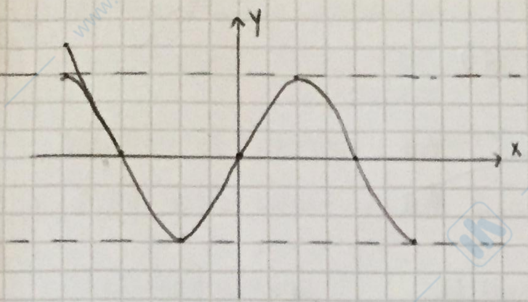
- Una funzione è simmetrica se il suo grafico ~~è simmetrico rispetto~~ gode di una particolare simmetria. ES. funzione pari → valori simmetrici asse ordinate

- La monotonia di una funzione è una proprietà che esprime la crescita o la decrescita di una funzione.
  - Una funzione si dice crescente se $\forall\ x_1, x_2 \in \text{dom } f$ si ha che: $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - Una funzione si dice decrescente se $\forall\ x_1, x_2 \in \text{dom } f$ si ha che: $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

  ?

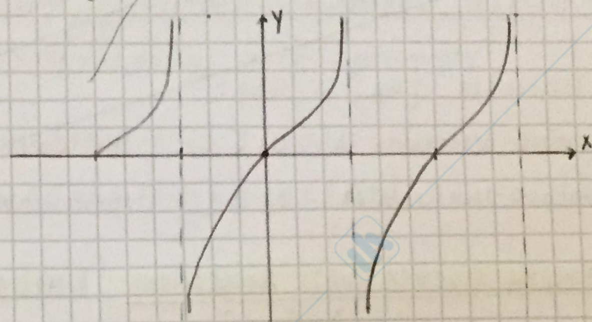
Funzione limitata

$f(x) = \text{sen}\, x \qquad -1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$



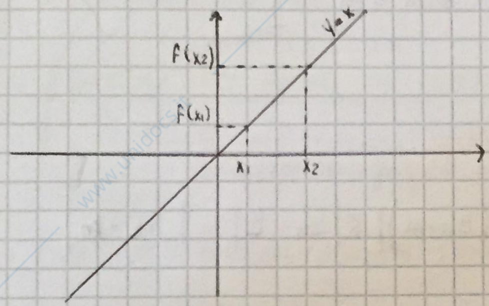
Funzione periodica
periodo = π

$f(x) = \text{tg}\, x$



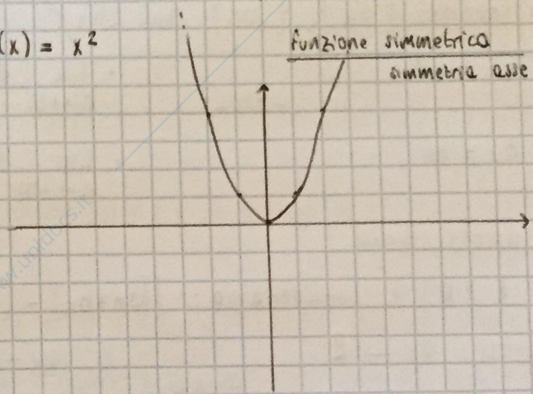
Funzione monotona
monotona crescente

$f(x) = x$



Funzione simmetrica
simmetria asse $x = 0$

$f(x) = x^2$



15 PRODOTTO DI COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Il prodotto di composizione di funzioni o funzione composta si definisce applicando la seconda funzione alle immagini della prima.

$f: A \rightarrow B \quad , \quad g: B \rightarrow C$

$a \in A \qquad f(a) \in B \; , \; g[f(a)] \in C$

$g(f(a)) = g \circ f$

16 STRETTA MONOTONIA IMPLICA INVERTIBILITÀ

Una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona in D è invertibile in D.

Supponiamo che f sia strettamente crescente in D, quindi $x_1, x_2 \in D$ e dimostriamo che:

$$x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Se $x_1 \neq x_2$, allora $x_1 > x_2$ o $x_1 < x_2$. Per la monotonia stretta di f si ha che nel primo caso $f(x_1) > f(x_2)$, mentre nel secondo $f(x_1) < f(x_2)$; quindi in entrambi i casi $f(x_1) \neq f(x_2)$ perciò f è invertibile.

