lunedì 30 marzo 2020 10:31

SIST. LTI → forma di stato

EQ. DIFF. LI + EQ. ALG

DOM. DEL TEMPO

Dominio delle TRASFORMATA di LAPLACE

$$u(t) \xrightarrow[\text{①}]{\mathcal{L}} U(s)$$

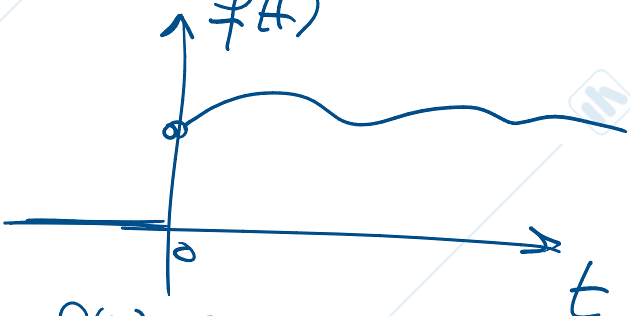
EQ. DIFF. LI LINEARI: $u(t) \to y(t)$

EQ. ALGEBRICA LINEARE: $U(s) \to Y(s)$

$$Y(s) \xrightarrow[\text{②}]{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

I passaggi ① e ② si possono fare sia per i SEGNALI ($u(t)$, $y(t)$) sia per i SISTEMI ⇐ INGRESSO/USCITA

TRASFORMATA DI LAPLACE



$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$s = \sigma + j\omega$

$f(t)$ è un segnale funz. del tempo

$$\boxed{f(t) = 0, \ \forall t < 0}$$

$f(t)$: funz. reale di var. reale

$\boxed{f(t)=0,\ \forall t<0}$

$\downarrow$

$F(s)$: fne complessa di var complessa

Def

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]:=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

Se l'integrale $\exists$ finito, $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$

ESEMPIO $f(t)=e^{-t},\ t\geq 0$

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} e^{-st}e^{-t}\,dt=\int_0^{\infty} e^{-(s+1)t}\,dt$$

$$=\left[-\frac{e^{-(s+1)t}}{(s+1)}\right]_0^{\infty} = -\left[0-\frac{1}{s+1}\right]=$$

$Re(s)+1>0$

$f(t)=e^{-t}$

Se $Re(s)>-1$

$$\boxed{F(s)=\frac{1}{s+1}}$$

Come si vede, a rigore non sempre l'$\int$ $\exists$ finito.

Si dimostra che se $\exists$ un valore $\sigma_0 \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\infty} |f(t)|\, e^{-\sigma_0 t}\,dt<+\infty \quad (*)$$

$\boxed{\sigma_0}$: $f(t)$ è ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE

ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE $\boxed{\int_0 |f(t)| e \; dt < +\infty}$ (*)

$\Downarrow$

$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \; \exists \; \forall s : Re(s) > \sigma_0$

σ_0 : ASCISSA DI CONVERGENZA

Poiché la trasf di Laplace è una funzione ANALITICA nel piano complesso, possiamo estendere la sua definizione a tutto il piano complesso senza preoccuparci dell'ascissa di convergenza

---

$f(t)$ funz. del tempo

SEGNALI A TEMPO CONTINUO $(t \in \mathbb{R})$

→ segnali di nostro interesse quali ingressi per l'analisi di sistemi LTI

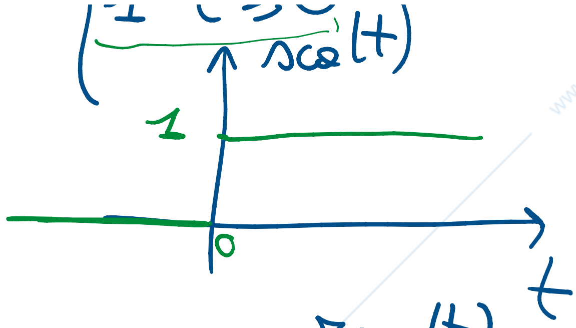
SEGNALI CANONICI	SEGNALI SINUSOIDALI
	sin / cos

① SCALINO $\quad sca(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$ ↑ $sca(t)$

- SEGNALE COSTANTE UNITARIO

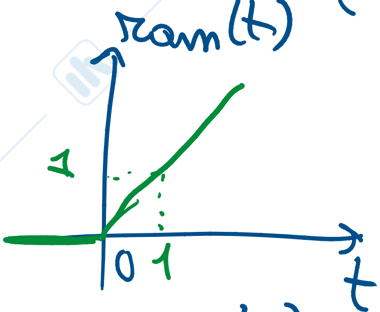
• SEGNALE COSTANTE UNITARIO

$$\boxed{\begin{gathered} u(t) = \bar{u} = 1, \; t \geq 0 \\ \equiv \mathbb{1} \\ u(t) = \text{sca}(t) \end{gathered}}$$



