Esercizio 1: Risposta in frequenza con Bode

Si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = 10 \frac{s+1}{(s+0.1)(s^2+20s+100)}$$

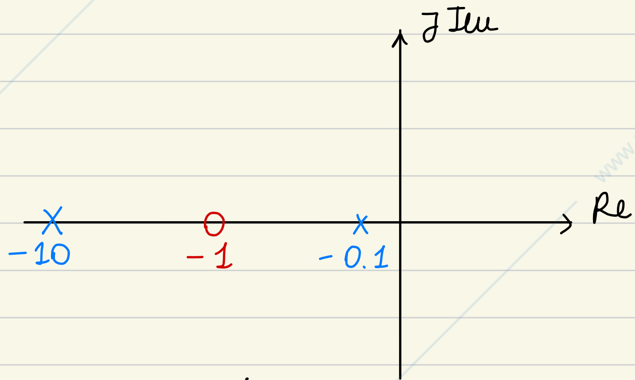
(1) Analizzare la funzione di trasferimento e valutare la stabilità del sistema
(2) Ottenere una approssimazione ai poli dominanti del sistema
(3) Determinare l'uscita a regime (y_∞) quando $u(t) = 2 + \sin(0.01t) + \sin(0.1t)$, $t \geq 0$.

(1) La funzione di trasferimento è:

- di tipo $g=0$ dato che non ha poli o zeri nell'origine
  strettamente propria, dato che il grado relativo è $r=2$
  il guadagno del sistema è: $\mu = G(0) = 1$
- la funzione ha uno zero in $z=-1 \rightarrow$ stabile (reale, negativo)
  la funzione di trasferimento ha 3 poli:
  * $p_1 = -0.1 \rightarrow$ stabile (reale, negativo)
  * $p_{2,3}$ tali che $(s^2+20s+100) = 0 \rightarrow (s^2+20s+100) = (s+10)^2$
  $\rightarrow$ i due poli sono coincidenti $p_{2,3} = -10$ (stabili, in quanto reali e negativi)

Dato che tutti i poli sono reali e negativi ($Re(p_i) < 0$, $i = 1,2,3$), allora il sistema è asintoticamente stabile.
Dato che lo zero è stabile ed il guadagno è positivo il sistema è a fase minima.

Guardando la posizione relativa di poli e zeri, si ha:



Si nota che il polo dominante è $p_{dom} = -0.1$. Questo è il polo che detta il tempo di assestamento della risposta a gradino del sistema.

(2) Per ottenere una buona approssimazione ai poli dominanti, l'approssimante deve:

- mantenere il guadagno μ di $G(s)$
- rimanere strettamente propria se la funzione di trasferimento originaria è strettamente propria

In questo caso manteniamo solo il polo dominante e quindi definiamo

$$G_a(s) = \frac{\mu_a}{(s+0.1)}$$

$G_a(0) = G(0) \rightarrow \frac{\mu_a}{0.1} = 1 \rightarrow \mu_a = 0.1$

L'approssimazione ai poli dominanti è quindi: $\boxed{G_a(s) = \frac{0.1}{s+0.1}}$

(3) L'ingresso al sistema è:

$$u(t) = 2 + \sin(0.01t) + \sin(0.1t), \quad t \geq 0$$

→ è una combinazione lineare di tre segnali: un gradino di ampiezza 2, una sinusoide con ampiezza unitaria e pulsazione $\omega_1 = 0.01$ rad/s e una sinusoide con ampiezza unitaria e pulsazione 0.01 rad/s.

Dato che il sistema è lineare, si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti → la risposta del sistema è la combinazione lineare delle risposte ai tre segnali che costituiscono l'ingresso:

$$u_1(t) = 2\,sca(t) \qquad u_2(t) = \sin(0.01t) \qquad u_3(t) = \sin(0.1t)$$

La risposta è quindi: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ con
- $y_1(t)$: risposte a $u_1(t)$
- $y_2(t)$: risposte a $u_2(t)$
- $y_3(t)$: risposta a $u_3(t)$

Questa relazione vale anche asintoticamente, quindi:

$y_\infty = y_{1,\infty} + y_{2,\infty} + y_{3,\infty}$ → il valore a regime è la somma dei tre valori a regime

1) Calcolo del valore asintotico $y_{1,\infty}$

$$Y_1(s) = G(s)U_1(s) \quad \text{con} \quad U_1(s) = \mathcal{L}[u_1(t)] = \mathcal{L}[2\,sca(t)] = \frac{2}{s}$$

$$\rightarrow Y_1(s) = 10\,\frac{(s+1)}{(s+0.1)(s+10)^2} \cdot \frac{2}{s}$$

Dato che è possibile (viste le caratteristiche del sistema) applicare il teorema del valore finale:

$$y_{1,\infty} = \lim_{s \to 0} Y_1(s)\,s = \lim_{s \to 0} \underbrace{\frac{10\,(s+1)}{(s+0.1)(s+10)^2}}_{\text{il limite di questo termine è } \mu = 1}\, 2 = 2$$

(2) Calcolo del valore asintotico $y_{2,\infty}$ e $y_{3,\infty}$.

→ Viste le caratteristiche del sistema, per trovare il valore asintotico della risposta ad un segnale come

$$u(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

può essere trovato applicando il teorema della risposta in frequenza. Sulla base di tale teorema:

$$y_\infty = A|G(j\omega)|\sin(\omega t + \varphi + \underline{/G(j\omega)})$$

Di conseguenza:

$$y_{2,\infty} = |G(j0.01)|\sin(0.01t + \underline{/G(j0.01)})$$
$$y_{3,\infty} = |G(j0.1)|\sin(0.1t + \underline{/G(j0.1)})$$

Per trovare queste risposte dobbiamo quindi calcolare il valore di $|G(j0.01)|$, $|G(j0.1)|$, $\underline{/G(j0.01)}$ e $\underline{/G(j0.1)}$. Per trovare questi valori possiamo sfruttare il diagramma di Bode di $G(s)$.

