giovedì 26 marzo 2020 13:27

STABILITÀ di SISTEMI LTI

- STABILITÀ del SISTEMA
- stab. che dipende dalla sola MATRICE A
- stab. è funzione del solo mov. LIBERO

$$\underline{\underline{x_p(t)}} - \underline{\underline{x_m(t)}} = \boxed{\underbrace{\delta x(t)} = \underbrace{e^{At}}_{} \underbrace{\delta x_0}_{\underline{\underline{x_{p0}}} - \underline{\underline{x_{m0}}}}}$$

$e^{At} \rightarrow$ elem. sono i $\underbrace{\text{modi di } A}_{\lambda_i(A)}$

STAB. ALLA LYAPUNOV

- Se $e^{At} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad \forall$ C.I. SISTEMA AS. STABILE

$e^{At} \xrightarrow[t \to +\infty]{}$ COSTANTE $\neq 0 \quad \forall$ C.I. SISTEMA SEMPLICEMENTE STABILE

$\exists$ almeno 1 C.I. : $e^{At} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \pm\infty$ SISTEMA INSTABILE

LEGAME TRA STABILITÀ di UN SISTEMA LTI e gli AUTOVALORI di A

STABILITÀ LTI e gli AUTOVALORI di A

A DIAGONALIZZABILE ($\lambda_i(A)$ TUTTI REGOLARI)

MODI

$$e^{\lambda_i t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{se } Re(\lambda_i) < 0 \\ \text{COST} \neq 0 & \text{se } Re(\lambda_i) = 0 \\ \infty & \text{se } Re(\lambda_i) > 0 \end{cases}$$

A NON DIAGONALIZZ.

MODI $e^{\lambda_i t}$ (VEDI CASO PREC)

AUTOV. NON REGOLARI → MODI

$$t^k e^{\lambda_i t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & Re(\lambda_i) < 0 \\ \infty & \text{se } Re(\lambda_i) > 0 \text{ o se } Re(\lambda_i) = 0 \end{cases}$$

$k \geq 1$

CRITERIO degli AUTOVALORI

Dato un sistema LTI, tale sistema è:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

(1) ASINTOTICAMENTE STABILE $\overset{S.S.E}{\iff}$ $Re(\lambda_i(A)) < 0, \forall i = 1, .., n$

$e^{At} \to 0 \quad \forall$ C.I.

(2) INSTABILE $\iff$ $\exists$ almeno un autovalore con $Re(\lambda_i(A)) > 0$

oppure

$Re(\lambda_i(A)) \leq 0, \forall i = 1, .., n$ e $\exists i : Re(\lambda_i(A)) = 0$ e λ_i NON è REGOLARE

$\exists$ ALMENO 1 C.I. $e^{At} \to \infty$

(3) SEMPLICEMENTE STABILE $\iff$

(3) SEMPLICEMENTE STABILE $\Longleftrightarrow$

$\boxed{Re(\lambda_i(A)) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots n}$ e

$\forall i$: $Re[\lambda_i(A)] = 0$, λ_i è REGOLARE

$e^{At} \to c \neq 0$

MOV. LIBERI $\to 0$

$\to c \neq 0$

$\forall$ C.I.

$\{-2, 0\}$ SEMPL. ST.

$e^{0t} = 1$

ESEMPIO di ANALISI di STABILITÀ

$A = -2 \to e^{-2t}$

(1) $\boxed{\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)}$

$x(0) = x_{0n}$

$\boxed{u(t) = \bar{u} = 1}$

STABILITÀ del MOVIMENTO?

CALCOLO $x_n(t)$ MOV. NOMINALE

$$x_n(t) = e^{-2t} x_{0n} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} 1 \times 1 \, d\tau =$$

$$= e^{-2t} x_{0n} + e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau =$$

$$= e^{-2t} x_{0n} + e^{-2t} \left[\frac{e^{2\tau}}{2}\right]_0^t = e^{-2t} x_{0n} + \frac{1}{2} e^{-2t} (e^{2t} - 1)$$

$$\boxed{x_n(t) = e^{-2t} x_{0n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t}, \quad t \geq 0}$$

x_{0n}

$\bar{u} = 1$

COMB. LIN. dei MODI DEL SISTEMA ← MOV. LIB

MOV. FORZ. MODI e TERMINI con la stessa

COMB. LIN. ← MOL. ... dei MODI DEL SISTEMA   MOV. FORZ. MODI e TERMINI con la stessa forma della forzante