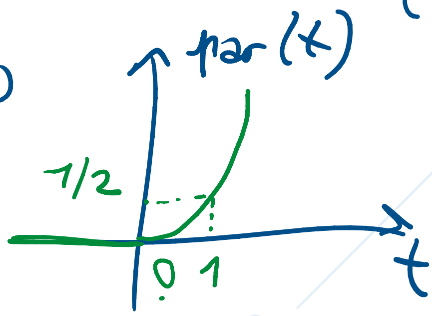
② RAMPA

$$\text{ram}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$



③ PARABOLA

$$\text{par}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{t^2}{2}, & t \geq 0 \end{cases}$$



$$\boxed{\text{CANONICO} \quad \frac{t^k}{k!}}$$

N.B. $\exists$ tra questi segnali un forte legame algebrico:

$$\frac{d}{dt}\text{ram} = \text{sca} \qquad \int_{-\infty}^{t} \text{sca}(\tau)\,d\tau = \text{ram}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\text{par} = \text{ram} \qquad \int_{-\infty}^{t} \text{ram}(\tau)\,d\tau = \text{par}(t)$$

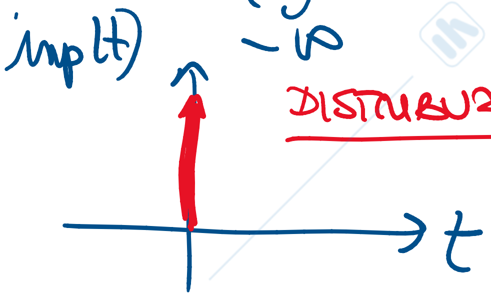
• Introduciamo un altro segnale canonico, che concettualmente sta prima dello scalino:

IMPULSO

Def formale | Def "PRATICA" di IMPULSO UNITARIO

Def formale

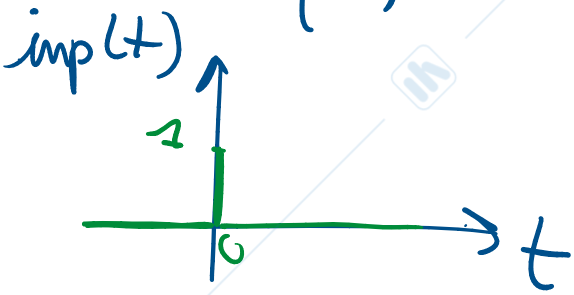
$$imp(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} imp(t)\, dt = 1 \end{cases}$$



DISTRIBUZIONE

Def "PRATICA" di IMPULSO UNITARIO

$$imp(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$



$\hookrightarrow \frac{d}{dt} sca(t) = imp(t)$

$\mathcal{L}[sca(t)]$?

$$f(t) = sca(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[sca(t)] \triangleq \int_0^{\infty} e^{-st} sca(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{s}(0-1) = +\frac{1}{s}$$

$\mathcal{L}[imp(t)]$?

$$f(t) = imp(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[imp(t)] \triangleq \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\, \underline{imp(t)}\, dt =$$ VALUTARE la funz.

$$= e^{-s0} \times 1 = 1$$

fa noi. integrando in $t=0$ con $imp(t) = 1$

PROPRIETÀ delle TRASF. di LAPLACE

1 LINEARITÀ

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(t)] =$$

$$= a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

ES $\mathcal{L}[3e^{-t} + 4\,sca(t)] = 3\mathcal{L}[e^{-t}] + 4\mathcal{L}[sca(t)] =$