Guardando la $G(s)$ si nota che:
- dato che $r>0$ allora ci aspettiamo che, per ω sufficientemente grande, il diagramma del modulo abbia pendenza negativa.
- dato che $g=0$ inizialmente il diagramma del modulo ha pendenza nulla
- dato che $\mu=1$ allora, inizialmente, il diagramma del modulo pari a:

$$20\log|\mu| = 20\log 1 = 0 \text{ dB}$$

- dato che $g=0$ e $\mu=1$, il diagramma della fase è inizialmente uguale a $0°$
- Analisi singolarità:
  - * $p_1 = -0.1$ → modulo decresce di -20dB/dec da $\omega = 0.1$ rad/s; → fase decresce di $-90°$ da $\omega = 0.1$ rad/s (stabile)
  - * $z = -1$ → modulo cresce di 20dB/dec da $\omega = 1$ rad/s; → fase cresce di $90°$ da $\omega = 1$ rad/s (stabile)
  - * $p_{2,3} = -10$ (doppio) → modulo decresce di -40dB/dec da $\omega = 10$ rad/s; → fase decresce di $-180°$ da $\omega = 10$ rad/s

Nota bene: $G(s)$ non è in forma di Bode ci riportiamo quindi a questa forma prima del tracciamento del diagramma.

$$G(s) = 10\,\frac{s+1}{(s+0.1)(s+10)^2} \longrightarrow G(s) = \cancel{10}\,\frac{1+s}{\cancel{0.1}\cdot\cancel{100}\,(1+10s)(1+0.1s)} = \underbrace{\frac{1+s}{(1+10s)(1+0.1s)}}_{G(s)\text{ in forma di Bode}}$$

Guardando il diagramma in Figura 1 si nota che:

$|G(j0.1)|_{dB} = -3dB \rightarrow 20\log|G(j\omega)| = -3 \rightarrow |G(j\omega)| = 10^{-3/20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.708$

$|G(j0.01)|_{dB} \cong 0\ dB \rightarrow |G(j0.01)| = 1$ (il passaggio da $G(s)$ non altera la sinusoide in ampiezza)

$\angle G(j0.1) = -45° = -\frac{\pi}{4}$ rad

$\angle G(j0.01) \cong 0°$ (il passaggio da $G(s)$ non altera la sinusoide in fase)

Otteniamo quindi che $y_{2,\infty} = |G(j0.01)| \sin(0.01t + \angle G(j0.01)) \cong \sin(0.01t)$

$y_{3,\infty} = |G(j0.1)| \sin(0.1t + \angle G(j0.1)) \simeq 0.708 \sin(0.1t - \pi/4)$

La risposta asintotica complessiva è: $\boxed{y(t) = 2 + \sin(0.01t) + 0.708 \sin(0.1t - \frac{\pi}{4})}$

Nota bene: per calcolare $|G(j0.01)|$ e $\angle G(j0.01)$ posso guardare i diagrammi asintotici dato che $\omega = 0.01$ rad/s si trova ad una decade dalla prima singolarità (che è singola).

Nota bene: per calcolare $|G(j0.1)|$ e $\angle G(j0.1)$ possiamo in questo caso dedurre il valore di fase e modulo guardando il diagramma asintotico, anche senza tracciare il diagramma di Bode esatto (questo non è vero in generale, soprattutto per quanto riguarda la fase)

In alternativa tali valori possono essere ricavati analiticamente come segue:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|1| + \underbrace{20\log|1+j\omega|}_{\text{zero}} - \underbrace{20\log|1+j10\omega|}_{\text{polo in } -0.1} - \underbrace{20\log|1+j0.1\omega|}_{\text{polo in } -10}$$

Utilizzando la definizione del modulo:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log(\sqrt{1+\omega^2}) - 20\log(\sqrt{1+100\omega^2}) - 20\log(\sqrt{1+0.01\omega^2})$$

$$\rightarrow |G(j0.1)|_{dB} = 20\log(\underbrace{\sqrt{1+0.01}}_{\simeq 1}) - 20\log(\sqrt{1+1}) - 20\log(\underbrace{\sqrt{1+10^{-4}}}_{\simeq 1}) \simeq -20\log\sqrt{2}$$

non risento dell'effetto dello zero in -1 e del polo in -10

$\rightarrow 20\log|G(j0.1)| = -20\log\sqrt{2} \rightarrow 20\log|G(j0.1)| = 20\log(\sqrt{2})^{-1} \Rightarrow |G(j0.1)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(come individuato con l'analisi grafica)

$$\angle G(j\omega) = \underbrace{\angle \mu}_{0° \text{ dato che } \mu>0} + \angle 1+j\omega - \angle 1+j10\omega - \angle 1+j0.1\omega$$

Dalla definizione di argomento di un numero complesso:

$$\angle G(j\omega) = atg(\omega) - atg(10\omega) - atg(0.1\omega)$$

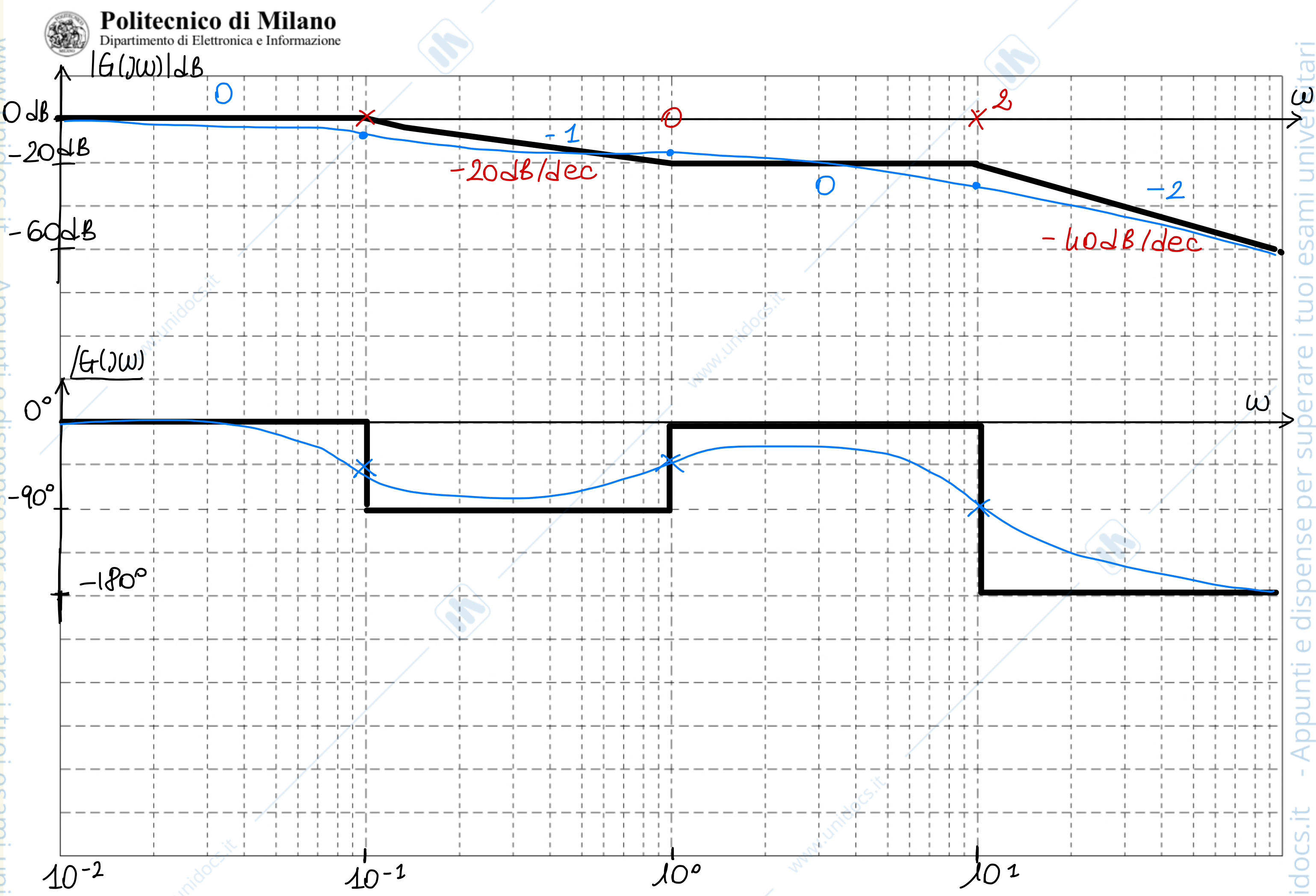
Di conseguenza:

$$\underline{/G(j0.1)} = atg(\underset{\|}{0.1}) - atg(\underset{\|}{1}) - atg(\overset{\overset{0.01}{\|}}{0.01}) \simeq -\frac{\pi}{4}$$

$\underset{0.0997}{}$ $\underset{0.7854}{}$

Anche in questo caso il contributo dello zero $z=-1$ e del polo $p_2=-10$ è trascurabile e si ottiene lo stesso risultato ottenuto per analisi grafica.

Figura 1

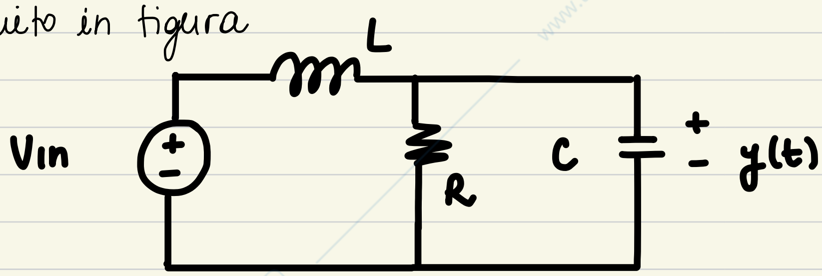


Nota: dato che le singolarità sono tutte distanziate di una decade e che tutte le singolarità sono reali allora si ha un errore (tra diagramma asintotico e diagramma reale) di 3dB (+3dB in corrispondenza dello zero, -3dB in corrispondenza del polo singolo e -6dB in corrispondenza di quello doppio).

Nota (diagramma della fase): date le caratteristiche delle singolarità, la fase è pari alla metà della variazione in fase quando quella asintotica cambia valore.

Esercizio 2

Dato il circuito in figura



(1) Calcolare e analizzare la funzione di trasferimento tra $V_{in}(t)$ ed $y(t)$ (dove $y(t)$ è la tensione ai capi del condensatore

(2) Individuare l'espressione analitica per modulo (in dB) e fase in funzione dei parametri del circuito RCL

(3) Tracciare il diagramma di Bode per il sistema ottenuto

(4) Scegliere R, C ed L affinché la banda passante del sistema sia $[-\infty, 10]\ \frac{rad}{s}$.

(1) Consideriamo le relazioni caratteristiche dei tre componenti:

Resistore: $v_R(t) = R\, i_R(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_R(s) = R\, I_R(s)$

Condensatore: $i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} I_C(s) = C\, V_C(s)\, s$ (assumendo condizioni iniziali nulle)

Induttore: $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} V_L(s) = L\, I_L(s)\, s$ (assumendo condizioni iniziali nulle)

Applicando le condizioni di equilibrio alle maglie ed ai nodi e considerando che $u(t) = v_{in}(t)$:

$$\begin{cases} U(s) - V_L(s) - V_R(s) = 0 \\ I_L(s) = I_C(s) + I_R(s) \\ y(s) = V_C(s) \end{cases}$$

equazioni di equilibrio nel dominio di Laplace

$$\begin{cases} U(s) - Ls\, I_L(s) - V_C(s) = 0 \\ I_L(s) = Cs\, V_C(s) + \frac{V_R(s)}{R} \\ y(s) = V_C(s) \end{cases}$$