Costruiamo $x_{0p} = x_{0m} + \delta \Rightarrow x_p(t)$

N.B. Se $\boxed{x_{0m} = \frac{1}{2}} \rightarrow x_m(t) = \frac{1}{2} = x_{0m}$

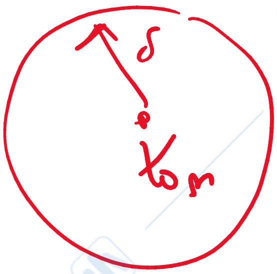
Infatti $\bar{x} = \frac{1}{2}$ è lo stato di eq. associato a $u(t) = \bar{u} = 1$ $\quad 0 = -2\bar{x} + \bar{u}$, $\bar{u} = 1$

$\bar{x} = 1/2$

PERTURBIAMO lo STATO di EQ.

$$\boxed{x_{0p} = x_{0m} + \delta} = \frac{1}{2} + \delta \qquad \begin{array}{l} \dot{x} = -2x + u \\ \bar{u} = 1 \end{array}$$

$$x_m(t) = e^{-2t} x_{0m} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t}, \quad t \geq 0$$



$$x_p(t) = e^{-2t} x_{0p} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t}$$

$$= e^{-2t}\left(\frac{1}{2} + \delta\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t}$$

$$= \frac{1}{2} + \delta e^{-2t} = \bar{x} + \boxed{\delta e^{-2t}} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$$

Per $t \to +\infty$

Per $t \to t_{\infty}$ $\quad t \to +\infty$

$$\boxed{x_p(t) \longrightarrow x_m(t) = \bar{x}}$$ MOV. di EQ. AS. STABILE

In realtà siccome sto studiando un sistema LTI posso dire che il SISTEMA è AS. STABILE

1 AUTOV. $\lambda = -2$

$$\boxed{\text{SISTEMA è AS. STAB.} \iff Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i}$$

ES. SISTEMA LTI ~~AS.~~ STABILE / SEMPL. $\quad e^{-t}, \ e^{0t} = 1$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{MODI} \qquad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -1$
$\lambda_2 = 0$

e^{0}

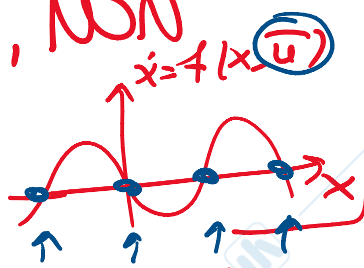
$$x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \qquad x_L(t) = e^{At} x_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$\text{C.I.} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_L(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \xrightarrow{t \to +\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

0

STABILITÀ del MOVIM. di EQUILIBRIO di un sistema NON LIN. (T.I.)

NOTA Nel caso di un sistema NON LIN T.I, la STABILITÀ è una proprietà del SINGOLO MOVIMENTO (SINGOLO STATO di EQ), NON dell'intero sistema!!!



In generale, noi LINEARIZZIAMO il sistema attorno ad una CONDIZ. di EQ

$\Downarrow$

otteniamo $\boxed{A_{LIN} \Rightarrow \lambda_i(A_{LIN})}$

SISTEMA LINEARIZZATO è un sistema LTI

$\downarrow$

Per studiare la STAB. del sistema linearizzato, posso

COSA POSSO DIRE delle STAB. dello STATO (MOVIMENTO) di EQ. del sistema NON LIN?

... del sistema linearizzato (posso usare il CRIT. degli AUTOV. applicato ad A_{LIN}

① Se $\mathrm{Re}(\lambda_i(A_{LIN}))<0$ $\forall i=1,\dots,n$

$\Downarrow$ C.S.

Mov. di EQUIL. del sistema NON LIN di partenza è AS. STABILE

NOTA BENE

$\mathrm{Re}(\lambda_i(A_{LIN}))<0 \;\forall i$ $\overset{\text{C.N.S.}}{\Longleftrightarrow}$ IL SISTEMA LINEARIZZ. è AS. STAB.

$\boxed{\text{C.S.} \Longrightarrow}$ IL mov. di EQ. del sistema NON LIN. di partenza è AS. STAB.

② Se la matrice A_{LIN} ha almeno 1 autovalore con $\mathrm{Re}(\lambda_i(A_{LIN}))>0$

C.S. $\Downarrow$

Il mov. di EQ. del sistema NON LIN. di partenza è INSTABILE

③ Se $Re(\lambda_i(A_{LIN})) \leq 0 \quad \forall i$

ma $\exists\, i : Re(\lambda_i(A_{LIN})) = 0$

$\Downarrow$

NON POSSIAMO DIRE NULLA sulle propr. di stab. del mov. di EQUIL del sistema NON LIN di partenza usando la linearizzazione

$$A_{LIN} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{-2, 0\}$$

$\rightarrow$ NON POSSO CONCL. NULLA sulla stab. del mov. di eq

$$A_{LIN} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{+2, 0\}$$

$\hookrightarrow \exists\, i : Re(\lambda_i(A_{LIN})) > 0$

$\Downarrow$

mov. di EQ. del sistema NON LIN è INSTABILE