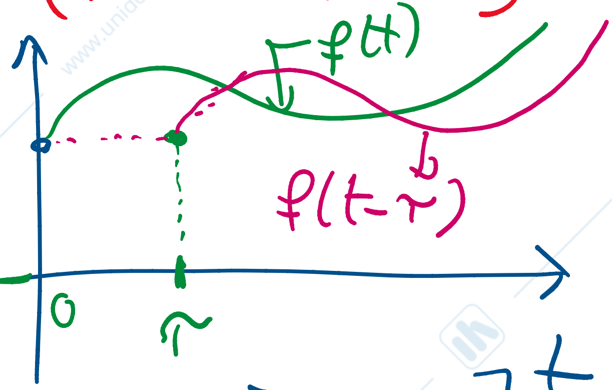
$$= \frac{3}{s+1} + \frac{4}{s}$$

2 TRASLAZIONE NEL TEMPO (RITARDO DI TEMPO)

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = \boxed{e^{-s\tau} F(s)}$$

RITARDO

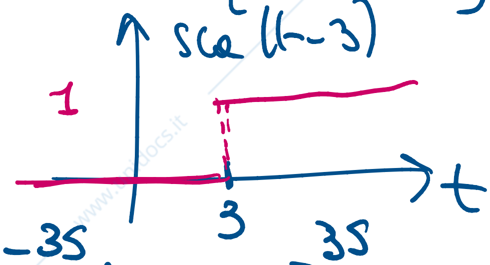


$$f(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ f(t) & t \geq \tau \end{cases}$$

τ: RITARDO DI TEMPO

τ [s]

ES $\mathcal{L}[sca(t-3)]$



$$\mathcal{L}[sca(t-3)] = e^{-3s}\frac{1}{s} = \frac{e^{-3s}}{s}$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{sca}(t-3)] = e^{-3s}\frac{1}{s} = \frac{e^{-3s}}{s}$$

③ TRASLAZIONE NEL DOMINIO della TRASF.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$$

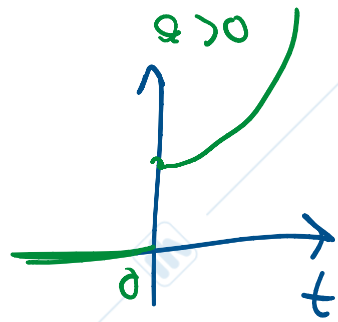
② $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s)$$

ES $\quad \mathcal{L}[\underbrace{e^{at}\,\mathrm{sca}(t)}] = \dfrac{1}{s-a}$

$$\boxed{e^{at}\,\mathrm{sca}(t) = e^{at},\ t \geq 0}$$

$e^{at}\,\mathrm{sca}(t)$



Usando le proprietà viste, possiamo calcolare

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)\,\mathrm{sca}(t)] = ? \qquad \cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\,\mathrm{sca}(t)\right] \overset{①\ \text{LIN.}}{=} \frac{1}{2}\mathcal{L}[\underbrace{e^{j\omega t}\,\mathrm{sca}(t)}_{③}] +$$

$$= +\frac{1}{2}\mathcal{L}[\underbrace{e^{-j\omega t}\,\mathrm{sca}(t)}] \overset{\text{Pr. 3}}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{s+\cancel{j\omega}+s-\cancel{j\omega}}{s^2+\omega^2} = \boxed{\frac{s}{s^2+\omega^2}} = \mathcal{L}[\cos(\omega t)\,\mathrm{sca}(t)]$$

$$= \frac{\quad}{2} \quad \frac{\quad}{s^2+\omega^2} = \boxed{\frac{\quad}{s^2+\omega^2}} = \mathcal{L}[\cos(\omega t)\, sca(t)]$$

$$\cos(\omega t),\ t \geq 0$$

IN MODO IDENTICO, scrivendo

$e^{j\omega t} =$

$e^{-j\omega t} =$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$, si ottiene

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin(\omega t)\, sca(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}}$$

④ CONVOLUZIONE

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau$$

si ha quindi $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

$$\boxed{\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)\, F_2(s)}$$

es $$\mathcal{L}[e^{at}\, sca(t) * sca(t)] = \frac{1}{s-a} \times \frac{1}{s}$$

es $\mathcal{L}\left[e^{at}\, sca(t) * sca(t)\right] = \frac{1}{s-a} \times \frac{1}{s}$

⑤ DERIVAZIONE NEL DOM. della TRASF

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$\mathcal{L}[t\, f(t)] \overset{!}{=} -\frac{dF(s)}{ds}$

N.B.

$ram(t) = t\, sca(t)$

$\mathcal{L}[ram(t)] = \mathcal{L}[t\, sca(t)] \overset{⑤}{=} -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[sca(t)]$

$\overset{!}{=} -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$

⑥ DERIVAZIONE NEL DOMINIO del TEMPO

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$ (□)

Se $f(t)$ è DISCONTINUA in $t=0$, in (□) si deve usare $f(0^-)$

N.B. Se $f(0)=0$, derivare risp. al tempo $\equiv$ MOLTIPL. per s NEL DOM. della TRASF.