→ dato che resistore e condensatore sono in parallelo
→ sostituendo le relazioni costitutive

→ sostituendo $I_L(s)$ nella 1° equazione: $U(s) - LCs^2 V_C(s) - \frac{Ls}{R} V_C(s) - V_C(s) = 0$

Quindi:

$$(RCLs^2 + Ls + R)\, V_C(s) = R\, U(s)$$

$$\rightarrow \quad y(s) = \frac{R}{RCLs^2 + Ls + R}\, U(s) = G(s)\, U(s)$$

La funzione di trasferimento è: $G(s) = \frac{R}{RCLs^2+Ls+R} = \frac{1/LC}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}$

- tipo $g=0$
- guadagno $G(0)=1=\mu$
- grado relativo $r=2$
- nessuno zero
- due poli tali che: $s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}=0 \to s_{1,2} = -\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - 4\frac{1}{LC}}$

Guardando $G(s)$ si nota che questa è nella forma: $G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

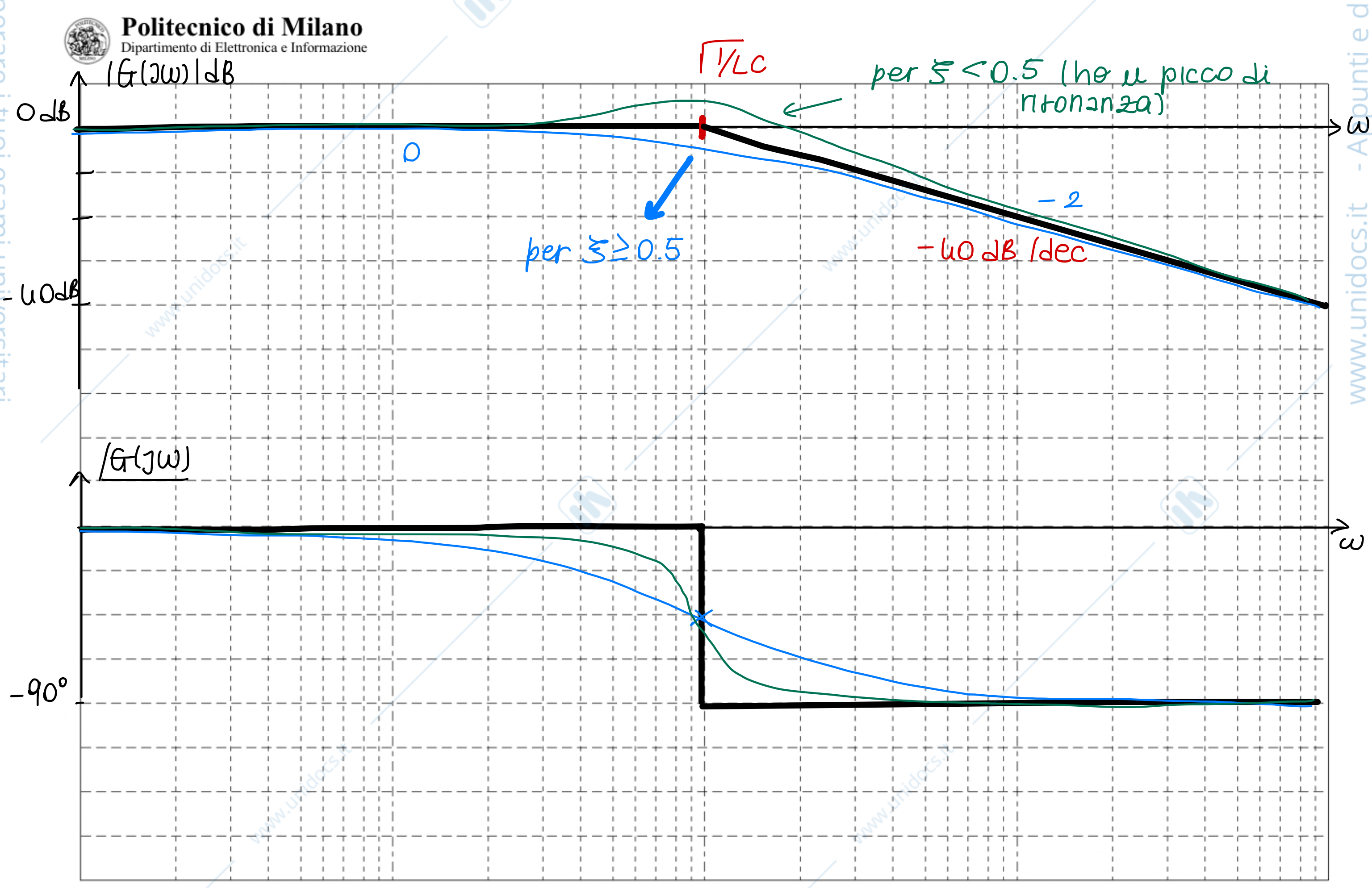
con $\omega_n=\sqrt{\frac{1}{LC}}\ \frac{rad}{s}$ e $\xi=\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

(2) Viste le caratteristiche della funzione di trasferimento i diagrammi di Bode asintotici hanno:

MODULO pari a 0dB per $\omega<\omega_n$ e decrescente di -40 dB/dec per $\omega\geq\omega_n$.

FASE pari a 0° per $\omega<\omega_n$ e pari a -90° per $\omega\geq\omega_n$.

Quest'ultimo risultato è legato al fatto che sia ω_n che ξ sono positivi per definizione e quindi è verificata la condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità.