17 TEOREMA ALGEBRA LIMITI SUCCESSIONI, DIMOSTRAZIONE SOMMA E PRODOTTO

- Due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tali che:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ allora: • $\lim_{n\to+\infty} a_n+b_n = \ell + m$ $\quad \ell, m \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = m$ • $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = \ell \cdot m$

- Dimostrazione somma

per la disuguaglianza triangolare

Fissato $\varepsilon > 0$ e consideriamo: $|(a_n+b_n)-(\ell+m)| = |(a_n-\ell)+(b_n-m)| \leq |a_n-\ell| + |b_n-m|$

Per ipotesi: $a_n \to \ell$ quindi $|a_n-\ell| < \varepsilon$

$b_n \to m$ $|b_n - m| < \varepsilon$

Concludiamo che: $|(a_n+b_n)-(\ell+m)| < 2\varepsilon$ definitivamente, quindi $a_n+b_n \to a+b$

- Dimostrazione prodotto

Fissato $\varepsilon > 0$ per la disuguaglianza triangolare: $|a_n \cdot b_n - (\ell \cdot m)| = |a_n(b_n-m) + m(a_n-\ell)| \leq$
$|a_n(b_n-m)| + |m(a_n-\ell)| = |a_n||b_n-m| + |m||a_n-\ell|$

Poiché $a_n \to \ell$, $|a_n-\ell| < \varepsilon$ e inoltre $|a_n| < |\ell| + \varepsilon$

$b_n \to m$ $|a_n - m| < \varepsilon$ e inoltre $|b_n| < |m| + \varepsilon$

quindi: $|a_n \cdot b_n - \ell \cdot m| < (|\ell|+\varepsilon)\cdot\varepsilon + |m|\cdot\varepsilon < \varepsilon \cdot cost$

Per l'arbitrarietà di ε segue la tesi.

18 TEOREMA PERMANENZA SEGNO SUCCESSIONI

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione e supponiamo: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \geq 0$

allora $a_n \geq 0$ vale il contrario $\ell \leq 0 \to a_n \leq 0$

Dimostrazione

Da definizione: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, scelto $\varepsilon > 0$ risulta $|a_n - \ell| < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

Posto $\varepsilon = |\ell|$ si ha:

$\ell - |\ell| < a_n < \ell + |\ell|$

se $\ell > 0 \Longrightarrow 0 < a_n < 2\ell \to a_n > 0$

se $\ell < 0 \Longrightarrow 2\ell < a_n < 0 \to a_n < 0$

19 FUNZIONE CONTINUA SU UN INTERVALLO, TEOREMA DI WEIERSTRASS, CONTROESEMPI

- Una funzione si dice continua su un intervallo se è continua in ogni punto dell'intervallo.
  Sia $I:[a,b]$, $f(x)$ è continua in I se la funzione è continua per ogni punto appartenente all'intervallo.
- teorema di Weierstrass: Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume massimo e minimo in $[a,b]$, ossia esistono $x_m, x_M \in [a,b]$ tali che $f(x_m)\leq f(x)\leq f(x_M)$ $\forall\ x\in[a,b]$
- $f(x)$ → continua
  → intervallo chiuso
  → intervallo limitato

controesempi:
- $1/x$ nell'intervallo $[0;2]$
- $y=x$ in $[0;1)$
- $y=x$ in $(-\infty;+\infty)$

20 TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

- Sia $f: I\to\mathbb{R}$ una funzione continua, con I intervallo; allora $Im(f)$ è un intervallo
- Dimostrazione:

Siano α e β rispettivamente l'estremo inferiore e superiore di I, e sia $y\in(\alpha,\beta)$. Esistono allora a, b tali per cui $y\in(f(a),f(b))$. Supponendo $a<b$ si consideri la funzione $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ data da $g(x)=f(x)-y$; allora $g(x)$ è continua è si ha $g(a)\cdot g(b)<0$. Per il teorema degli zeri esiste $x\in(a,b)$ tale per cui $g(x)=0$, ovvero $f(x)=y$. Dunque $y\in(a,b)$ e quindi $y\in I$ che conclude la dimostrazione