6.a DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

$\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] \overset{⑥}{=} s\,\mathcal{L}[\dot{f}(t)] - \dot{f}(0) \overset{⑥}{=}$

$$= s\left[sF(s) - f(0)\right] - \dot{f}(0)$$

$$= s^2F(s) - s\,f(0) - \dot{f}(0)$$

$$s^3 \qquad s^2 \qquad s \qquad - \ddot{f}(0)$$

7 INTEGRAZIONE NEL DOMINIO del tempo

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

DIVIDERE per s ≡ INTEGRARE nel tempo

$$\mathcal{L}[par(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t ram(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}[ram(t)] = \frac{1}{s^3}$$

$$\begin{tikzcd}
IMP \arrow[r, bend left, "\int dt"] & SCA \arrow[l, bend left, "d/dt"] \arrow[r, bend left, "\int dt"] & RAM \arrow[l, bend left, "d/dt"] \arrow[r, bend left, "\int dt"] & PAR \arrow[l, bend left, "\frac{d}{dt}"]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{L}$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, bend left, "1/s"] & \frac{1}{s} \arrow[l, bend left, "s"] \arrow[r, bend left, "1/s"] & \frac{1}{s^2} \arrow[l, bend left, "s"] \arrow[r, bend left, "1/s"] & \frac{1}{s^3} \arrow[l, bend left, "s"]
\end{tikzcd}$$

s s s

NOTA (5) $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$$\mathcal{L}[t\,f(t)] = -\frac{dF}{ds}$$

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty -t\,e^{-st} f(t)\,dt = -\mathcal{L}[t\,f(t)]$$

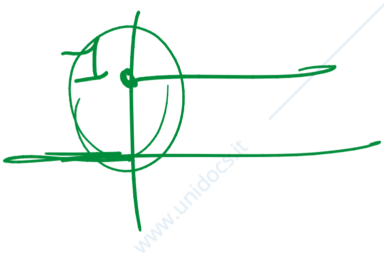
ESEMPIO $f(0^-), f(0^+)$

$f(t) = sca(t)$ so che $\dot{f}(t) = imp(t)$

$$\mathcal{L}[imp(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} sca(t)\right] \overset{6}{=} s\,\mathcal{L}[sca(t)] - f(0)$$

$$\mathcal{L}[imp(t)] \overset{!}{=} \cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} - \underbrace{f(0^-)}_{0}$$



$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$

TABELLA delle TRASFORMATE

	$f(t)$		$F(s)$
	$\mathrm{imp}(t)$		1
	$\mathrm{sca}(t)$	$(k=1)$	$1/s$
$t\,\mathrm{sca}$	$\mathrm{ram}(t)$	$(k=2)$	$1/s^2$
$\frac{t^2}{2}\mathrm{sca}$	$\mathrm{par}(t)$	$(k=3)$	$1/s^3$
	$\boxed{\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{sca}(t)}$		$1/s^k$
	$e^{at}\,\mathrm{sca}(t)$		$\frac{1}{s-a}$
	$e^{at}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{sca}(t)$		$\frac{1}{(s-a)^k}$
	$\sin(\omega t)\,\mathrm{sca}(t)$		$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
	$\cos(\omega t)\,\mathrm{sca}(t)$		$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
	$\sin(\omega t)\,e^{at}\,\mathrm{sca}(t)$		$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
	$\cos(\omega t)\,e^{at}\,\mathrm{sca}(t)$		$\frac{(s-a)}{\quad}$

$\cos(\omega t)\, e^{at} s(t)$ $\quad\left|\quad \dfrac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}\right.$

$|||$

$e^{at}\cos(\omega t),\ t \geq 0$

Le trasformate calcolate risultano essere RAPPORTI DI POLINOMI in s

FUNZIONE RAZIONALE FRATTA $\quad F(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} = \dfrac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^{m}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^{n}} \quad (0)$

CHIAMIAMO

RADICI del NUMERATORE $N(s)$ $\left\{\right.$ ZERI della trasformata i valori di s: $F(s) = 0$

RADICI del DENOMINATORE $D(s)$ $\left\{\right.$ POLI della trasformata i valori di s: $|F(s)| = \infty$

Nella forma di $F(s)$ data in (0), si hanno $\begin{cases} m & \text{ZERI} \\ n & \text{POLI} \end{cases}$

$\boxed{\text{in generale } n \geq m}$

(m POLI $\quad \boxed{n \geq m}$

Chiamiamo GRADO RELATIVO r

$$\boxed{r = n - m}$$

$r = \#$ POLI $- \#$ ZERI