POLITECNICO DI MILANO

Dipartimento di
Elettronica,
Informazione e
Bioingegneria

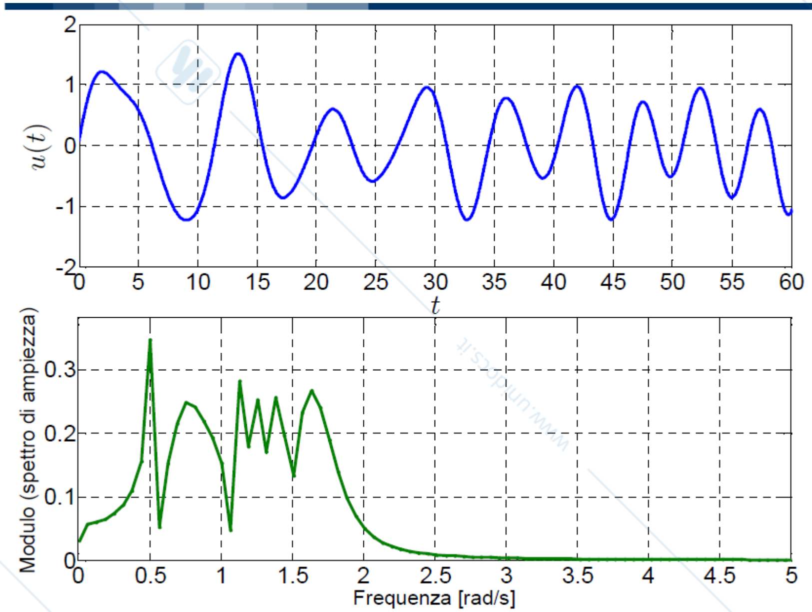
I sistemi dinamici come filtri

Fondamenti di Automatica per Ing. dell'Automazione a.a. 2019/2020
Prof.ssa Mara Tanelli

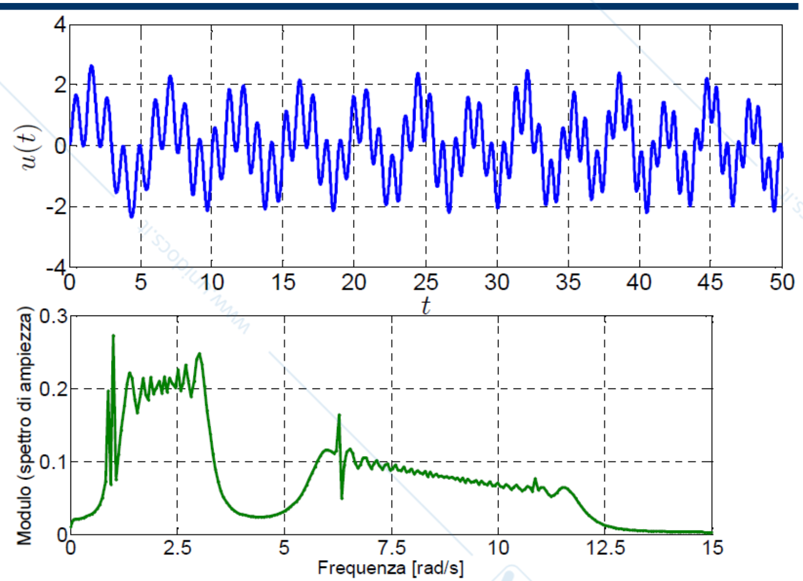
Sommario

- Riprendiamo l'analisi che avevamo interrotto nella lezione sugli spettri dei segnali e la teoria di Fourier e capiamo come impatta la presenza di un sistema dinamico nel generare lo spettro dell'uscita

Banda di un segnale



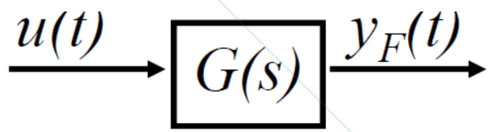
VS



Banda ≈ [0,3] rad/s **VS** Banda ≈ [0, 14] rad/s

In sintesi:

- La banda di un segnale individua la regione delle pulsazioni in cui si concentra il contenuto armonico di un segnale;
- L'andamento di un segnale è tanto più nervoso e **rapidamente variabile** quanto più la sua banda si estende a **frequenze elevate**.



Teorema della risposta armonica: sia $G(s)$ la funzione di trasferimento di un sistema lineare AS, allora:

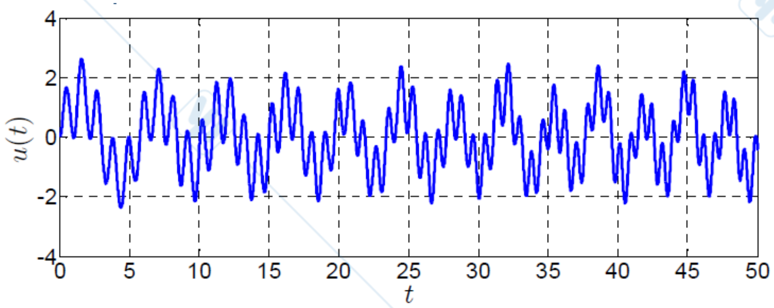
- $u(t) = \int_0^{+\infty} \sigma_u(\omega)\cos\big(\omega t + \varphi_u(\omega)\big)d\omega \implies$

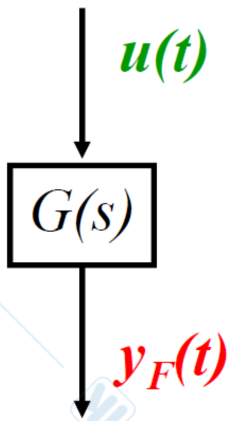
$$y_R(t) = \int_0^{+\infty} \underbrace{|G(j\omega)|\sigma_u(\omega)}_{\sigma_y(\omega)} \cos\big(\omega t + \varphi_u(\omega) + \angle G(j\omega)\big)d\omega.$$

Quindi, lo spettro di ampiezza σ_y dell'uscita di regime è dato da

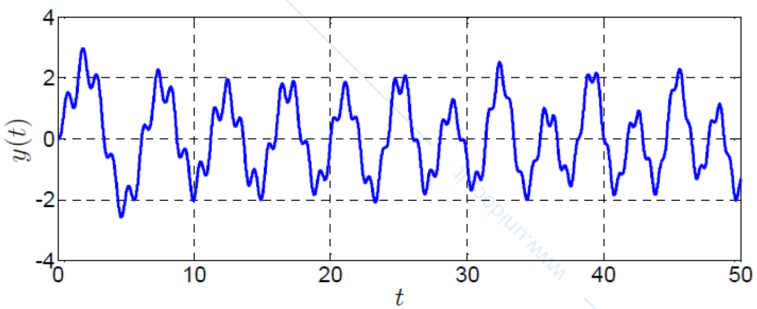
$$\begin{array}{rccc} \sigma_y: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & \omega & \mapsto & |G(j\omega)|\sigma_u(\omega) \end{array}$$

Capire come un segnale viene «modificato» da un sistema





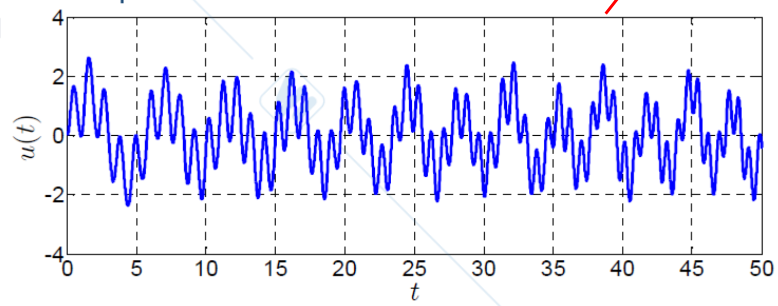
$$G(s) = \frac{2}{1 + \frac{2}{3}s}$$

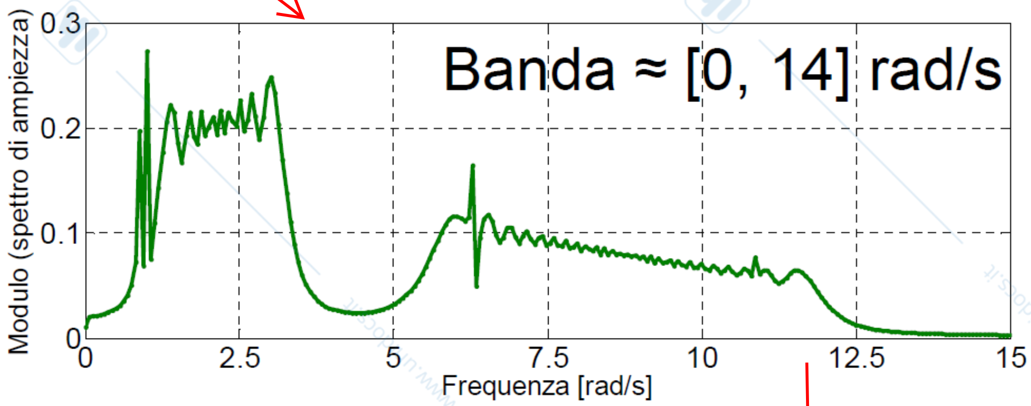


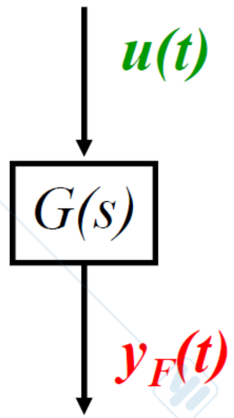
Per studiarlo dobbiamo imparare a dare una rappresentazione della risposta in frequenza associata alla FdT del sistema in termini di modulo e fase!

Vediamo come si tracciano i **DIAGRAMMI DI BODE**

Amplificazione e attenuazione

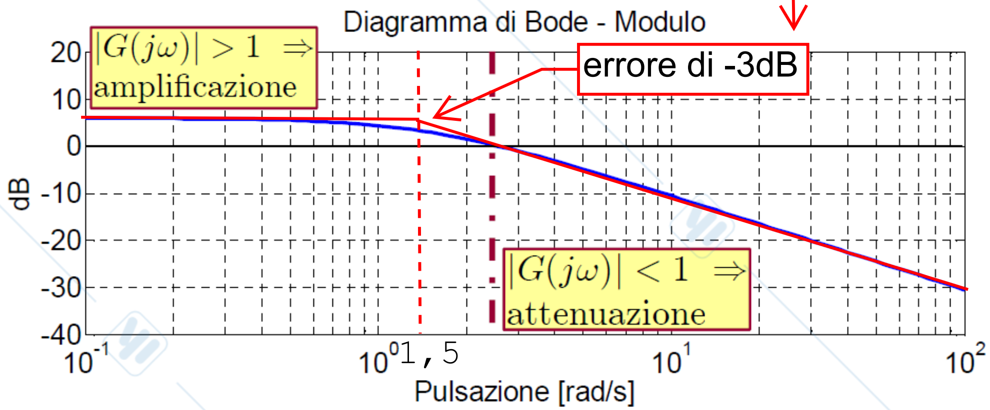


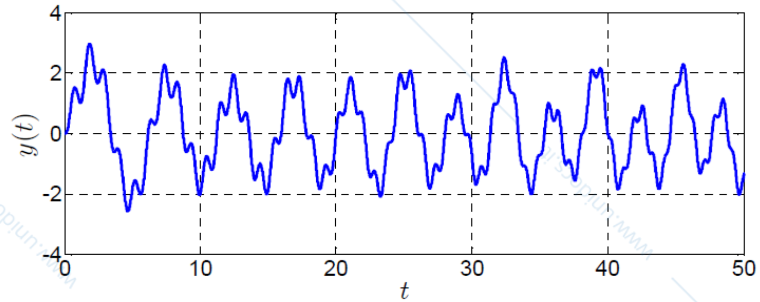


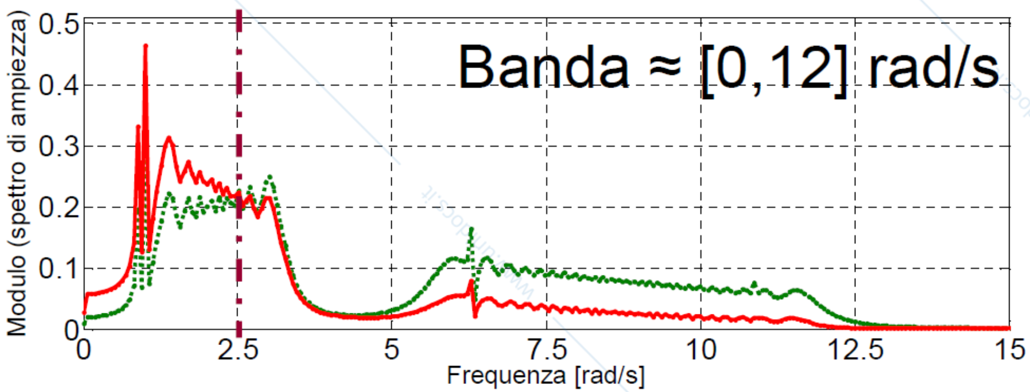


$$G(s) = \frac{2}{1 + \frac{2}{3}s}$$

s=-3/2
T=-2/3
omega=3/2=1,5







Sistemi dinamici come filtri

I sistemi lineari asintoticamente stabili possono essere classificati in base alle caratteristiche del loro diagramma di Bode del modulo, ossia in base alle loro **proprietà filtranti**.