21 ASINTOTI VERTICALI, ORIZZONTALI, OBLIQUI

- Si dice che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y=\ell$ $(\ell\in\mathbb{R})$ per $x\to+\infty$ oppure per $x\to-\infty$
  se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ oppure $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$
- Si dice che f ha un asintoto verticale di equazione $x=c$ $(c\in\mathbb{R})$ per $x\to c$ (oppure $x\to c^+$, $x\to c^-$)
  se $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$ o $-\infty$ (oppure per $x\to c^+$ o $x\to c^-$)
- Se ~~anche~~ una funzione presenta limite infinito all'infinito può esserci un asintoto obliquo.
  Si dice che $f(x)$ ha un asintoto obliquo $y=mx+q$ $(m\neq0,\ q\in\mathbb{R})$ per $x\to+\infty$ o per $x\to-\infty$ se
  $$\lim_{x\to+\infty(-\infty)}[f(x)-(mx+q)]=0$$

22 TEOREMA CONTINUITÀ FUNZIONE INVERSA

- Sia $f: I\to\mathbb{R}$, con I intervallo, una funzione continua in I. Allora f è invertibile in I se è solo è strettamente monotono. In tale caso la sua inversa è ancora strettamente monotona e continua

23 FUNZIONE DERIVABILE IN UN PUNTO, SIGNIFICATO GEOMETRICO

- Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$; f si dice derivabile in $x_0 \in (a,b)$ se esiste finito:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- Il significato geometrico della derivata in un punto mette in relazione il grafico della ~~retta~~ funzione e la retta tangente ad esso nel punto considerato: la derivata ha il significato geometrico di coefficiente angolare, o pendenza della retta tangente.

24 DEFINIZIONE FUNZIONE CONTINUA E DERIVABILE IN UN PUNTO, RELAZIONE TRA CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

- Sia $f: I\to\mathbb{R}$ (I intervallo) e $c\in I$, si dice che f è continua in c se esiste:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

- Sia $f: I\to\mathbb{R}$ (I intervallo) e $x_0\in I$, f si dice derivabile in x_0 se esiste finito:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

- Se f è derivabile in un punto x_0, allora f è continua in x_0.

Dimostrazione:

Vogliamo dimostrare che una funzione $f(x)$ derivabile in x_0 è continua in x_0 cioè $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ o $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Consideriamo l'uguaglianza per $0 \neq h \in \mathbb{R}$: $f(x_0+h) = f(x_0) + f(x_0+h) - f(x_0)$, che può essere riscritto nella seguente forma: $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h$. Passiamo al limite per $h\to 0$ di entrambi i membri: $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} f(x_0) + \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h$. $\lim_{h\to 0} f(x_0) = K$ (costante), mentre l'altro può essere riscritto: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h$.

Essendo la funzione derivabile in x_0 esistono finiti i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale e coincidono. Quindi:

$\lim_{h\to 0} f(x_0) = f(x_0) + c\cdot 0$ e si conclude che $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

25 DERIVATA DESTRA E SINISTRA, PUNTO ANGOLOSO, CUSPIDE, FLESSO A TANGENTE VERTICALE

- Derivata destra: nel punto x_0 il limite del rapporto incrementale calcolato da destra:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- Derivata sinistra: nel punto x_0 il limite del rapporto incrementale calcolato da sinistra:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- Punto angoloso: * 2

Cuspide

Flesso a tangente verticale

26 ALGEBRA DELLE DERIVATE, REGOLA DI LEIBNIZ (DERIVAZIONE DEL PRODOTTO)

- Siano $f, g: (a,b)\to\mathbb{R}$, derivabile in (a,b) allora $f\pm g$, $f\cdot g$, f/g $(g\neq 0)$ sono derivabili in (a,b) e valgono le regole

$(f\pm g)' = f' \pm g'$ | $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ | $(f/g)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$

• $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ Regola di Leibniz

Dimostrazione: $f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0) \cdot g(x_0)$ e aggiungo tolgo $f(x_0+h) \cdot g(x_0)$