(3) Per effettuare il calcolo, portiamo la funzione di trasferimento in forma di Bode:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \qquad (\mu = 1)$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|\mu| - 20\log\left|1 + \frac{2\xi}{\omega_n} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right| =$$

$$= -20\log\left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 - \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) = -20\log\left(\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 - \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}\right)$$

$$\angle G(j\omega) = \angle\mu - \angle\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) = 0° - \operatorname{atan}\left(\frac{2\xi}{\omega_n} \cdot \omega \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{-1}\right) =$$

$$\rightarrow \angle G(j\omega) = -\operatorname{atan}\left(\frac{L}{R}\omega\left(1 - LC\omega^2\right)^{-1}\right)$$

(4) Affinché la banda del sistema sia in prima approssimazione pari a $(-\infty, 10]$ dobbiamo scegliere:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 10 \text{ rad/s}$$

→ Una scelta possibile è: $L = 0.1\,H$ e $C = 0.1\,F$.

La banda passante è indipendente dalla scelta di R. Tuttavia R regola il valore dello smorzamento, che detta la severità del picco di risonanza.

→ Potremmo scegliere ξ per non avere picco ⇒ $\xi = 0.7$. In questo caso:

$$\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 0.7 \rightarrow \frac{1}{2R} = 0.7 \rightarrow R = \frac{10}{14}\,\Omega$$

Esercizio 3

Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1000}{s^2}\,\frac{(1+s)(1-s)}{(1+10s)(10-s)}$$

(1) Analizzare la funzione di trasferimento

(2) Tracciare i diagrammi di Bode

(3) Calcolare analiticamente la pulsazione ω tale che $|G(j\omega)|_{dB} = 60\,dB$ e verificare graficamente il risultato ottenuto con i diagrammi ottenuti al punto precedente.

(4) Calcolare il valore di modulo e fase per $\omega = 5 \frac{rad}{s}$.

(1) La funzione di trasferimento non è in forma di Bode. La riportiamo quindi in forma di Bode prima di procedere con l'analisi.

$$G(s) = \frac{1000}{s^2}\,\frac{(1+s)(1-s)}{(1+10s)(10-s)} = \frac{\overset{100}{\cancel{1000}}}{\cancel{10}s^2}\,\frac{(1+s)(1-s)}{(1+10s)(1-0.1s)} = \frac{100}{s^2}\,\frac{(1+s)(1-s)}{(1+10s)(1-0.1s)}$$

la funzione di trasferimento è:
- di tipo $g=2$ dato che ha 2 poli in zero
- ha guadagno $\mu = G(0) = 100$
- ha grado relativo $r=2$
- ha 2 zeri, uno in $z_1 = -1$ (stabile) ed uno in $z_2 = 1$ (instabile)
- ha 2 poli, uno in $p_1 = -0.1$ (stabile) ed uno in $p_2 = 10$ (instabile)

Si noti che il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è instabile.

(2) Sulla base dell'analisi condotta al punto precedente si ha che:
- il guadagno del sistema è positivo ($\mu = 100$)
  - → contribuisce al diagramma del modulo con $20\log_{10}|\mu| = 40$ dB
  - → non contribuisce al diagramma della fase dato che $\angle\mu = 0°$.
- il sistema è di tipo $g=2$
  - → il diagramma del modulo decresce di $-20g = -40$ dB/dec a partire da $\omega = 0$ (questo significa che, qualsiasi sia la frequenza dalla quale noi tracciamo il diagramma la pendenza è già -40 dB/dec)
  - → il diagramma della fase ha valore (asintotico) pari a $-180°$ a partire da $\omega = 0$
- dato che $z_1 = -1$, in corrispondenza di $\omega = 1$ rad/s:
  - → la pendenza del diagramma del modulo cresce di 20 dB/dec
  - → dato che lo zero è stabile, il diagramma della fase cresce di 90°
- dato che $z_2 = 1$, in corrispondenza di $\omega = 1$ rad/s:
  - → la pendenza del diagramma del modulo cresce di 20 dB/dec
  - → dato che lo zero è instabile, il diagramma della fase decresce di $-90°$

→ Mentre l'effetto dei due zeri (coincidenti in modulo, ma diversi in segno) corrisponde a quello di uno zero doppio nel modulo, nella fase i due zeri annullano il loro effetto.

- dato che $p_1 = -0.1$, in corrispondenza di $\omega = 0.1$ rad/s:
  - → la pendenza del diagramma del modulo decresce di -20 dB/dec
  - → dato che il polo è stabile, il diagramma della fase decresce di $-90°$
- dato che $p_2 = 10$, in corrispondenza di $\omega = 10$ rad/s:
  - → la pendenza del diagramma del modulo decresce di -20 dB/dec
  - → dato che il polo è instabile, il diagramma della fase cresce di 90°

Affinché si veda l'effetto di tutte le singolarità, tracciamo il diagramma di Bode a partire da $\omega = 10^{-2}$ rad/s, in corrispondenza del quale calcoliamo il valore del modulo come:

$$|G(j10^{-2})|_{dB} \cong 20\log|100| - 20g\log|j10^{-2}| =$$

$$= 40 - 40\log|10^{-2}| = 40 + 80 = 120\,dB$$

Questa approssimazione si basa sul fatto che, prima delle loro pulsazioni caratteristiche, l'effetto di tutte le singolarità (esclusi poli e zeri in zero) è trascurabile.