Nel seguito ci soffermeremo su due categorie fondamentali di sistemi lineari:

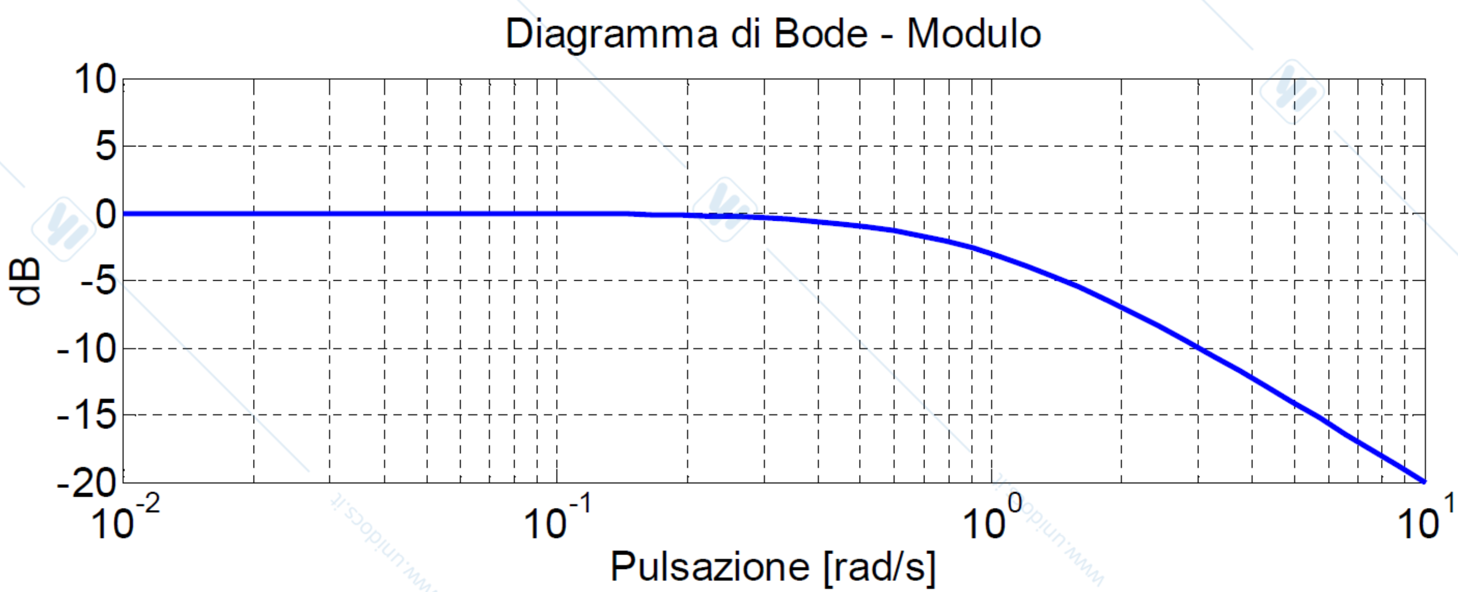
1. I filtri passa-basso;
2. I filtri passa-alto.

Accenneremo poi ad altri tipi di filtro (passa-banda, a spillo) e ai possibili impieghi dei filtri nelle applicazioni e con riferimento al problema di controllo. Al riguardo, maggiori dettagli seguiranno nelle prossime lezioni e nel prossimo laboratorio.

Filtro passa-basso: definizione

Def. 1: Un **filtro passa–basso** è un sistema lineare AS con guadagno $\mu = G(0) > 0$ e diagramma di Bode del modulo di $G(s)$ con le seguenti caratteristiche:

- in bassa frequenza l'andamento è circa costante e pari a $G(0)_{\mathrm{dB}}$;
- alle altre frequenze il modulo ha valori inferiori e $\lim_{\omega \to +\infty} |G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = -\infty$ (cioè, $\lim_{\omega \to +\infty} |G(j\omega)| = 0$).



Filtro passa-basso: banda passante

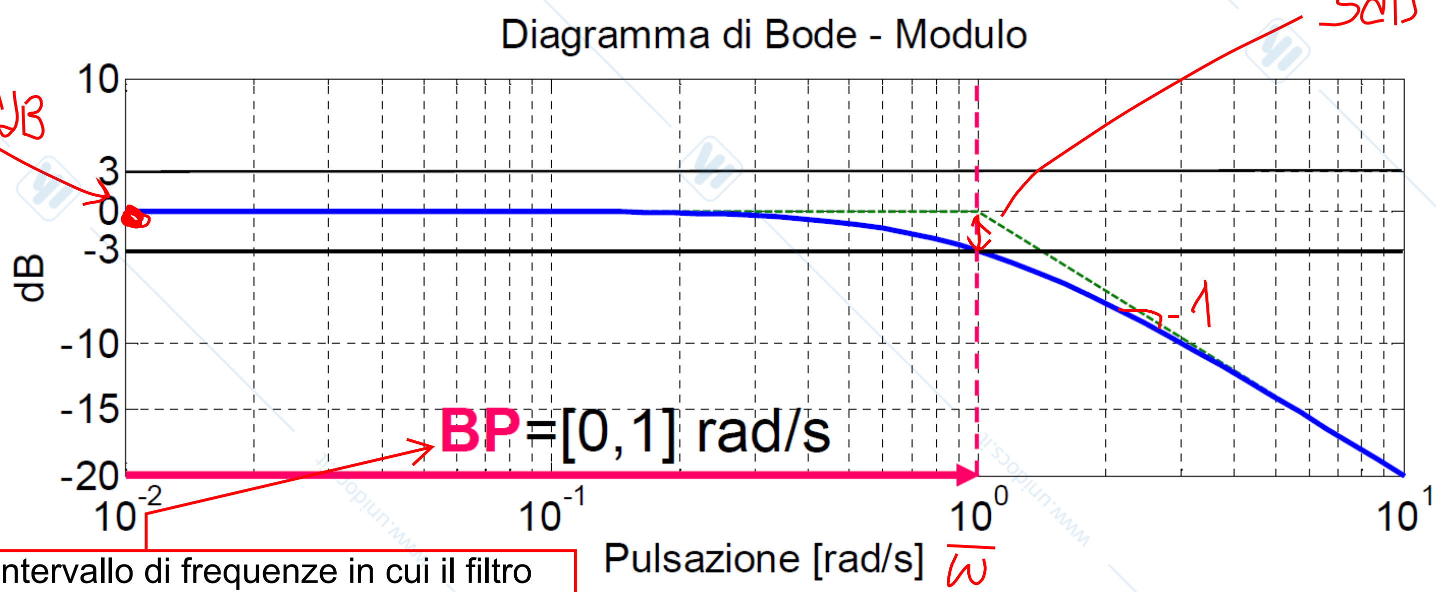
Def. 2: Per un filtro passa–basso, si definisce **banda passante** (BP) l'intervallo di pulsazioni $[0, \bar{\omega}]$ rad/s, con $\bar{\omega}$ tale che

$$\begin{cases} \big| |G(0)|_{\mathrm{dB}} - |G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \big| \le 3\,\mathrm{dB} & \forall\, \omega \le \bar{\omega} \\ |G(0)|_{\mathrm{dB}} - |G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} > 3\,\mathrm{dB} & \forall\, \omega > \bar{\omega}. \end{cases}$$

ricavato dalle cond. dell'approx.

Il valore $G(0)$ è detto *guadagno* del filtro.

$|M| = |G(0)|_{dB}$



se ho un singolo zero/polo il diagramma esatto e quello approx. coincidono fino a una decade prima della pulsazione dello zero/polo e poi da una decade dopo della stessa pulsazione

banda passante=intervallo di frequenze in cui il filtro passa-basso può amplificare(o far restare invariato) il segnale d'ingresso, dopo di che il segnale di ingresso in uscita viene solo attenuato

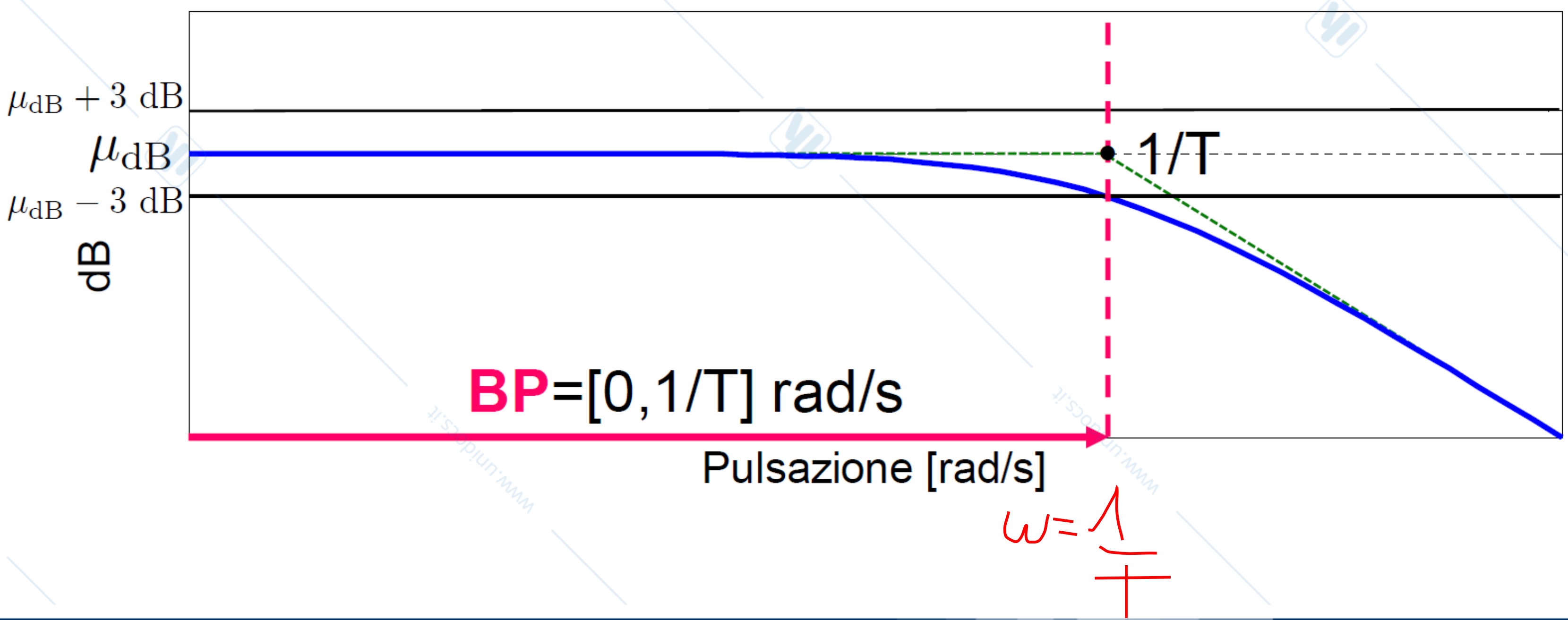
Filtro passa-basso: esempio

Esempio: un esempio standard di filtro passa–basso è dato da

$$G(s) = \frac{\mu}{1+Ts}, \quad T>0,\ \mu>0,$$

che ha guadagno pari a μ e banda passante pari a $\left[0, \frac{1}{T}\right]$ rad/s (vedi la Figura).