Applicando la definizione di derivata e ipotizzando che $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in x_0:
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) - f(x_0+h) \cdot g(x_0) + f(x_0+h) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{h}$$

Raccolgo $f(x_0+h)$ e $g(x_0)$ si ottiene:
$$\lim_{h\to 0} \underbrace{f(x_0+h)}_{f(x_0)} \left[\underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)}\right] + \lim_{h\to 0} \underbrace{g(x_0)}_{g(x_0)} \left[\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)}\right]$$

essendo $f(x)$ derivabile in x e quindi anche continua: $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$:
$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0)$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$
e quindi $f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g'(x)$.

27 TEOREMA DI DERIVAZIONE COMPOSTA (REGOLA DELLA CATENA)

• Sia $g \circ f$ la composta di due funzioni f e g. Se f è derivabile in un punto x e g è derivabile in $y = f(x)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale la formula:
$$(g \circ f)'\, x = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Dimostrazione:
$z = g(y)$
$y = f(x)$
$z = g(f(x))$

definizione di derivata del rapporto incrementale: $\lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$

moltiplichiamo e dividiamo per $f(x+h) - f(x)$: $\lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

pensiamo a $f(x+h)$ e $f(x)$ come due numeri, $y + k = f(x+h)$.
Quando $h \to 0$ anche $k \to 0$

$$: \lim_{k\to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{y+k-y} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$
$$= \lim_{k\to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

28 DEFINIZIONE DI MASSIMO E MINIMO E PUNTO CRITICO. TEOREMA DI FERMAT

• $x_0 \in \text{dom} f$ è un punto di massimo relativo se esiste $\delta > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap \text{dom} f$ si ha che $f(x) \leq f(x_0)$

• $x_0 \in \text{dom} f$ è un punto di minimo relativo se esiste $\delta > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap \text{dom} f$ si ha che $f(x) \geq f(x_0)$

• $x_0 \in \text{dom} f$ è un punto critico di f se:

- la funzione è derivabile in x_0 e si ha che $f'(x_0) = 0$ $\longrightarrow$ x_0 = punto stazionario
- la funzione non è derivabile in x_0 $\longrightarrow$ x_0 è un punto di ~~discontinuità~~ non derivabilità

• Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in $x \in (a, b)$. Se x è un punto di estremo locale allora:
$$f'(x) = 0$$

Dimostrazione: Per ipotesi $f(x)$ è derivabile in ~~x_0~~ quindi vale: $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$.

Dimostriamo il caso in cui x_0 è un punto di max relativo; il contrario è uguale.

x_0 è un punto di massimo relativo, dato un incremento h vale: $f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$

Dividiamo la disuguaglianza per h: - se h è positivo $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$
- se h è negativo $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$

• Facciamo il limite per $h \to 0$:
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \longrightarrow f'_+(x_0) \leq 0$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \longrightarrow f'_-(x_0) \geq 0$$
i due limiti devono coincidere quindi: $f'_+(x_0) = 0 = f'_-(x_0)$ cioè $f'(x_0) = 0$

29 TEOREMA DI LAGRANGE (O DEL VALORE MEDIO)

· Sia $f: ~~dom~~ [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora esiste un $c \in (a,b)$ tale che:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Dimostrazione:

Consideriamo una funzione ausiliaria $F(x)$ definita come $F(x) = f(x) - g(x)$ $\quad g(x)$ = retta e tale che $f(a) = g(a)$ $\quad f(b) = g(b)$

Quindi le due funzioni coincidono agli estremi e la funzione ausiliaria $F(x)$ sarà nulla agli estremi.

La scelta della funzione g è obbligata: essa dovrà passare per i punti $A = (a; f(a))$, $B = (b; f(b))$.

