venerdì 3 aprile 2020 10:28

FUNZ. DI TRASFERIMENTO

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)}$$

DESCRIVE IL SISTEMA LTI dal punto di vista INGRESSO/USCITA

C.I. NULLE : USCITA FORZATA

Uso della FdT per l'analisi del movimento FORZATO

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s) \qquad \Downarrow \qquad u(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t)$$

Se ho un sistema LTI AS. STABILE con FdT $G(s)$

$$y(t) = \underbrace{y_L(t)}_{\xrightarrow{t \to +\infty} 0} + y_F(t)$$

(Per $t \to +\infty$) A REGIME $\boxed{y(t) \to y_F(t)}$

$$Y(s) = G(s)\,U(s)$$

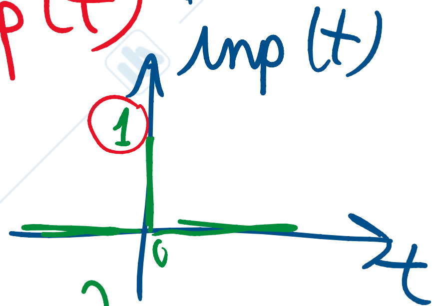
$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

VALE SEMPRE

$$\rightarrow y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{Y(s)}_{G(s)U(s)}\right] \quad \text{SEMPRE } \forall t \geq 0$$

CASO PARTICOLARE $\quad u(t) = \text{imp}(t)$

$$\text{imp}(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$



$$Y(s) = G(s)\boxed{U(s)} \qquad y_F(t)?$$

$$\mathcal{L}[\text{imp}(t)] = 1$$

$$\text{Se } u(t) = \text{imp}(t) \Rightarrow \boxed{Y(s) = G(s)}$$

$$\rightarrow y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad (0)$$

Def La FdT ≡ con la trasf. di Laplace della risposta all'impulso del sistema

$G(s) = \mathcal{L}[y_F(t)]$
$u(t) = \text{imp}(t)$

(0) La risposta (forzata) all'impulso del sistema ≡ ANTITRASF. della FdT

ESEMPI di CALCOLO delle FdT

1) $\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$ $\quad A = 0 \quad b = 1 \quad c = 1 \quad d = 0$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{1}{s} \times 1 + 0 = \boxed{\frac{1}{s}}$$

$$u(t) \to \boxed{\frac{1}{s}} \to y(t)$$

$y(t) = x(t)$

$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = u(t)$

$$\dot{y}(t) = u(t) \to y(t) = \int_0^t u(\tau)\, d\tau$$

ES 2

CON C.I. NULLE $\mathcal{L}$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ y(t) = 2x(t) \end{cases} \quad \text{LTI}$$

$A = -1$ SISTEMA AS. STABILE

$Re(\lambda_i(A)) < 0, \ \forall i$

$$\to G(s) = C\boxed{(sI-A)^{-1}}B + D = \ldots = \frac{2}{s+1}$$

Calcolo della FdT a partire dalle eq. di stato

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

stato

$\mathcal{L}$ $\dot{x} = -x + u$ $\qquad sX(s) - \cancel{x(0)} = -X(s) + U(s)$

$x(0)=0$ $\quad y = 2x$

$\rightarrow (s+1)X(s) = U(s)$

$X(s) = \dfrac{U(s)}{s+1}$

$Y(s) = \boxed{G(s)} U(s)$

$Y(s) = 2X(s) = \boxed{\dfrac{2}{s+1}} U(s)$

$G(s) = \dfrac{2}{s+1}$

CALCOLO RISPOSTA ALL'IMPULSO del sistema

$u(t) = imp(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \boxed{U(s) = 1}$

Polo in $s=-1$

$\rightarrow Y(s) = G(s) \times 1 = \dfrac{2}{\boxed{s+1}}$

$\dot{x} = -x + u$
$y = 2x$

$\mathcal{L}^{-1}$

$\boxed{y(t) \overset{\mathcal{L}^{-1}[G(s)]}{=} 2e^{-t}, \ t \geq 0}$

$A = -1 = \lambda$
$e^{\lambda t} = e^{-t}$

Modo del sistema

(FORZATA)