Diagramma di Bode - Modulo



Filtro passa-basso: proprietà

$$u(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y_F(t)$$

$\mu = 1$

Se $G(s)$ è un filtro passa–basso a guadagno unitario $\left(G(0) = 1\right)$ con BP$=[0, \bar{\omega}]$, dato un segnale d'ingresso $u(t)$, lo spettro della corrispondente uscita $y_F(t)$ ha le seguenti caratteristiche:

- il peso delle armoniche a pulsazione $\omega < \bar{\omega}$ (cioè, all'interno della banda passante) è sostanzialmente uguale al peso che tali armoniche avevano nel segnale d'ingresso $\left(|G(j\omega)| \simeq 1\right)$;
- il peso delle armoniche a pulsazione $\omega > \bar{\omega}$ (cioè, fuori dalla banda passante) è minore del peso che tali armoniche avevano nel segnale d'ingresso e, al crescere della pulsazione, tali armoniche tendono ad essere cancellate $\left(\lim_{\omega \to +\infty} |G(j\omega)| = 0\right)$.

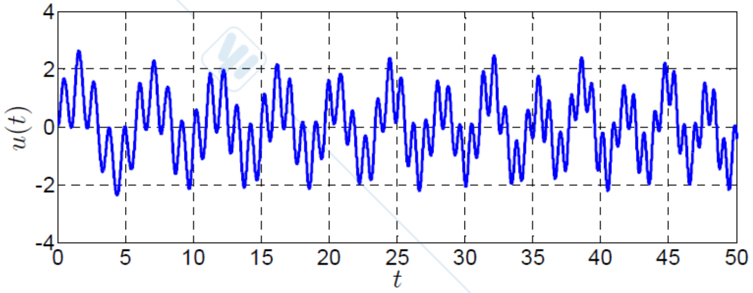
L'uscita replica le caratteristiche in bassa frequenza del segnale d'ingresso e ne smorza il contenuto ad alta frequenza.

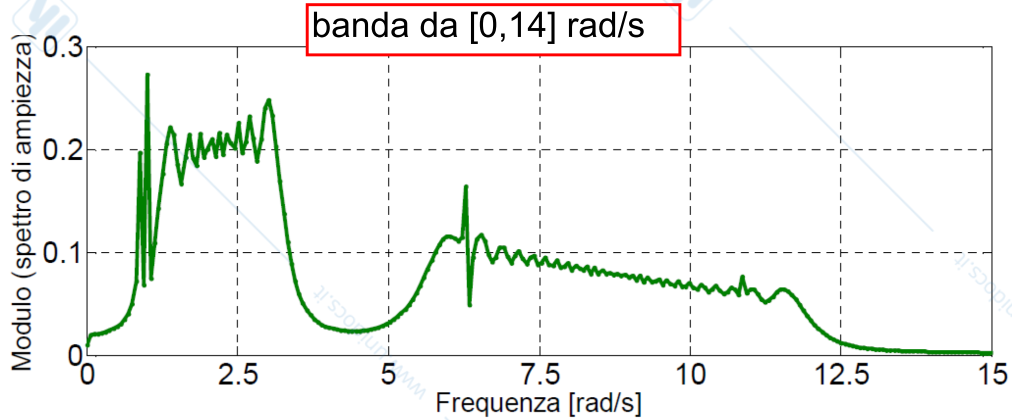
Un filtro passa–basso *lascia passare* le basse frequenze e *taglia* quelle alte.

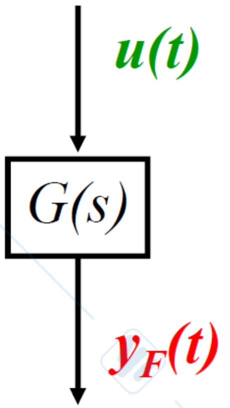
spettro ampiezza

alta e bassa vanno classificate
rispetto alla BP del filtro

Filtro passa-basso: esempio pratico 1





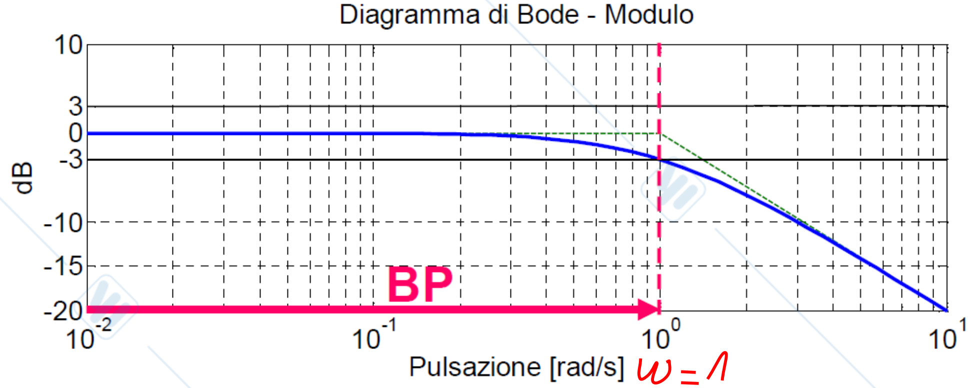


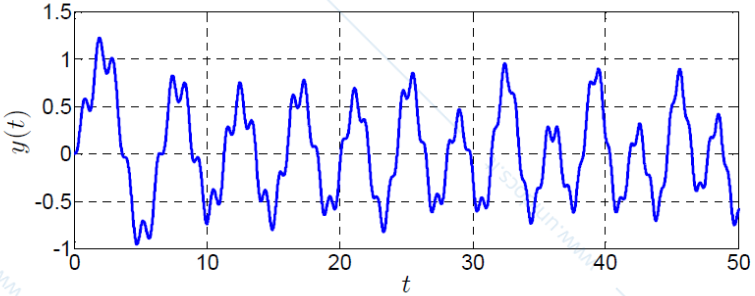
$\mu = 1$

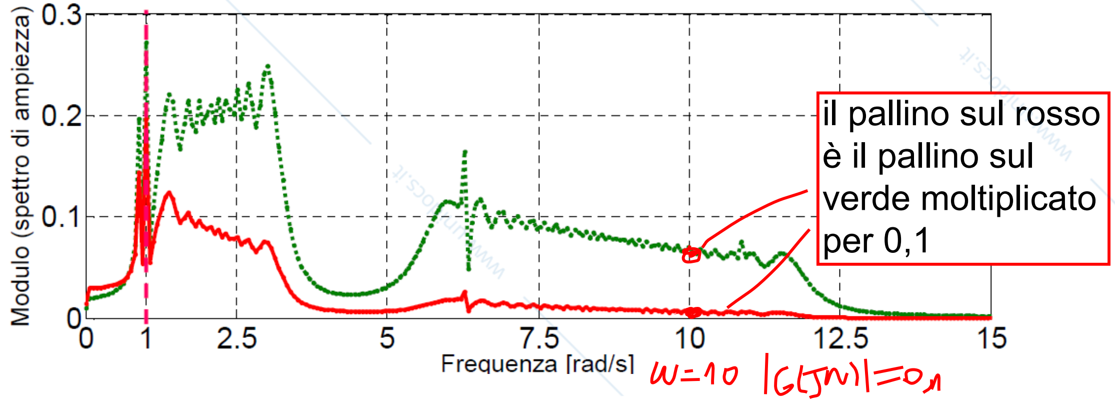
POLO $s = -1$

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

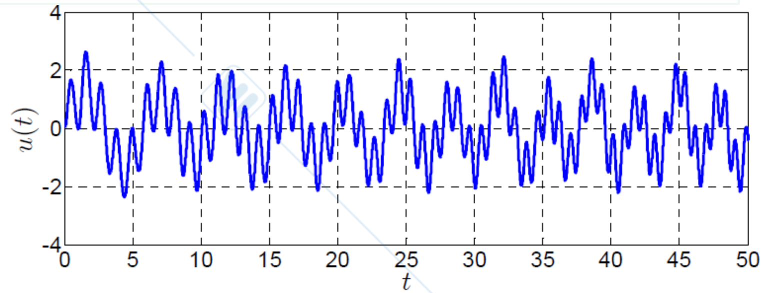
$$BP = [0, 1] \ \frac{rad}{s}$$

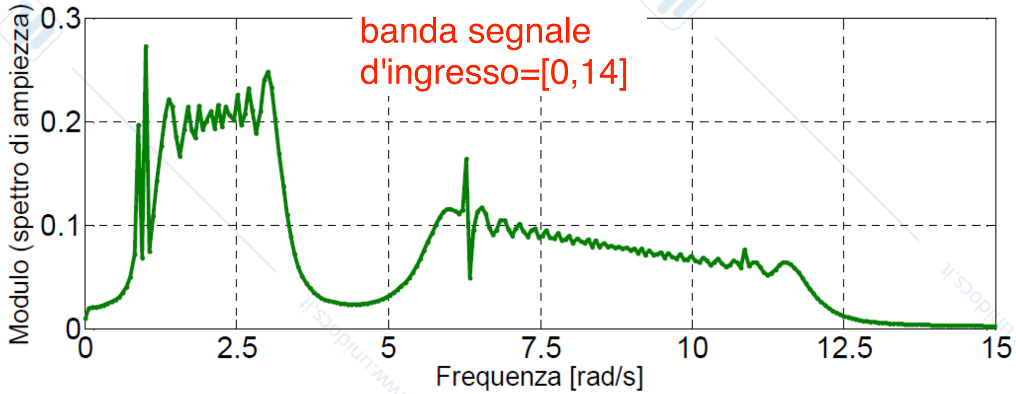


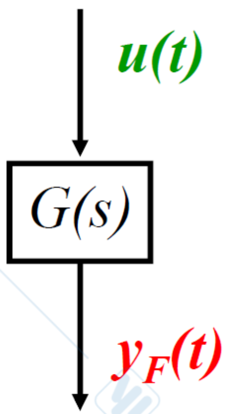




Filtro passa-basso: esempio pratico 2





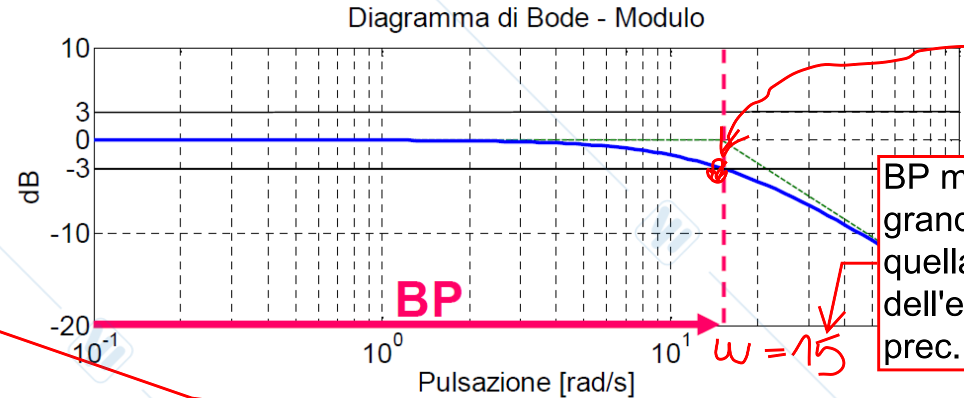


$s = -15$

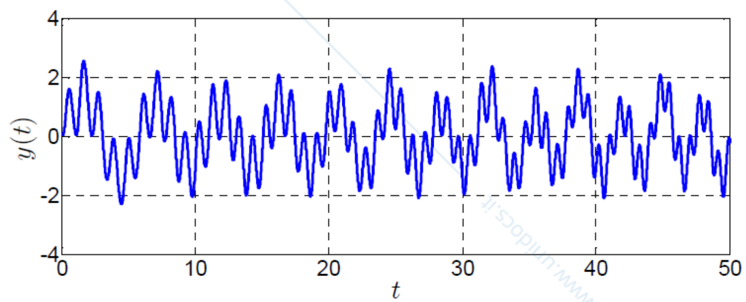
$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{15}s}$$