Per l'equazione della retta passante per due punti: $\dfrac{x-a}{y-b} = \dfrac{g(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}$ $\qquad g(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$ (Formula retta passante per due punti)

$F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ $\to$ $F(x)$ verifica il teorema di Rolle e quindi esiste un punto $c \in (a,b)$ in cui $F'(c) = 0$

allora: $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\quad$ per il teorema di Rolle: $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

30 CARATTERIZZARE FUNZIONI COSTANTI SU UN INTERVALLO I

Sia f una funzione derivabile in un intervallo $[a,b]$ tale che $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$

Allora f è costante nell'intervallo $[a,b]$

31 TEST DI MONOTONIA

· Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora $\begin{cases} f \text{ crescente} \longleftrightarrow f'(x) \geq 0 \\ f \text{ decrescente} \longleftrightarrow f'(x) \leq 0 \end{cases}$ $\quad \forall x \in (a,b)$

Dimostrazione:

Considerata $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ e due punti qualunque $x, z \in (a,b)$.

f è crescente / decrescente $\longleftrightarrow$ $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$ è ≥ 0 / ≤ 0

Passando al limite per $z \to x$ per il teorema della permanenza del segno dalle due relazioni si ottiene:

f crescente $\to f'(x) \geq 0$
f decrescente $\to f'(x) \leq 0$ $\qquad \forall x \in (a,b)$

Sia $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$ proviamo che allora f è crescente in (a,b). Prendiamo due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in (a,b)$ $x_1 \leq x_2$ e mostriamo che $f(x_1) \leq f(x_2)$. Applicando il teorema di Lagrange ad f su un intervallo $[x_1, x_2]$ abbiamo che esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$

Poiché $f'(c) \geq 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, ne segue che $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, cioè la tesi

32 DEFINIRE FUNZIONE CONCAVA, CONVESSA IN UN PUNTO, DEFINIRE PUNTO DI FLESSO, TEST DI CONVESSITÀ

- Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in (a,b)$ un punto di derivabilità per f, oppure sia $f'(x_0)=\pm\infty$. Il punto x_0 si dice di flesso per f se esiste un intorno destro (x_0, x_0+h), $h>0$ in cui f è strettamente convessa (concava) e un intorno sinistro $(x_0-h; x_0)$ in cui è strettamente concava (convessa).
- Sia $f: I \to \mathbb{R}$ dove I è un intervallo. Si dice che f è convessa (concava) in I se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ si ha che il segmento (corda) di estremi $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ non ha punti sotto (sopra) il grafico di f.
- Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$
  - Se f è derivabile in (a,b), allora f è convessa (concava) in (a,b) se e solo se f' è crescente (decrescente) in (a,b).
  - Se f è derivabile due volte in (a,b), allora f è convessa (concava) in (a,b) se e solo se $f''(x)\geq 0\ (\leq 0)\ \forall x\in(a,b)$

33 TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Siano f, g funzioni derivabili in un intervallo (a,b) con $g, g' \neq 0$ in (a,b). Se:

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ oppure $\pm\infty$
- $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x) = L \in \mathbb{R}^*$

Allora: $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

34 FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE N CON RESTO SECONDO PEANO

Sia $f(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a,b)$. Allora:

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x\to x_0$$

$$T_{n,x_0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

35 DEFINIZIONE DI PRIMITIVA, DUE PRIMITIVE DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE

- Si dice che una funzione G, derivabile in un intervallo I è una primitiva di f in I se:

$$G'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

- Sia $F: I\to\mathbb{R}$, integrabile in I e siano $f(x)$ e $g(x)$ due primitive di $F(x)$ tali che:

$$\int F(x)dx = f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in I$$

Allora $f(x)$ e $g(x)$ differiscono per una costante

Dato che $f'(x) = g'(x)$ allora $f'(x) - g'(x) = 0$.

Integrando entrambi i membri otteniamo: $\int f'(x) - g'(x) = \int 0\,dx = \int f'(x)dx - \int g'(x)\,dx = \int 0\,dx =$
$= f(x) - g(x) = K \quad \forall K \in \mathbb{R}$

36 INTEGRAZIONE PER PARTI

- $$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

- Dimostrazione: Se f e g sono derivabili in $[a,b]$ si ha:

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \quad \text{cioè} \quad f\cdot g' = (f\cdot g)' - f'g$$

Facendo l'integrale in entrambi i membri: $\int f\cdot g' = \underbrace{\int (f\cdot g)'}_{f\cdot g} - \int f'\cdot g \qquad \int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$