NELLA RISP. ALL'IMPULSO vedo i MODI del sistema

SE UN SISTEMA è AS. STABILE $\qquad$ RISP. ALL'IMPULSO

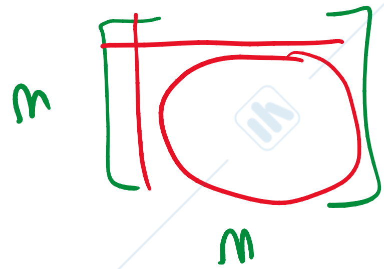
$$\boxed{\text{SE UN SISTEMA È AS. STABILE } \left(\text{TUTTI I MODI } \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\right) \Rightarrow \text{RISP. ALL'IMPULSO } \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0}$$

Proprietà della FdT

$$G(s) = C\underbrace{(sI-A)^{-1}}B + D$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det(sI-A)}_{\text{Pol. CARATT. di } A_{n\times n}}} * \boxed{\text{MATRICE TRASPOSTA dei COMPLEM. ALGEBRICI di } (sI-A)}$$

POLINOMIO di GRADO n



TROVO POLINOMI di GRADO AL PIÙ $(n-1)$

$$G(s) = C\,(sI-A)^{-1}\,B + D$$

$\boxed{\text{se } D = 0}$ → n POLI e m ZERI con $m < n$

$$G(s) = \frac{NUM(s)}{DEN(s)}$$

$NUM(s)$ → Polin. di grado $m < n$

$DEN(s)$ → Polin. di grado n

$\boxed{\text{se } D \neq 0}$ nel calcolo di $G(s)$ devo fare se $D \neq 0$ nel calcolo di $G(s)$ devo fare il den. COMUNE $\Rightarrow G(s) = \frac{NUM}{DEN}$ con $n = m$

$D = 0$	$D \neq 0$
SISTEMA STR. PROPRIO	SIST. PROPRIO
$G(s)$ ha $r > 0$	$G(s)$ ha $r = 0$

- DENOM. di $G(s)$ è il POLINOMIO CARATT. di A
  ↳ RADICI $\equiv \lambda_i(A)$

- È SEMPRE VERO che i POLI di $G(s)$ (RADICI del DENOM.) $\equiv \lambda_i(A)$?

NEGLI ESEMPI di PRIMA era così

$$\begin{cases} G(s) = \frac{2}{s+1} \rightarrow \text{Polo } s = -1 \\ \dot{x} = -x + u \qquad \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(s) = \frac{1}{s} \\ \text{Polo } s = 0 \end{cases} \qquad \dot{x} = u \Rightarrow A = 0$$

$$G(s) = \frac{NUM(s)}{DEN(s)} \quad \begin{matrix} \text{ZERI} \\ \text{POLI} \end{matrix}$$

ESEMPIO

$a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + a\,u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) + u(t) \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = x_2(t) \qquad \lambda_i(A) = \{1, -1\}$$

$T \cdot \ell(\lambda_i(A)) =$

$$\exists i : Re(\lambda_i(A)) > 0 \Rightarrow$$
SISTEMA È INSTABILE

CALCOLO $G(s)$

$\mathcal{L}$ alle eq. stato C.I. nulle $\rightarrow$

$$sX_1(s) - \cancel{x_1(0)} = X_1(s) + a\,U(s)$$
$$sX_2(s) - \cancel{x_2(0)} = -X_1(s) - X_2(s) + U(s)$$
$$Y(s) = X_2(s)$$

$$(s-1)X_1(s) = a\,U(s) \iff X_1(s) = \frac{a}{s-1}U(s)$$

$$(s+1)X_2(s) = -\frac{a}{s-1}U(s) + U(s)$$
$$= \frac{-a+s-1}{s-1}U(s)$$

$$Y(s) = X_2(s) = \underbrace{\boxed{\frac{s-(a+1)}{(s+1)(s-1)}}}_{G(s)}U(s)$$

2 POLI
$s = 1$
$s = -1$
$\equiv \lambda_i(A)$

Cosa succede per $a = 0$?