→ Per i diagrammi di Bode vedere figura 2 e 3

Figura 2

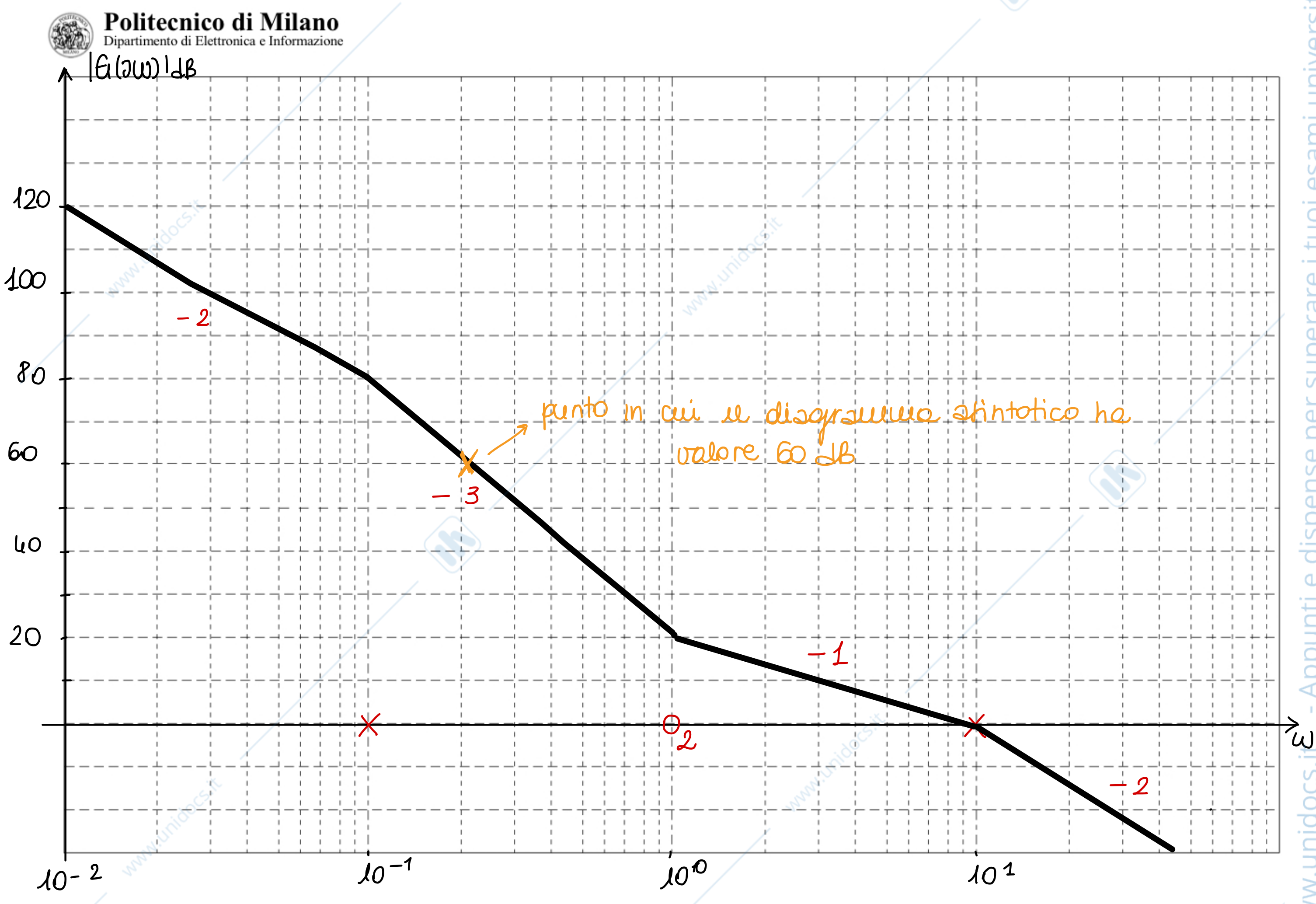
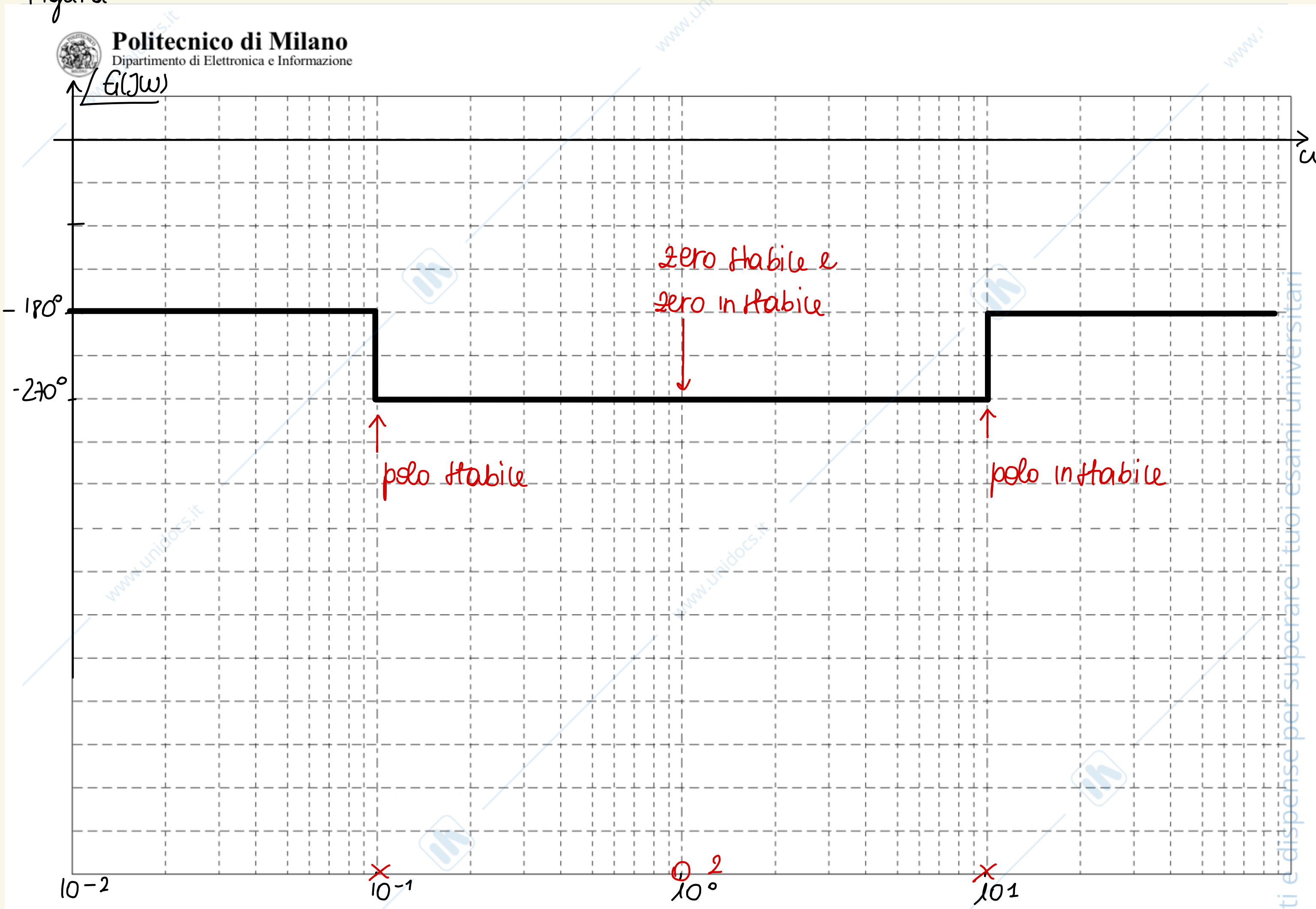