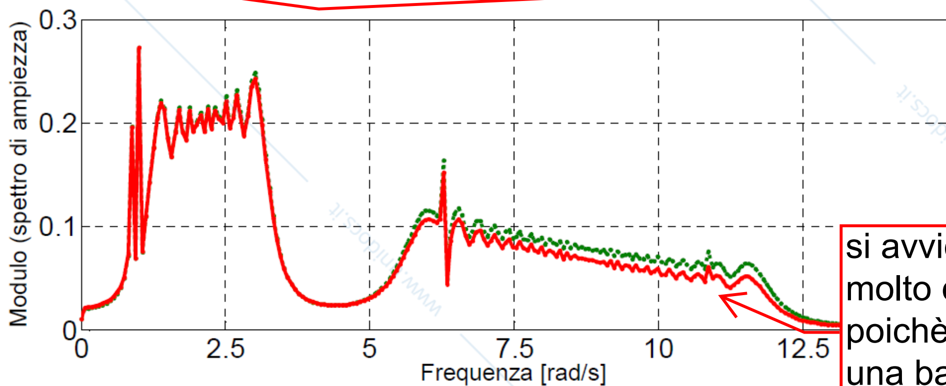
$$\mathrm{BP} = [0, 15]$$

$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$



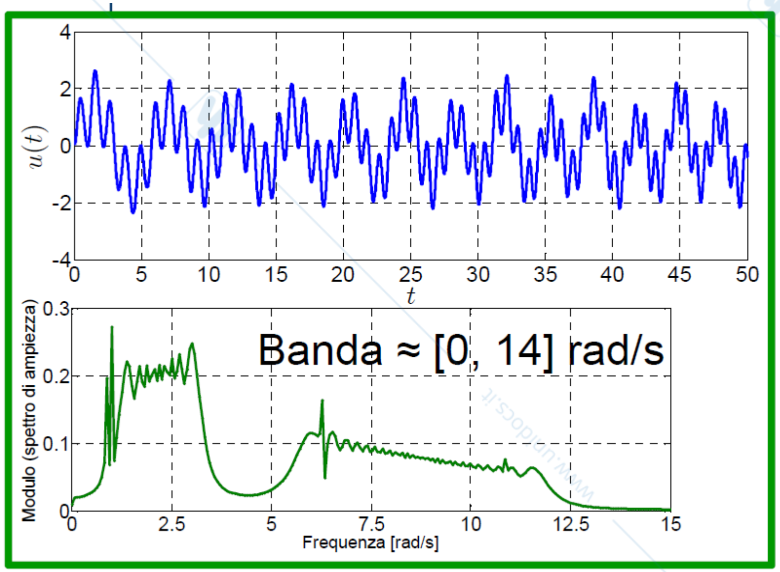
BP molto più grande rispetto a quella dell'esempio prec.





si avvicinano molto di più poichè considero una banda più grande

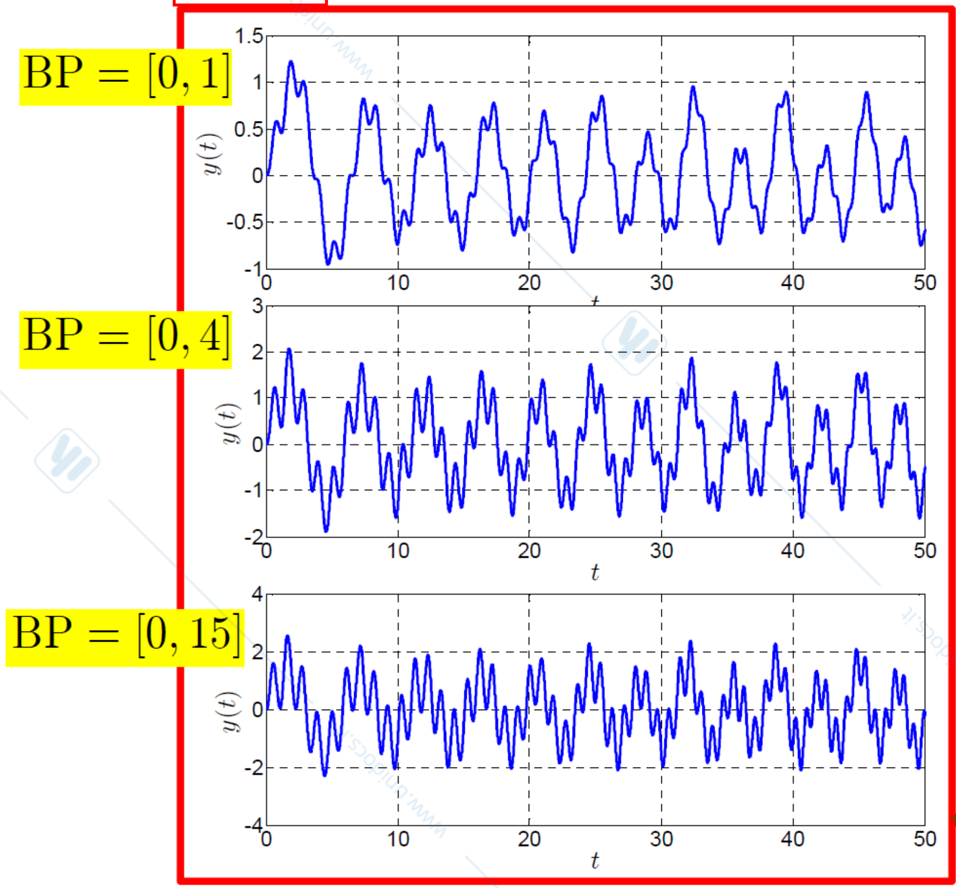
Filtro passa-basso: riassunto



il filtro ha sempre la stessa forma ma BP diverse

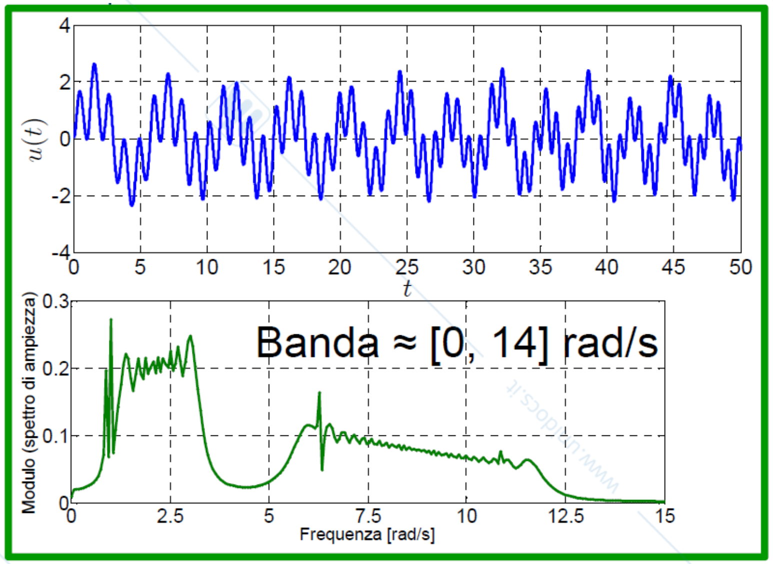
sempre più simile al segnale di ingresso

uscita y

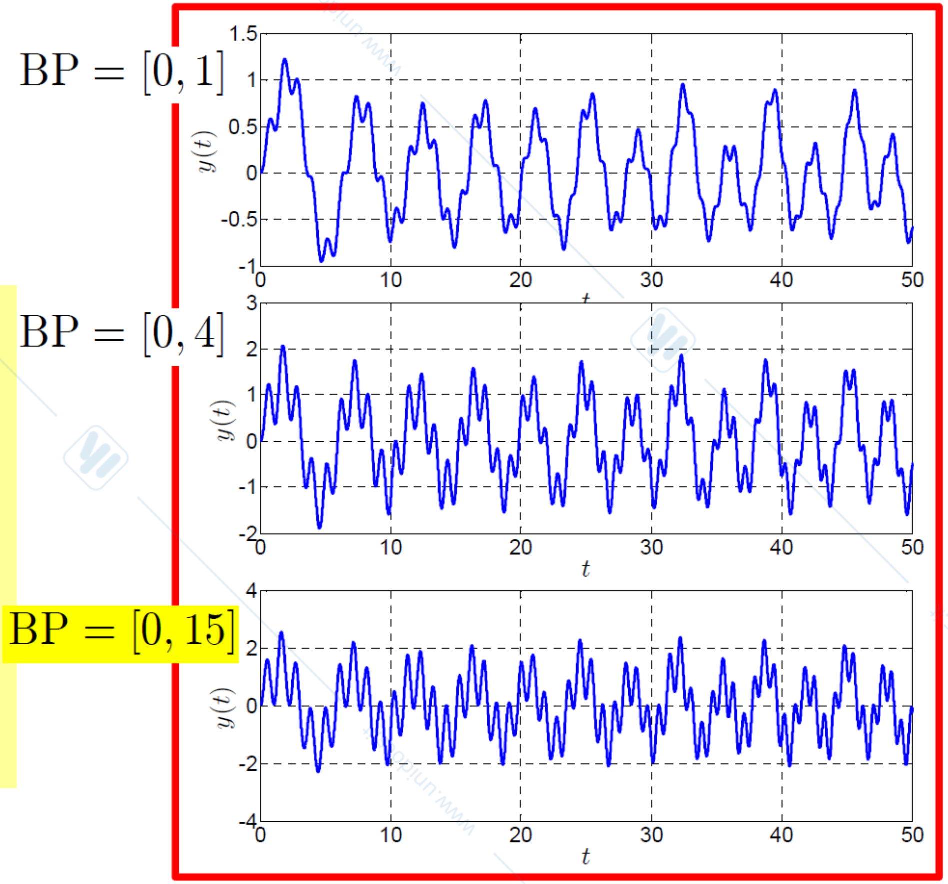


All'aumentare della banda passante del sistema, l'uscita replica sempre più fedelmente l'andamento del segnale d'ingresso…

Filtro passa-basso: osservazioni conclusive



tutti i sistemi dinamici agiscono più o meno come filtro,quindi dal punto di vista di sistemi di controllo questi concetti sono fondamentali per guidare il design del sistema



<u>Osservazione</u> <u>importante</u>:

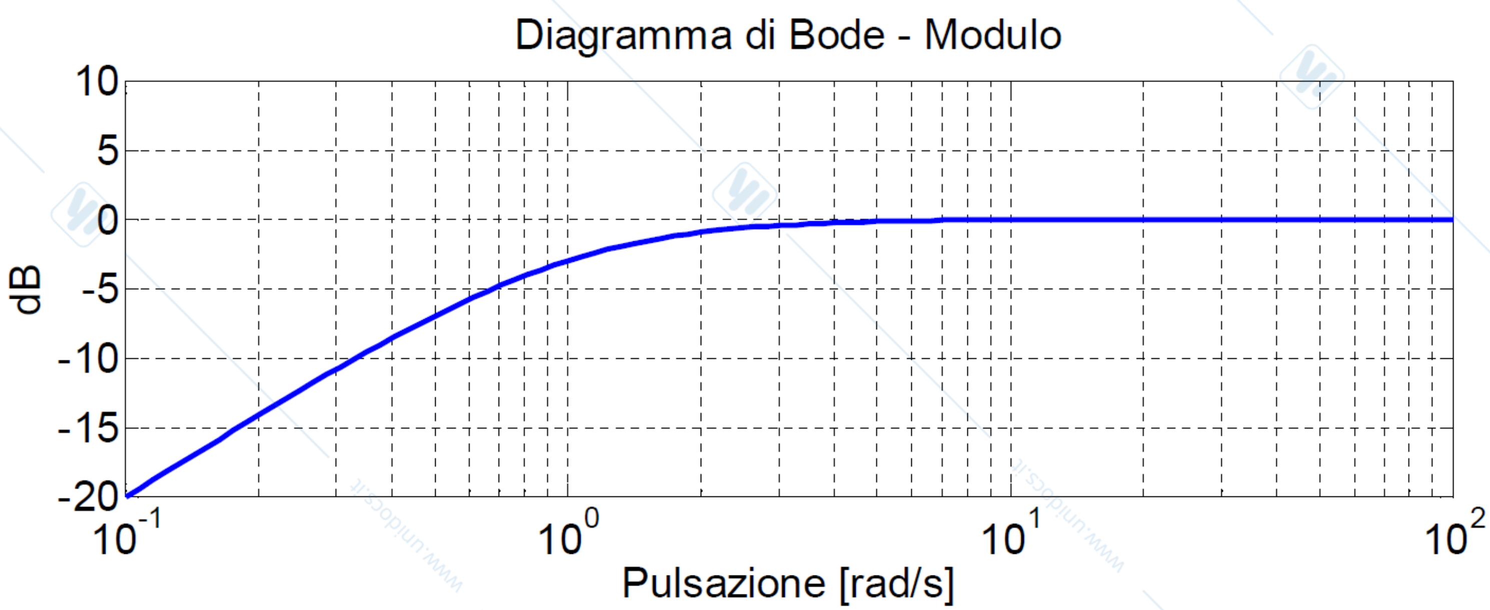
Se la banda del segnale $u(t)$ è contenuta nella banda-passante del sistema $G(s)$, allora l'uscita di regime $y_R(t)$ è sostanzialmente una replica del segnale d'ingresso, cioè:

$$y_R(t) \simeq u(t)$$

Filtro passa-alto: definizione

Def. 1: Un **filtro passa–alto** è un sistema lineare AS con $G(\infty) = \lim_{\omega \to +\infty} > 0$ e diagramma di Bode del modulo di $G(s)$ con le seguenti caratteristiche:

- ad alta frequenza l'andamento è circa costante e pari a $G(\infty)_{\mathrm{dB}}$;
- alle altre frequenze il modulo ha valori inferiori e $\lim_{\omega \to 0^+} |G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = -\infty$ (cioè, $G(0) = 0$).



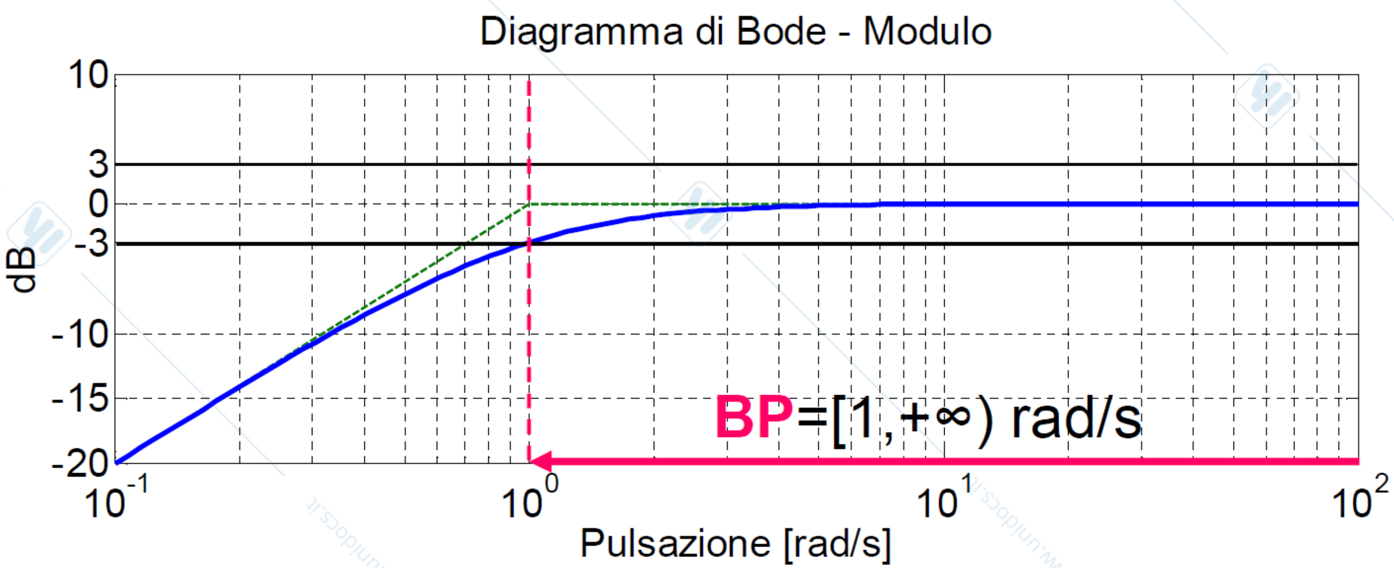
Filtro passa-alto: banda passante

guadagno di alta frequenza

Def. 2: Per un filtro passa–alto, si definisce **banda passante** (BP) l'intervallo di pulsazioni $[\tilde{\omega}, +\infty)$ rad/s, con $\tilde{\omega}$ tale che

$$\begin{cases} \left| |G(\infty)|_{\text{dB}} - |G(j\omega)|_{\text{dB}} \right| \leq 3\,\text{dB} & \forall\, \omega \geq \tilde{\omega} \\ |G(\infty)|_{\text{dB}} - |G(j\omega)|_{\text{dB}} > 3\,\text{dB} & \forall\, \omega < \tilde{\omega}. \end{cases}$$

Il valore $G(\infty)$ è detto *fattore di amplificazione* del filtro.



Filtro passa-alto: esempio

tipo g<0

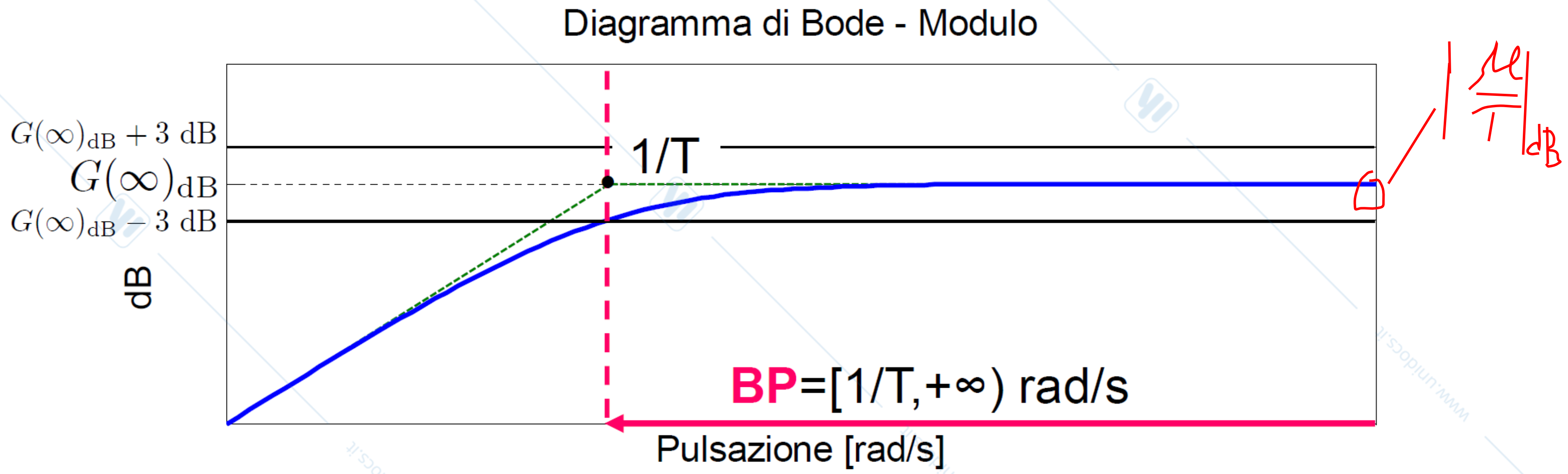
$\boxed{G(0) = \mu = 0}$ zero in s= 0

Esempio: un esempio standard di filtro passa–alto è dato da

$$G(s) = \frac{\mu s}{1 + Ts}, \quad T > 0, \; \mu > 0,$$

che ha fattore di amplificazione pari a μ/T e banda passante pari a $\left[\frac{1}{T}, +\infty\right)$ rad/s (vedi la Figura).

$G(\infty) = \lim_{s \to \infty} G(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{\mu s}{1+Ts} = \frac{\mu}{T}$



Filtro passa-alto: proprietà

$$u(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y_F(t)$$

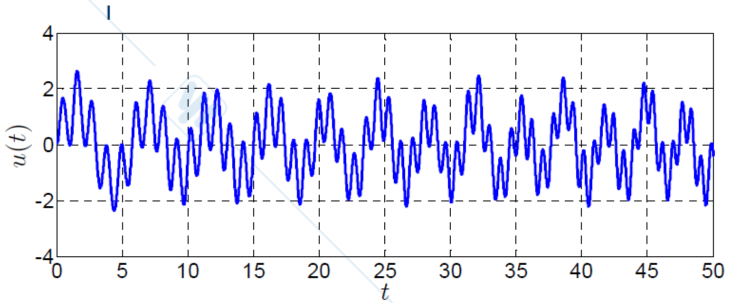
Se $G(s)$ è un filtro passa–alto con fattore di amplificazione unitario $\big(G(\infty) = 1\big)$ e BP=$[\tilde{\omega}, +\infty)$, dato un segnale d'ingresso $u(t)$, lo spettro della corrispondente uscita $y_F(t)$ ha le seguenti caratteristiche:

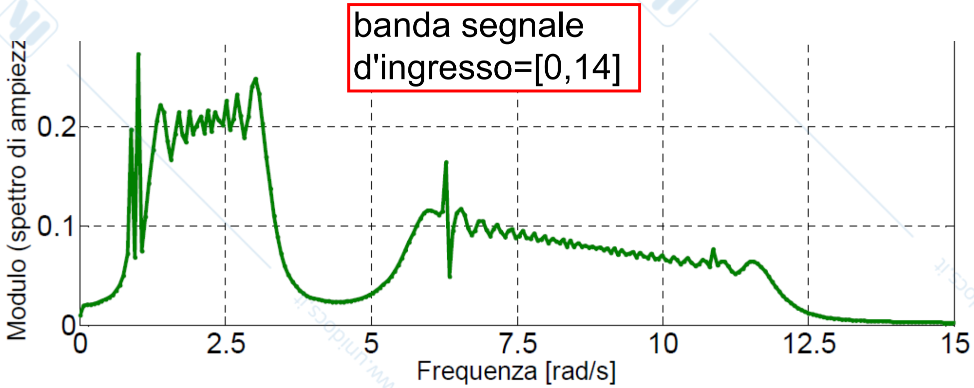
- il peso delle armoniche a pulsazione $\omega > \tilde{\omega}$ (cioè, all'interno della banda passante) è sostanzialmente uguale al peso che tali armoniche avevano nel segnale d'ingresso $\big(|G(j\omega)| \simeq 1\big)$;
- il peso delle armoniche a pulsazione $\omega < \tilde{\omega}$ (cioè, fuori dalla banda passante) è minore del peso che tali armoniche avevano nel segnale d'ingresso e, al diminuire della pulsazione, tali armoniche tendono ad essere cancellate $\big(\lim_{\omega \to 0^+} |G(j\omega)| = 0\big)$.

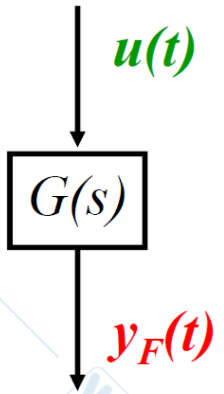
L'uscita replica le caratteristiche ad alta frequenza del segnale d'ingresso e ne smorza il contenuto in bassa frequenza.

Un filtro passa–alto *lascia passare* le alte frequenze e *taglia* quelle basse.