37 INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Siano $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $g: J \to I$ una funzione derivabile con derivata continua. Si ha che:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \left[\int f(t)\, dt\right]_{t=g(x)}$$

Dimostrazione:

Sia $F(x)$ una primitiva della funzione $f(x)$ su I, allora per la regola di derivazione della funzione composta si ha:

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

integrando membro e membro si ottiene:

$$\underbrace{\int \frac{d}{dx} F(g(x))\, dx}_{F(g(x)) + k} = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx \quad \text{che è la tesi}$$

38 TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste un $c \in [a,b]$ tale che:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx = f(c)$$

Dimostrazione:

Essendo f continua in $[a,b]$ per il teorema di Weierstrass essa presenta un massimo (M) e un minimo (m). Dalle proprietà di monotonia:

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b m\, dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M\, dx = M$$

Quindi il valore $\frac{1}{b-a} \int f(x)\, dx$ è compreso tra il minimo e il massimo di f. Per la proprietà dei valori intermedi delle funzioni continue tale valore è uguale a $f(c)$ per qualche $c \in [a,b]$.

39 FUNZIONE INTEGRALE, se f è integrabile su (a,b), $F(x)$ è continua in (a,b)

$\cdot\ F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ — Funzione $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ $\forall x \in [a,b]$; F funzione integrale di f su $[a,b]$

f integrabile su $(a,b) \to F(x)$ è continua in (a,b)

Dimostrazione:

Siano $x, y \in [a,b]$ e consideriamo $|F(x) - F(y)|$.

Per la proprietà degli integrali: $|F(x) - F(y)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^x f(t)\,dt + \int_y^a f(t)\,dt\right| = \left|\int_y^x f(t)\,dt\right|$

Consideriamo l'estremo superiore delle immagini della funzione f su $[a,b]$ $\quad L = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Sempre per la proprietà degli integrali: $\left|\int_y^x f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_y^x |f(t)|\,dt\right| \leq \left|\int_y^x L\, dx\right| = L|x-y|$

$f(x) \leq |f(x)|$

Abbiamo ricavato: $|F(x) - F(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x, y \in [a,b]$

Se fissiamo $\varepsilon > 0$ basta prendere come δ che soddisfa la definizione di funzione continua $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

per cui se $|x-y| < \varepsilon$ ne segue che $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$, siamo giunti alla tesi.

40 FUNZIONE INTEGRALE, TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

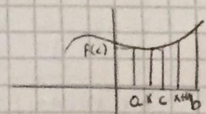
- Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata e integrabile in $[a,b]$ $\forall x\in[a,b]$

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$ $F(x)$ è la funzione integrale di f su $[a,b]$.

- Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua su (a,b). Allora la funzione integrale $F(x)$ è derivabile in ogni punto in cui $f(x)$ è continua e risulta:

$$F'(x)=f(x)$$

Dimostrazione:



Facciamo la derivata della funzione integrale tramite il rapporto incrementale:

per il teorema della media integrale

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{F(\ \ +h)-F(\ \ )}{h}=\lim_{x\to0}\frac{\int_a^{x+h}f(x)dx+\int_a^{x_0}f(x)dx}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\int_x^{x+h}f(x)dx}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(c)\cdot \cancel{h}}{\cancel{h}}=f(c)\ \text{con}\ c\in[x,x+h]$$

quindi $F'=f(x)$

41 COROLLARIO TEOREMA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione che ammette una primitiva $G(x)$ su $[a,b]$. Allora vale la seguente formula:

$$\int_a^b f(t)=G(b)-G(a)$$

Dimostrazione:

La funzione integrale $F(x)$ è una primitiva della funzione f, e ricordando che tutte le primitive differiscono per una costante c, allora:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt=G(x)+c$$

Sappiamo che se $x=a$, dalle proprietà degli integrali risulta: $F(a)=\overbrace{\int_a^a f(t)\,dt}^{0}=G(a)+c\longrightarrow c=-G(a)$

Possiamo esprimere la funzione integrale come: $\int_a^x f(t)dt=G(x)-G(a)$

Ponendo $x=b$ si arriva a scrivere $\int_a^b f(t)\,dt=G(b)-G(a)$ che è la tesi.