Figura 3



(3) Guardando il diagramma di Bode si può notare che il valore asintotico del modulo può assumere il valore 60 dB solo per $\omega \in (10^{-1}, 10^{0})$ rad/s (nota che il diagramma asintotico del modulo non si discosta eccessivamente da quello reale, a meno della presenza di picchi di risonanza).

Per trovare (in prima approssimazione) per quale valore di ω si verifica $|G(J\omega)|_{dB}$ possiamo quindi trovare la retta passante per i punti:

$$A = (\log(\omega) = -1, 80 \text{ dB}) \quad B = (\log(\omega) = 0, 20 \text{ dB})$$

$$\frac{|G(J\omega)|_{dB} - 20}{80 - 20} = -\log(\omega)$$

$\rightarrow |G(J\omega)|_{dB} = -60\log(\omega) + 20 \rightarrow$ questa relazione è valida solo nell'intervallo $\omega \in (10^{-1}, 10^{0}) \frac{rad}{s}$

$\Rightarrow 60 = -60\log(\omega) + 20$

$\rightarrow 60\log(\omega) = -40 \rightarrow \log(\omega) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \omega_{60dB} = 10^{-2/3} \simeq 0.215 \frac{rad}{s}$

→ Il valore del diagramma asintotico corrisponde con quello individuato analiticamente.

Per calcolare il valore di $|G(j5)|$ e $\angle G(j5)$ sfruttiamo le espressioni di modulo e fase in forma chiusa per la $G(s)$, con:

$$G(s) = \frac{100}{s^2} \frac{(1+s)(1-s)}{(1+10s)(1-0.1s)}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|100| - 20\log|j\omega|^2 + 20\log|1+j\omega| + 20\log|1-j\omega| - 20\log|1+j10\omega| +$$

$$- 20\log|1-j0.1\omega| =$$

$$= 40 - 40\log\omega + \underbrace{20\log(\sqrt{1+\omega^2}) + 20\log(\sqrt{1+\omega^2})}_{\text{l'effetto degli zeri di segno diverso è lo stesso}} - 20\log(\sqrt{1+100\omega^2}) +$$

$$- 20\log(\sqrt{1+0.01\omega^2})$$

$$\rightarrow |G(j5)|_{dB} = 40 - 40\log 5 + 40\log(\sqrt{1+25}) - 20\log(\sqrt{1+2500}) - 20\log(\underbrace{\sqrt{1+0.25}}_{\simeq 1}) =$$

(trascurabile in quanto associato alle singolarità in $\omega = 10$ rad/s)

$$\simeq 6.3595 \text{ dB}$$

$$\Rightarrow |G(j5)| = 10^{|G(j5)|_{dB}/20} \simeq 2.0796$$

Guardando il diagramma di Bode asintotico questo risultato è confermato.

$$\angle G(j\omega) = \underbrace{\angle 100}_{=0} - 2\underbrace{\angle j\omega}_{=\frac{\pi}{2}} + \angle 1+j\omega + \angle 1-j\omega - \angle 1+j10\omega - \angle 1-j0.1\omega =$$

$$= -\pi + atg(\omega) + atg(-\omega) - atg(10\omega) - atg(-0.1\omega) =$$

il diagramma asintotico della fase parte da 180°

$$= -\pi + \underbrace{\cancel{atg(\omega)} - \cancel{atg(\omega)}}_{\text{i due zeri di segno opposto non influenzano la fase}} - atg(10\omega) + atg(0.1\omega) = -\pi - atg(10\omega) + atg(0.1\omega)$$

$$\rightarrow \angle G(j5) = -\pi - \underbrace{atg(50)}_{=1.5508} + \underbrace{atg(0.5)}_{=0.4636} \simeq -4.2287 \text{ rad} \simeq -242.29°$$