Filtro passa-alto: esempio 1

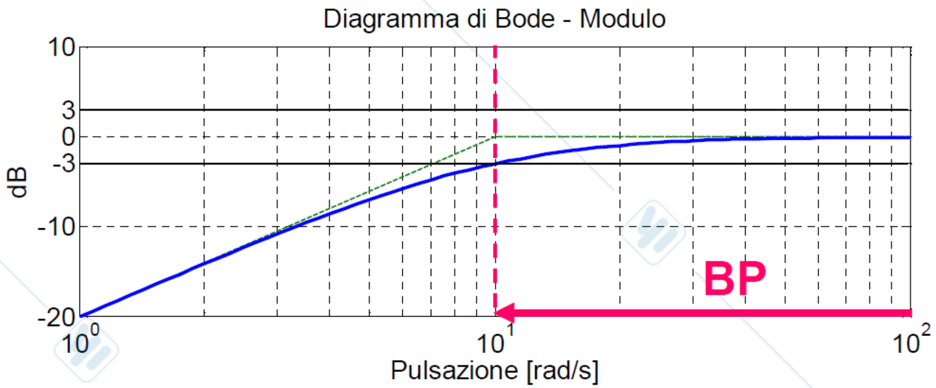


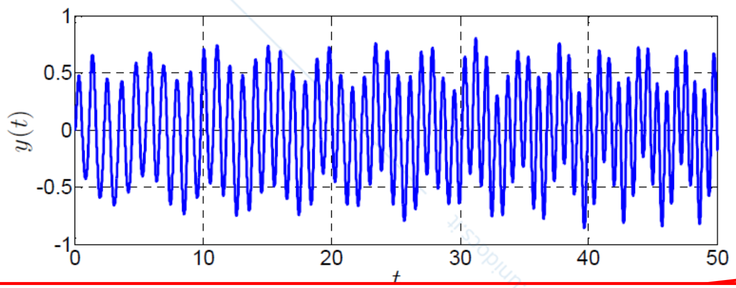


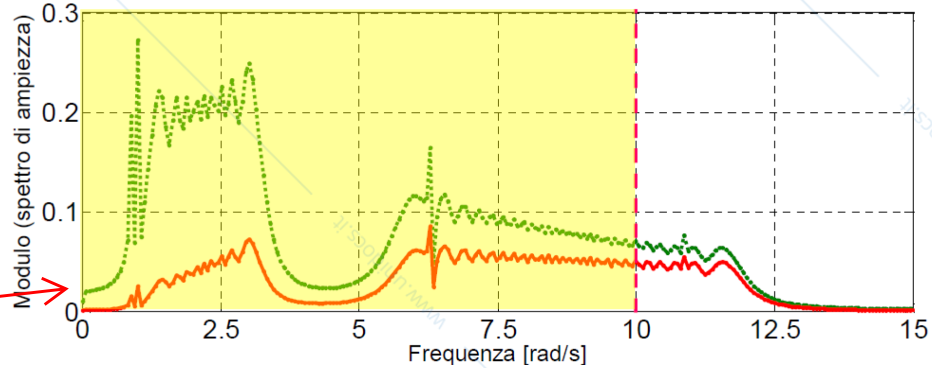


$$G(s) = \frac{0.1s}{1+0.1s}$$

$$\mathrm{BP} = [10, +\infty)$$



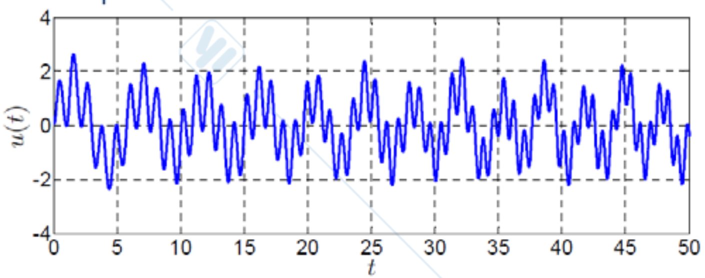


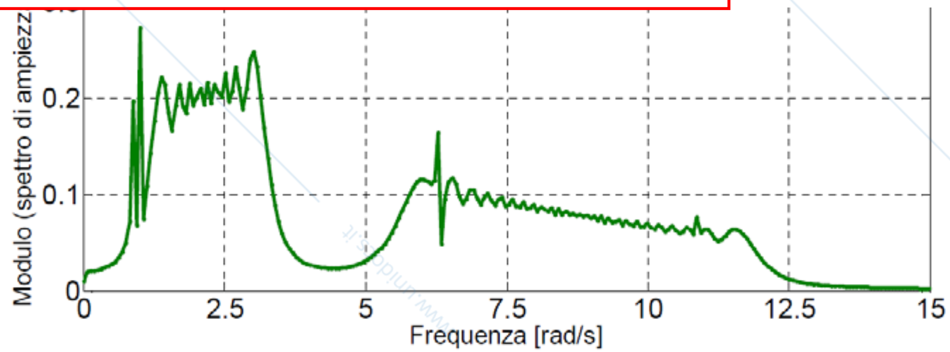


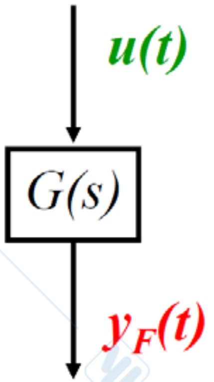
a basse frequenze il segnale in uscita è molto attenuato rispetto a quello d'ingresso, mentre il segnale d'uscita ad alte frequenze riesce a replicare abbastanza bene quello di ingresso

Filtro passa-alto: esempio 2

come prima in base alla grandezza di BP riusciamo ad ottenere in uscita un segnale più o meno simile a quello di ingresso



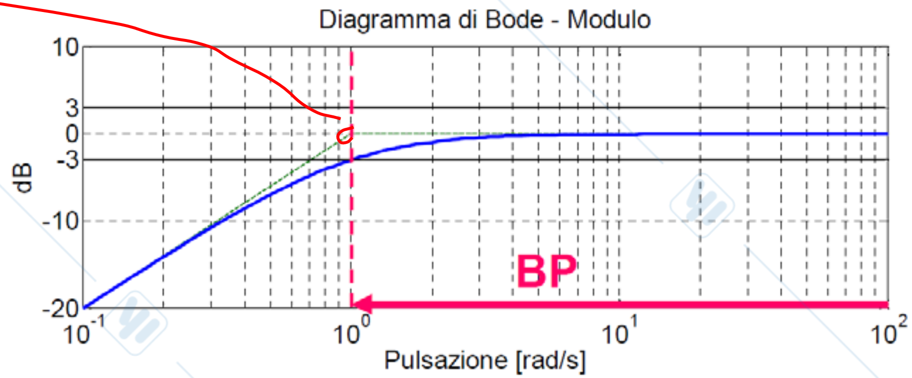


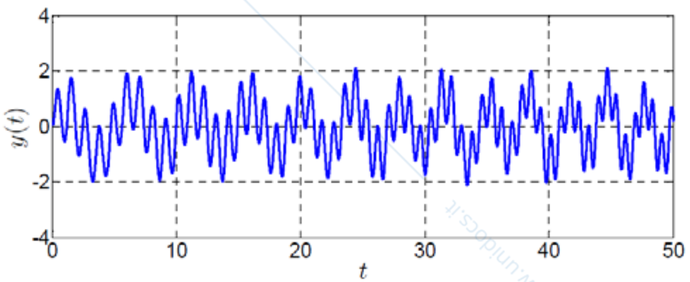


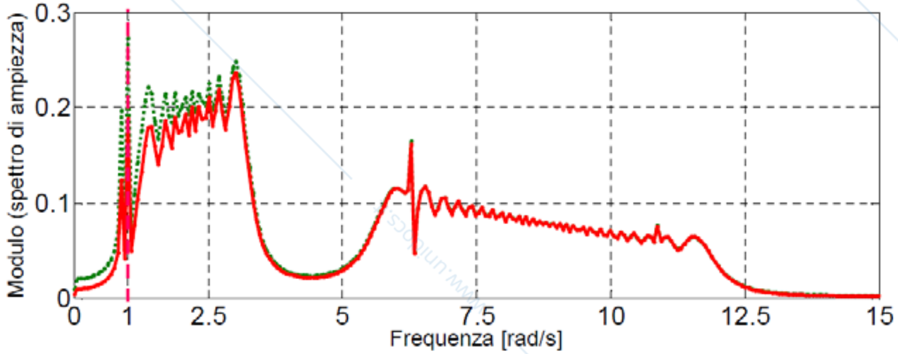
$$G(s) = \frac{s}{1+s}$$

$$\text{BP} = [1, +\infty)$$

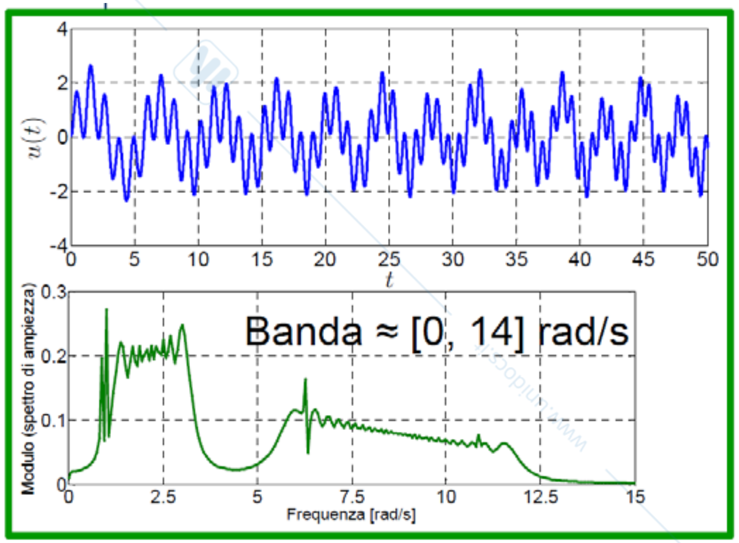
$|G(j1)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

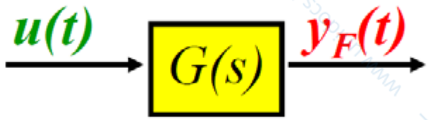






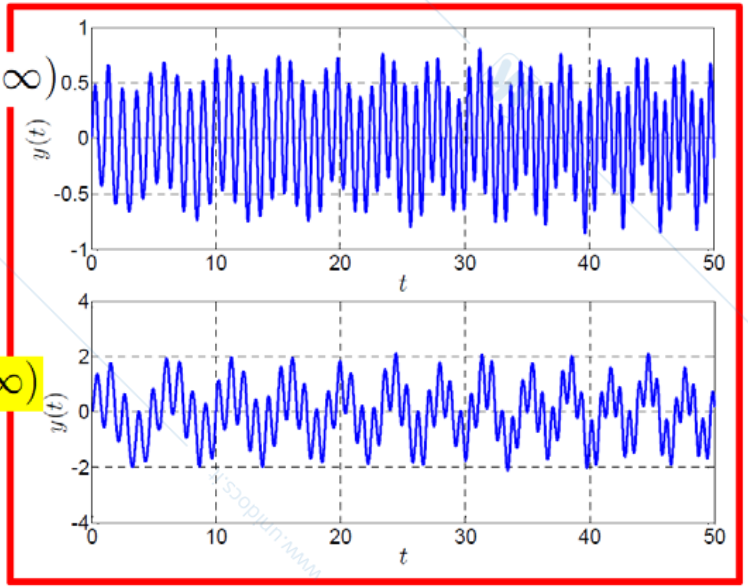
Filtro passa-alto: osservazione





$\text{BP} = [10, +\infty)$

$\text{BP} = [1, +\infty)$



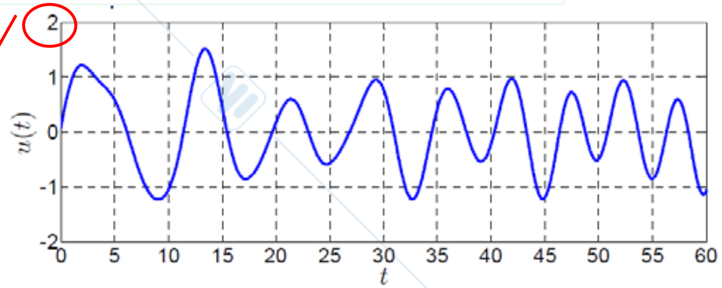
<u>Osservazione</u> <u>importante</u>:

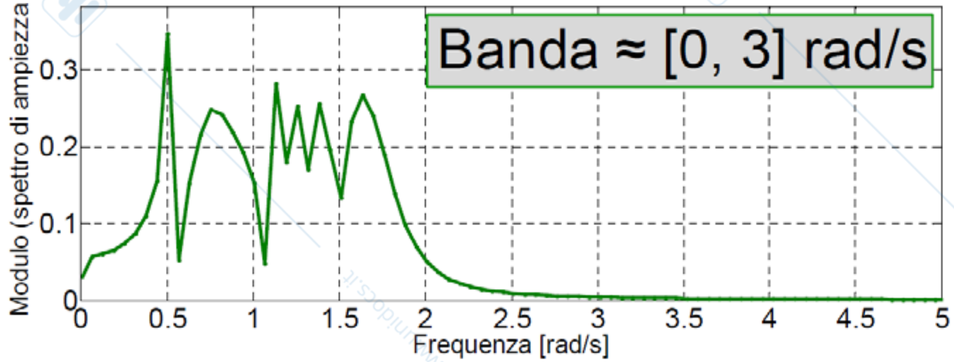
Se la banda del segnale $u(t)$ è contenuta nella banda-passante del sistema $G(s)$, allora l'uscita di regime $y_R(t)$ è sostanzialmente una replica del segnale d'ingresso, cioè:

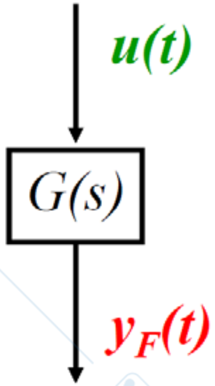
$$y_R(t) \simeq u(t)$$

Filtraggio «fuori banda»

qunado creo dei filtri che non c'entrano niente con la banda dell'ingresso rischio di non prendere dell'ingresso in uscita

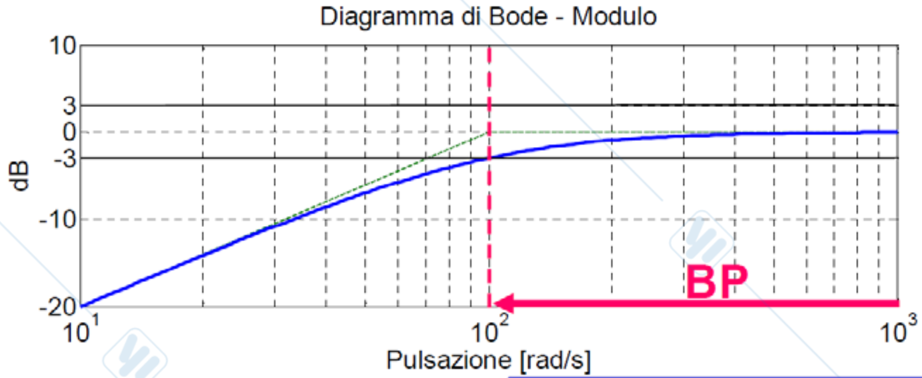


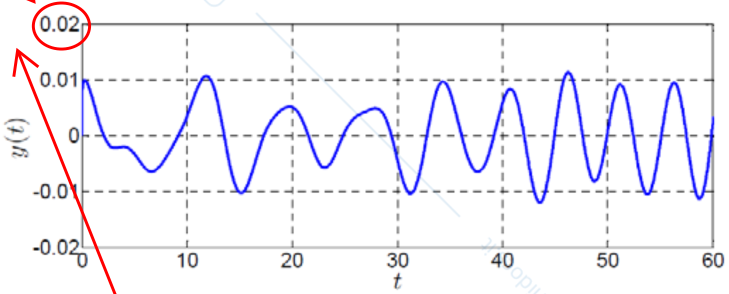


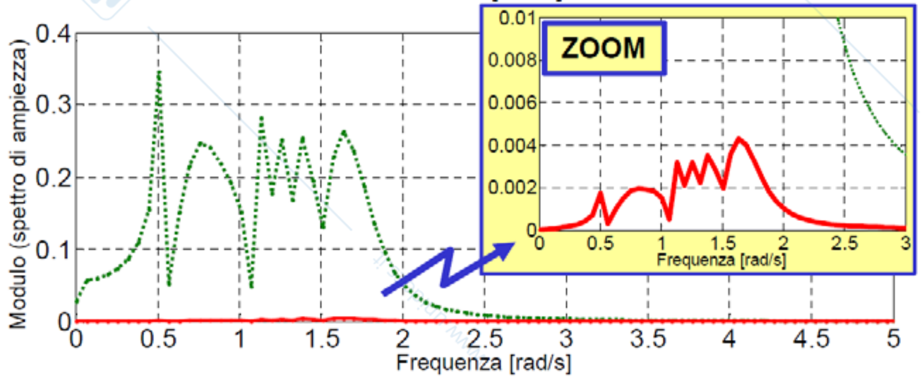


$$G(s) = \frac{0.01s}{1 + \frac{1}{100}s}$$

$\boxed{BP = [100, +\infty)}$

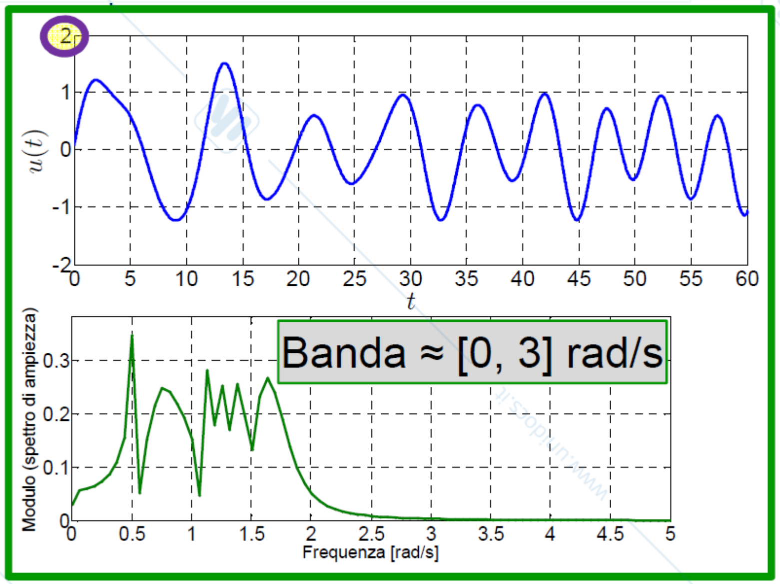


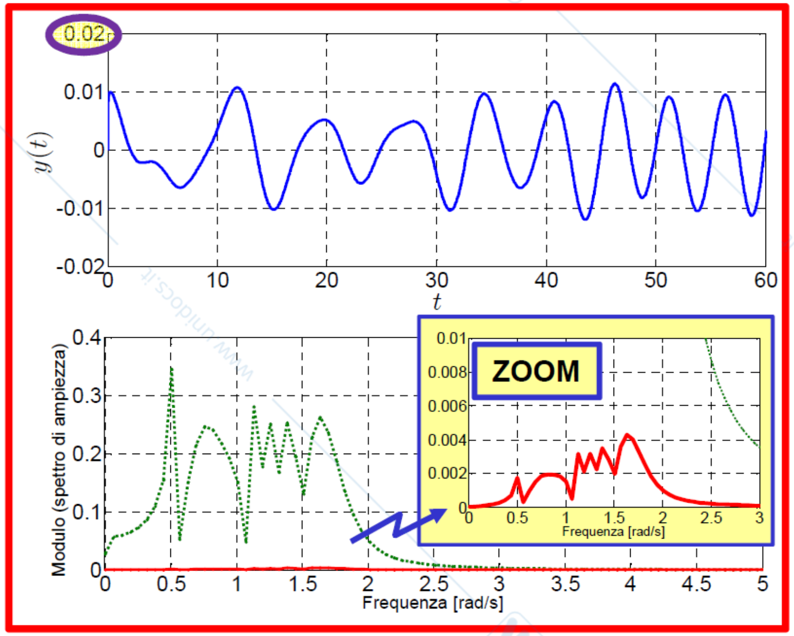




in uscita avremo un piccolo segnale(vedi modulo 100 volte più piccolo di quello in ingresso

Filtraggio «fuori banda» (2)





$$u(t) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow y_F(t)$$

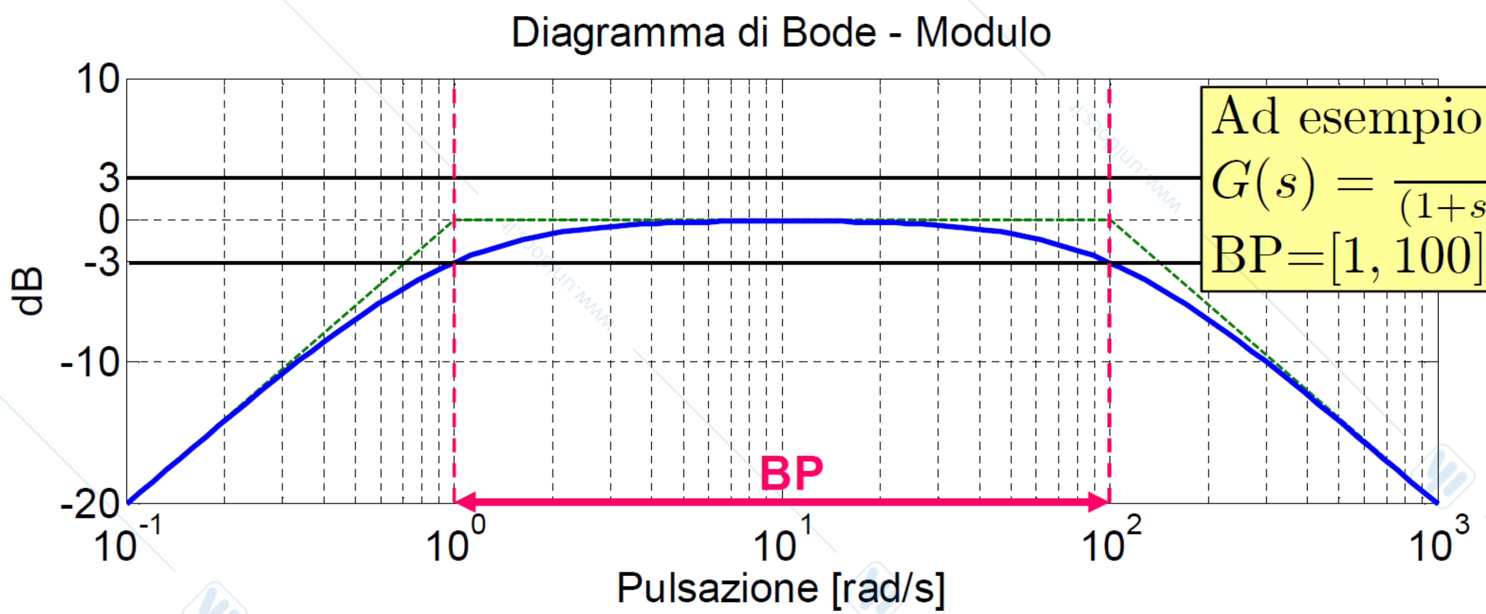
$$\text{BP} = [100, +\infty)$$

<u>Osservazione</u> (duale dell' "*osservazione importante*"):

Se la banda del segnale $u(t)$ è al di fuori della banda-passante del sistema $G(s)$, allora le armoniche che compongono il segnale sono tagliate e l'uscita di regime $y_R(t)$ è un segnale di piccolo modulo.