42 SERIE CONVERGENTE, DIVERGENTE, IRREGOLARE. ESEMPIO PER TIPO

Data una successione di numeri reali $\{a_n\}_n$ e costruita la successione delle somme parziali $\{s_n\}_n$ abbiamo definito la serie di termini generale a_n come: $\lim_{n\to+\infty} s_n=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$

Si può avere:

- $\lim_{n\to+\infty} s_n=L$ (numero finito) $\longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ è una serie convergente e la sua somma vale L.
- $\lim_{n\to+\infty} s_n=\pm\infty \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ è una serie che divergerà positivamente/negativamente
- $\lim_{n\to+\infty} s_n=$ non esiste $\longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ è una serie irregolare o indeterminata

43 SERIE TELESCOPICHE, PROPRIETÀ DI CONVERGENZA

Serie telescopica: $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+k})}$ o $\sum_{n=m}^{+\infty} (a_{n+k} - a_n)$

- proprietà di convergenza: se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste ed è finito, allora la serie converge e somma $= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$
- esempio serie telescopica: Serie di Mengoli

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ → la serie converge e ha per somma 1

44 SERIE GEOMETRICA, ENUNCIARE | DIMOSTRARE QUANDO CONVERGE - DIVERGE, È IRREGOLARE

q = numero reale

Serie geometrica di ragione q: $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}$

guardare la ragione q:
- se il modulo della ragione q è minore di 1 → serie converge → somma $= \frac{1}{1-q}$
  $-1 < q < 1$
- se la ragione q è minore o uguale a 1 → serie irregolare
  $q \leq 1$
- se la ragione q è maggiore o uguale a 1 → serie diverge positivamente
  $q \geq 1$

45 PROPRIETÀ FONDAMENTALE DELLE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

Una seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini non negativi è convergente o divergente a $+\infty$.

Essa converge se e solo se la successione delle somme parziali n-esime è limitata.

Dimostrazione: Una serie a termini non negativi avrà la successione delle somme parziali crescente, poichè:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

Per il teorema sull'esistenza del limite di una successione monotona, esiste $\lim_{n\to+\infty} S_n$: esso può essere finito o $+\infty$ a seconda che la successione sia limitata o no. Quindi $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{S_n\}$

46 SERIE ARMONICA, SERIE ARMONICA GENERALIZZATA, PROPRIETÀ DI CONVERGENZA

Serie armonica: $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}}$

diverge positivamente

Serie armonica generalizzata: $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}}$

- converge se $\alpha > 1$
- diverge positivamente se $\alpha \leq 1$

47 CONDIZIONE NECESSARIA CONVERGENZA SERIE

Condizione necessaria affinché una seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga $\longrightarrow$ termine generale a_n ~~tende~~ a 0
$a_n \longrightarrow 0$

$\rightarrow$ Condizione non sufficiente : esempio : - serie armonica

- se il termine generale non tende a 0, certamente la serie non converge

$- \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$ non converge

48 CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Se esiste il limite: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

ℓ : $\ell > 1 \longrightarrow$ serie diverge
$\ell < 1 \longrightarrow$ serie converge
$\ell = 1 \longrightarrow$ non si può dire nulla

Dimostrazione : ① caso : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$

Poiché $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, allora fissato un $\varepsilon > 0$, si ha che : $\sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}$

$\ell < 1$, perciò $\ell < 1 - \varepsilon$ per un ε opportuno. Per questo ε si ha : $\sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2} < (1-\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$

quindi $a_n < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$. Per confronto con la serie geometrica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$, la serie di partenza converge

② caso : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1$; si ha che $a_n > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$ definitivamente per un certo $\varepsilon > 0$

Dunque $a_n \longrightarrow +\infty$ e la serie diverge.

49 CRITERIO DEL CONFRONTO O DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Se le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ (a termini positivi) sono asintotiche : $a_n \sim b_n$

Allora: $\sum a_n$ e $\sum b_n$, le due serie hanno lo stesso carattere : sono entrambe convergenti o divergenti.