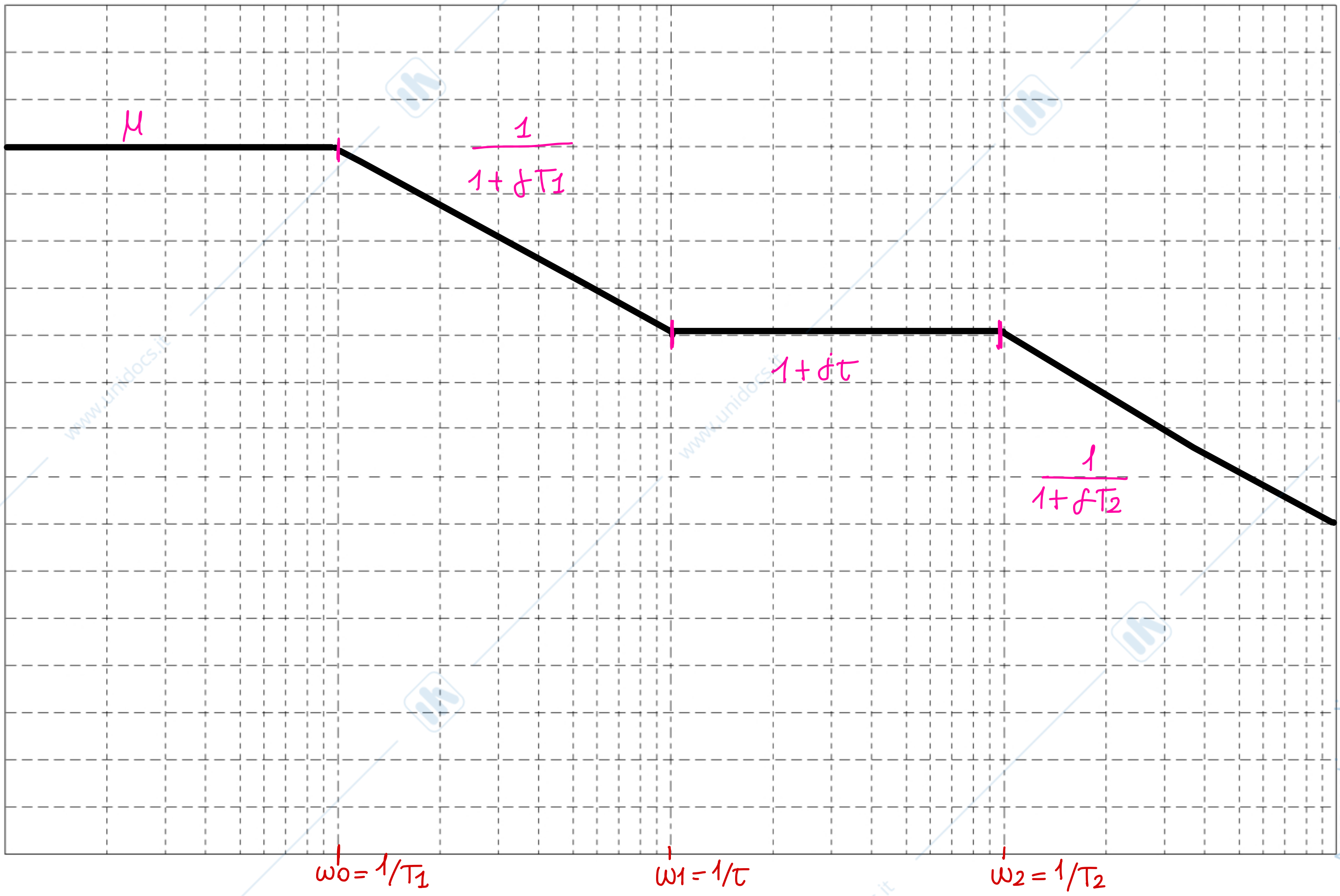
come prima il polo in $p_2 = +10$ influenza poco la fase

Anche in questo caso il risultato ottenuto è sensato rispetto al diagramma di Bode asintotico. → Nota: si può vedere che il diagramma asintotico della FASE si discosta molto dal valore reale della fase.

Nota.

Data $G(s) = \mu \dfrac{(1+s\tau)}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$ con $T_2 < \tau < T_1$

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione



Per $\omega \in [\omega_0, \omega_1)$ rad/s $(\omega^2 T_1^2 \gg 1)$

$$|G(j\omega)| \simeq \frac{|\mu|}{|1+j\omega T_1|} \rightarrow \underbrace{20\log|G(j\omega)|}_{|G(j\omega)|_{dB}} = 20\log|\mu| - 20\log(\sqrt{1+\omega^2T_1^2})$$

$$\simeq 20\log|\mu| - 20\log(\omega T_1) =$$

$$= 20\log|\mu| - 20\log(\omega) + 20\log\left(\frac{1}{T_1}\right) =$$

$$= 20\log\left(\frac{|\mu|}{T_1}\right) - 20\log(\omega)$$

→ Il modulo è una retta a pendenza −20 dB/dec

Per $\omega \in [\omega_1, \omega_2)$ $(\omega^2 T_1^2 \gg 1$ e $\omega^2\tau^2 \gg 1)$

$$|G(j\omega)| \simeq \frac{|\mu||1+j\omega\tau|}{|1+j\omega T_1|} \rightarrow \overbrace{20\log|G(j\omega)|}^{|G(j\omega)|_{dB}} = 20\log|\mu| + 20\log(\sqrt{1+\omega^2\tau^2}) - 20\log(\sqrt{1+\omega^2T_1^2})$$

$$\simeq 20\log|\mu| + 20\log(\omega\tau) - 20\log(\omega T_1) =$$

$$= 20\log|\mu| + \cancel{20\log(\omega)} + 20\log(\tau) - \cancel{20\log(\omega)} - 20\log(T_1) =$$

$$= 20\log|\mu| + 20\log(\tau) + 20\log\left(\frac{1}{T_1}\right) = 20\log\left(\frac{|\mu|\tau}{T_1}\right)$$

→ il modulo è una retta a pendenza 0 dB/dec partante per il punto $20\log\left(\frac{|\mu|\tau}{T_1}\right)$

per $\omega \in [\omega_2, +\infty)$ $(\omega^2 T_1^2 \gg 1,\ \omega^2\tau^2 \gg 1$ e $\omega^2 T_2^2 \gg 1)$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\mu||1+j\tau|}{|1+jT_1||1+jT_2|} \longrightarrow 20\log|G(j\omega)| = 20\log(|\mu|) + 20\log(\sqrt{1+\omega^2\tau^2}) +$$

$$-20\log(\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}) - 20\log(\sqrt{1+\omega^2 T_2^2})$$

$$\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log(|\mu|) + 20\log(\omega\tau) - 20\log(\omega T_1) - 20\log(\omega T_2) =$$

$$= 20\log(|\mu|) + \cancel{20\log(\omega)} + 20\log(\tau) - \cancel{20\log(\omega)} + 20\log\left(\frac{1}{T_1}\right) +$$

$$+ 20\log\left(\frac{1}{T_2}\right) - 20\log(\omega) =$$

$$= 20\log\left(\frac{|\mu|\tau}{T_1 T_2}\right) - 20\log(\omega)$$

→ il modulo è una retta con pendenza −20 dB/dec