Altri filtri: filtro passa-banda

Filtro **passa-banda**:

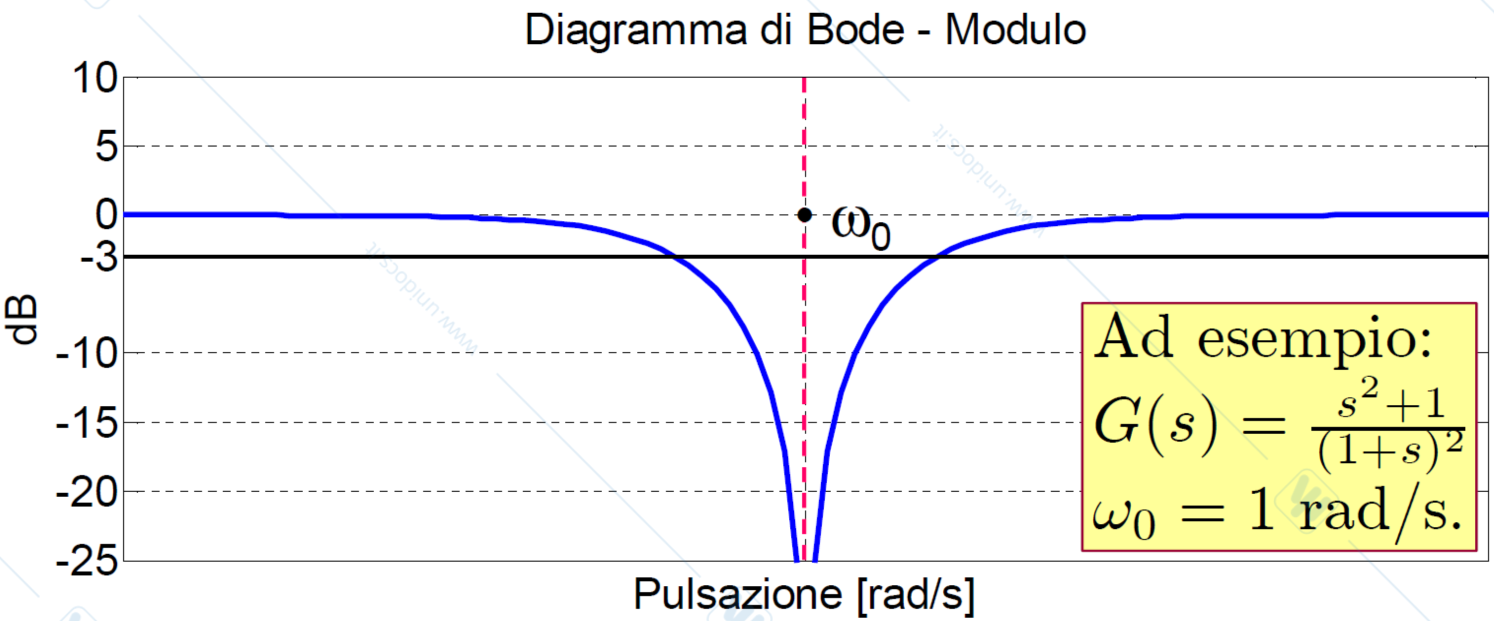


Ad esempio:
$$G(s) = \frac{s}{(1+s)(1+0.01s)}$$
BP=[1, 100] rad/s.

Se si vuole estrarre da un segnale $u(t)$ il suo contenuto spettrale limitatamente ad un intervallo di pulsazioni $[\omega_{min}, \omega_{max}]$, basta porre tale segnale in ingresso ad un filtro passa-banda avente BP= $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ e considerare la corrispondente uscita $y(t)$.

Altri filtri: filtro notch

Filtro **notch (a spillo)**:



Se si vuole cancellare da un segnale $u(t)$ il suo contenuto spettrale limitatamente ad una specifica armonica ω_0, basta porre tale segnale in ingresso ad un filtro a spillo avente una coppia di zeri posti in $j\omega_0$ e considerare la corrispondente uscita $y(t)$.

zeri bloccanti

es. quando ci sono dei disturbi e vogliare cancellare il loro effetto in uscita

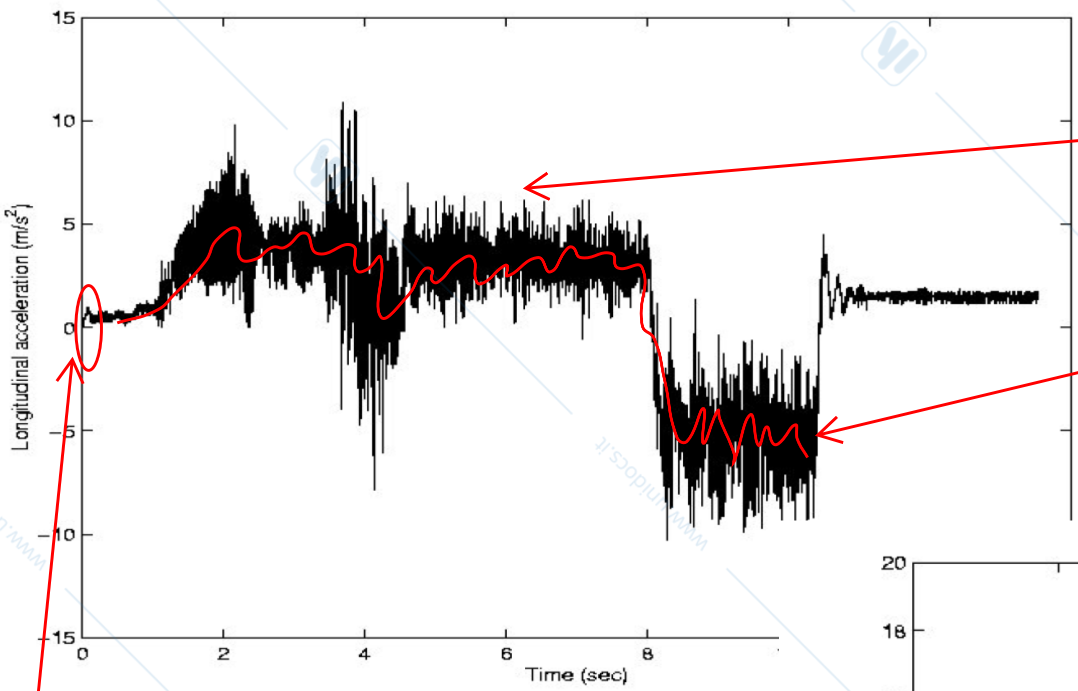
Applicazioni pratiche del filtraggio in sistemi di controllo

- I sensori generano misure affette da «errori di misura», dovute al meccanismo di misurazione e alla trasmissione del segnale → occorre spesso usare un filtro passa-basso per eliminare il rumore di misura prima di usare il segnale in un sistema di controllo

- I sensori inerziali sono quasi sempre affetti da «bias»: valore non nullo misurato a riposo, per effetto di un non perfetto allineamento all'asse di misura ideale → componente da rimuovere costante (in s=0). Si usa un filtro passa alto per rimuovere solo quella componente senza alterare quelle che invece portano informazione

- Combinando le due esigenze di fatto molto spesso si usa un filtro «passa banda»

Esempio di segnali misurati

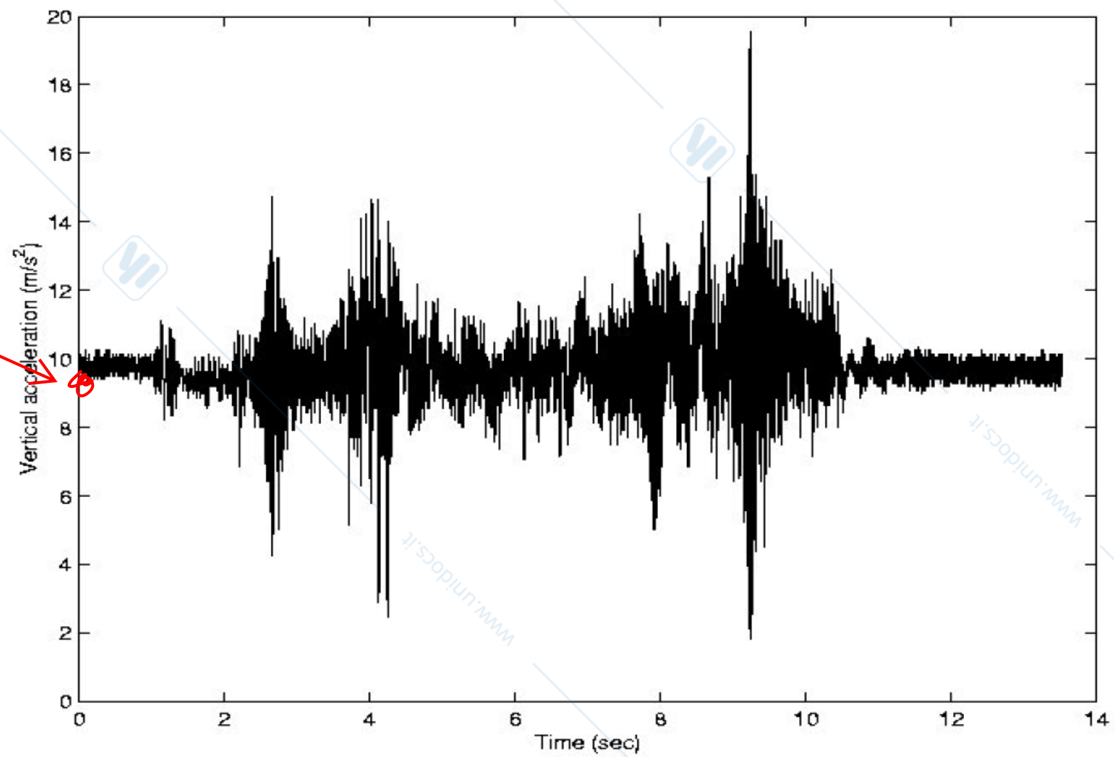


vengono ripuliti i rumri tagliando prima con un filtro certe alte sequenze

per ottenere un segnale più pulito come quello rosse dovrò usare dei filtri passa banda

dovrebbe essere 0, ma all'inizio c'è una componente di bias

9,81(acc.vert.)



Conclusioni

In sintesi:

- I sistemi lineari si comportano come filtri: essi realizzano il rapporto ingresso/uscita modulando lo spettro del segnale d'ingresso (Teorema della risposta armonica):

$$\begin{array}{rccc} \sigma_y : & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & \omega & \mapsto & |G(j\omega)|\sigma_u(\omega) \end{array}$$

- I filtri passa-basso estraggono dal segnale d'ingresso il contenuto spettrale in bassa frequenza
- Più in generale, i filtri estraggono dal segnale d'ingresso il contenuto spettrale all'interno della banda passante del sistema
- Se la banda del segnale $u(t)$ è contenuta nella banda-passante del sistema $G(s)$, allora l'uscita di regime $y_R(t)$ è una replica del segnale d'ingresso: $y_R(t) \simeq u(t)$

Conclusioni (2)

In sintesi:

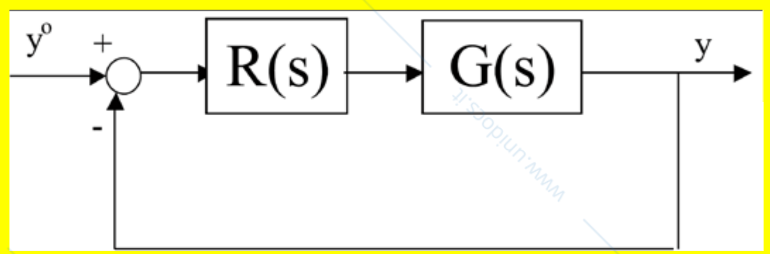
- I sistemi lineari si comportano come filtri: essi realizzano il rapporto ingresso/uscita modulando lo spettro del segnale d'ingresso (Teorema della risposta armonica):

$$\begin{array}{rccl} \sigma_y: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & \omega & \mapsto & |G(j\omega)|\sigma_u(\omega) \end{array}$$

- I filtri passa-basso estraggono dal segnale d'ingresso il contenuto spettrale in bassa frequenza
- Più in generale, i filtri estraggono dal segnale d'ingresso il contenuto spettrale all'interno della banda passante del sistema

- Se la banda del segnale $u(t)$ è contenuta nella banda-passante del sistema $G(s)$, allora l'uscita di regime $y_R(t)$ è una replica del segnale d'ingresso: $y_R(t) \simeq u(t)$

Quest'ultima osservazione sarà fondamentale per affrontare il problema del controllo, cioè il progetto di un dispositivo che garantisca che



$$y(t) \simeq y^o(t)$$