$$G(s) = \frac{\cancel{(s-1)}}{(s+1)\cancel{(s-1)}}$$ CANCELLAZIONE ZERO/POLO

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{s+1}}$$ $\leftarrow$ SISTEMA del I ORDINE

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s+1}}$$ ← II ORDINE (2 AUTOVALORI)

$s = -1$

1 POLO

$$\{poli\} \neq \{AUTOVALORI\}$$

CI SONO AUTOVALORI NASCOSTI

↓

1 AUTOV. NASC.

2 AUTOV
1 POLO
2-1

N.B.

1) Se ci sono AUTOVALORI NASCOSTI (CANCELLAZIONE ZERO/POLO) non sempre possiamo studiare la stabilità del sistema guardando solo la FdT

NEL NS. ESEMPIO

$$G(s) = \frac{s-(a+1)}{(s-1)(s+1)}$$

I POLI CHE VEDO SONO AUTOV. DEL SISTEMA

$a = 0$	$a = -2$
$\boxed{G(s) = \frac{1}{s+1}}$	$G(s) = \frac{1}{s-1}$ $\quad \{poli\} \subseteq \{\lambda_i\}$
POLO $\boxed{s = -1}$	POLO $s = 1$
1 AUTOV. NASCOSTO	1 AUTOV. NASCOSTO
↓ NON POSSO STABILIRE...	POICHÉ $\exists i : Re(\lambda_i(A)) > 0$

NON POSSO STUDIARE LA STAB. del sistema dall'analisi della sola $G(s)$

Poiché $\exists i : Re(\lambda_i(A)) > 0$ $\rightarrow$ SIST. È INSTABILE

NEL CASO $a=0$ $G(s) = \dfrac{\cancel{(s-1)}}{(s+1)\cancel{(s-1)}}$

Ho UNA CANCELLAZ. di UN POLO ($\equiv$ AUTOV.) a $Re > 0$, dico che ho una CANCELLAZIONE CRITICA

Nel caso $a=2$, ho una SEMPLIF. di $(s+1)$ (POLO/AUTOV con $Re<0$) CANCELLAZIONE NON CRITICA

se riguarda POLI con $Re < 0$

$$G(s) = \frac{\cancel{(s-1)}}{(s-2)\cancel{(s-1)}}$$

MOTIVAZIONE FISICA della CANCELLAZIONE

es. $\dot{x}_1 = x_1 + au$ $\quad a=0$

$\dot{x}_2 = -\cancel{x_1} - x_2 + u$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\dot{x}_2 = -\cancel{x_1} - x_2 + u$

$\boxed{y = x_2}$

CALCOLO di $G(s)$ io pongo C.I. $= 0$

↳ descrive legame FORZATO I/O

$x_1(t) = e^{t} \cancel{x_{10}}^{0} = 0$

CON C.I. NULLE e $a = 0$ il mio sistema corrisponde (COME LEGAME I/O)

a un sistema del I° ordine

$sX_2(s) - \cancel{x_{20}} = -X_2(s) + U(s) \Leftarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases}$

$Y(s) = X_2(s) = \boxed{\dfrac{1}{s+1}} U(s)$

Dal punto di VISTA FISICO, le CANCELLAZIONI sono dovute a 2 fenomeni:

① ho qualche VARIABILE di STATO che non è INFLUENZATA dall'INGRESSO

STATO NON COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

② ho qualche var. di STATO NON VISIBILE

(2) ho qualche var. di STATO NON VISIBILE dalla trasf. di USCITA

STATO NON COMPLETAMENTE OSSERVABILE

$a = -2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2u \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u \end{cases}$$

$y = x_2$

$\hat{x} = T x$

CAMBIO di VAR $\Rightarrow$ NUOVA STRUTTURA del sistema simile al caso $a = 0$