Dimostrazione : $a_n \sim b_n$ per $n \to \infty$ significa che $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 1$ per $n \to \infty$. Questo significa che $\forall \varepsilon > 0$ si ha definitivamente

$1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon$. Scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ottengo $\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$;

per ipotesi $b_n > 0$ quindi posso : $\frac{1}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} b_n$ definitivamente.

Per il teorema del confronto la prima delle due disuguaglianze dice che se $\sum a_n$ converge $\longrightarrow \sum b_n$ converge
Mentre la seconda se $\sum a_n$ diverge $\longrightarrow \sum b_n$ diverge, hanno perciò lo stesso carattere.

50 DEFINIZIONE CONVERGENZA ASSOLUTA ESISTONO SERIE CONVERGENTI NON ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

Una serie $\sum a_n$ si dirà assolutamente convergente se converge la serie a termini non negativi: $\sum |a_n|$

Se la serie $\sum a_k$ converge assolutamente, allora converge

Controesempio : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge per il criterio di Leibniz, mentre $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge poiché è la serie armonica

51 SERI...
- Seri...
un...

CRI...

47 CONDIZIONE NECESSARIA CONVERGENZA SERIE

Condizione necessaria affinché una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga $\longrightarrow$ termine generale a_n ~~tende~~ a 0
$a_n \longrightarrow 0$

$\rightarrow$ Condizione non sufficiente: esempio: – serie armonica

· se il termine generale non tende a 0, certamente la serie non converge

– $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$ non converge

48 CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Se esiste il limite: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

ℓ: $\ell > 1 \rightarrow$ serie diverge
$\ell < 1 \rightarrow$ serie converge
$\ell = 1 \rightarrow$ non si può dire nulla

Dimostrazione: ① caso: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$

Poiché $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, allora fissato un $\varepsilon > 0$, si ha che: $\sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}$

$\ell < 1$, perciò $\ell < 1 - \varepsilon$ per un ε opportuno. Per questo ε si ha: $\sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2} < (1-\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$

quindi $a_n < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$. Per confronto con la serie geometrica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$, la serie di partenza converge

② caso: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1$; si ha che $a_n > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$ definitivamente per un certo $\varepsilon > 0$

Dunque $a_n \longrightarrow +\infty$ e la serie diverge.

49 CRITERIO DEL CONFRONTO O DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Se le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ (a termini positivi) sono asintotiche: $a_n \sim b_n$

Allora: $\sum a_n$ e $\sum b_n$, le due serie hanno lo stesso carattere: sono entrambe convergenti o divergenti.

Dimostrazione: $a_n \sim b_n$ per $n \to \infty$ significa che $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 1$ per $n \to \infty$. Questo significa che $\forall \varepsilon > 0$ si ha definitivamente

$1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon$. Scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ottengo $\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$;

per ipotesi $b_n > 0$ quindi posso: $\frac{1}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} b_n$ definitivamente.

Per il teorema del confronto la prima delle due disuguaglianze dice che se $\sum a_n$ converge $\longrightarrow \sum b_n$ converge
Mentre la seconda se $\sum a_n$ diverge $\longrightarrow \sum b_n$ diverge, hanno perciò lo stesso carattere.

50 DEFINIZIONE CONVERGENZA ASSOLUTA ESISTONO SERIE CONVERGENTI NON ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

Una serie $\sum a_n$ si dirà assolutamente convergente se converge la serie a termini non negativi: $\sum |a_n|$

Se la serie $\sum a_k$ converge assolutamente, allora converge

Controesempio: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge per il criterio di Leibniz, mentre $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge poiché è la serie armonica

51 SERI...
– Seri... un ...
CRI...

51 SERIE A TERMINI A SEGNO ALTERNO. CRITERIO DI LEIBNIZ

- Serie a termini a segno alterno: serie numeriche costituite da un numero infinito di termini positivi e da un numero infinito di termini negativi. Nella maggior parte si presentano nella forma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

CRITERIO DI LEIBNIZ: Sia data la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Se:
- la successione $\{a_n\}$ è decrescente
- $a_n \to 0$ per $n \to \infty$

allora la serie converge