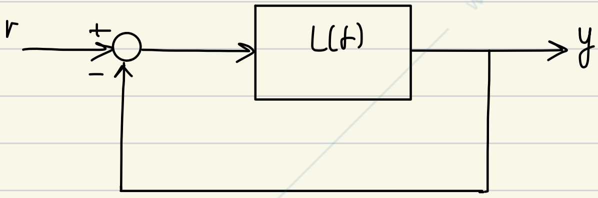
Esercizio 1



Si consideri la seguente funzione di anello

$$L(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s+10)}$$

Studiare la stabilità del sistema retroazionato in figura.

Proviamo inizialmente a vedere se il criterio di Bode è applicabile. Dato che $P=0$, dobbiamo quindi capire se il diagramma del modulo ha un solo attraversamento dell'asse a 0 dB. (Nota bene: P indica il numero di poli a parte reale positiva)

Portiamo $L(s)$ in forma di Bode:

$$L(s) = \frac{-2(1-0.5s)}{10(s+1)(1+0.1s)} = \frac{-0.2(1-0.5s)}{(s+1)(1+0.1s)}$$

e la analizziamo brevemente:

- tipo $g=0$
- guadagno $\mu = L(0) = -0.2$ (negativo)
- due poli: $p_1=-1$, $p_2=-10$ (stabili)
- uno zero: $z_1 = 2$ (instabile)

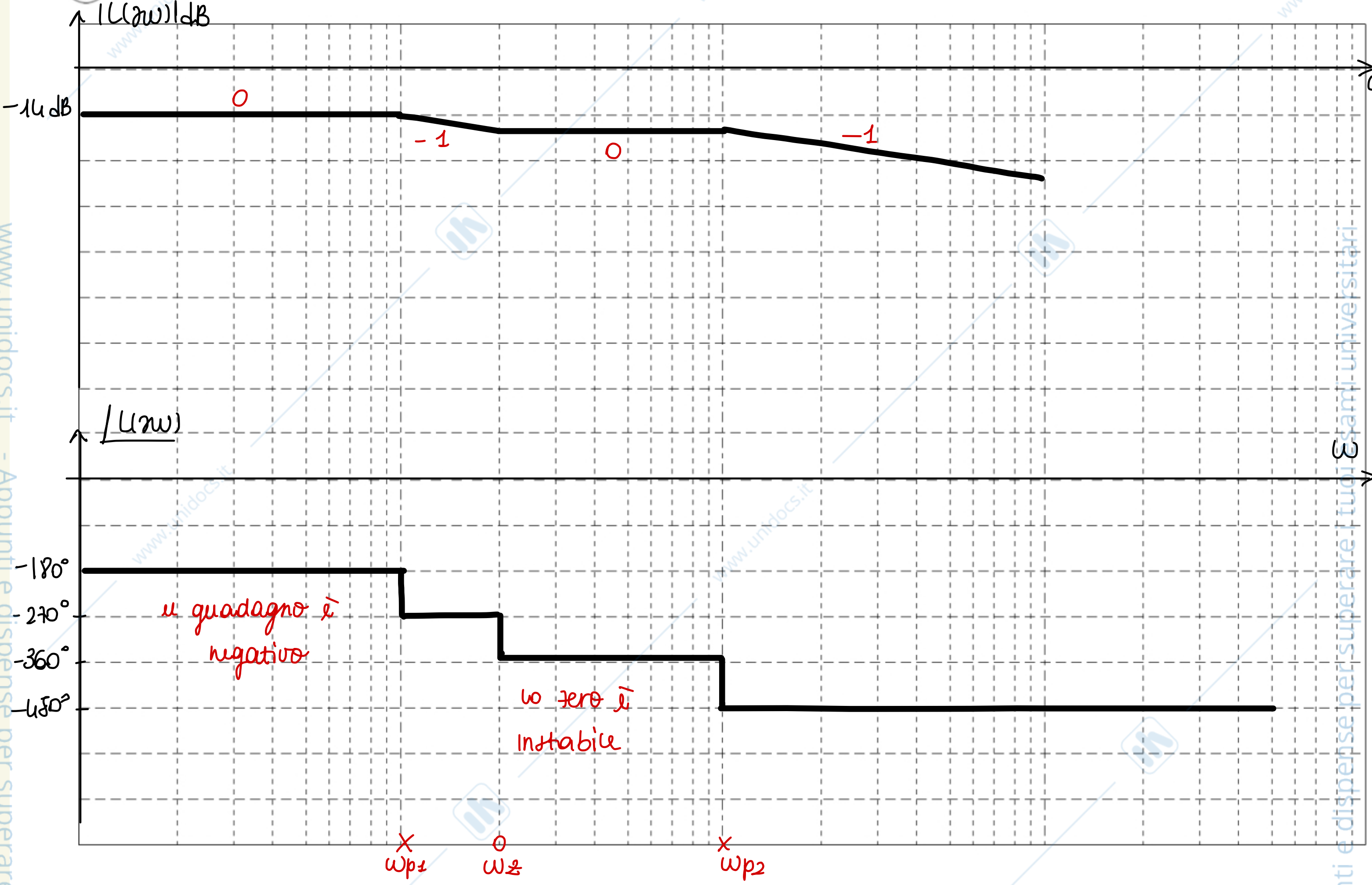
Si noti che la funzione $L(s)$ non è a fase minima. Inoltre, il diagramma di Bode asintotico del modulo ha valore costante

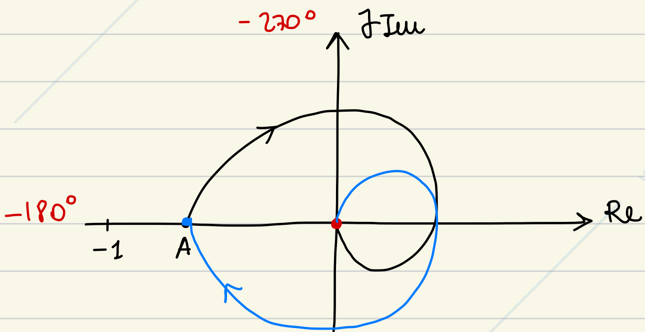
$$20\log|\mu| = 20\log 0.2 \simeq -14\,dB$$

prima di incontrare le singolarità.
Dato che $\omega_{z1} > \omega_{p1}$ questo ci permette di dire (anche senza disegnare i diagrammi di Bode riportati nella pagina seguente) che il criterio di Bode NON è applicabile.

Applichiamo quindi il criterio di Nyquist (considerando che questo può sempre essere applicato). Dato che $P=0$ dobbiamo in particolare verificare se $N=0$ (dove N è il numero di giri in senso antiorario del diagramma di Nyquist di $L(s)$ intorno al punto $(-1,0)$).

Il diagramma è riportato di seguito ai diagrammi di Bode. È chiaro che $N=P=0$ e quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.





Nota che $|L(jw)| \to 0$ per $w \to \infty$ dato che $L(s)$ è strettamente propria

Il punto A ha coordinate $(-0.2, 0)$ dato che $L(0) = -0.2$

In questo caso era possibile applicare il corollario del teorema di Nyquist chiamato "TEOREMA del PICCOLO GUADAGNO". Infatti:

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ P = 0 \\ \bullet\ |L(jw)| < 1 \quad \forall w \end{array}\right\} \Rightarrow$ potevamo già dire che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile

Data la semplicità della $L(s)$ potevamo anche procedere a provare la stabilità in anello chiuso per via analitica. Lo utilizziamo qui come riprova.

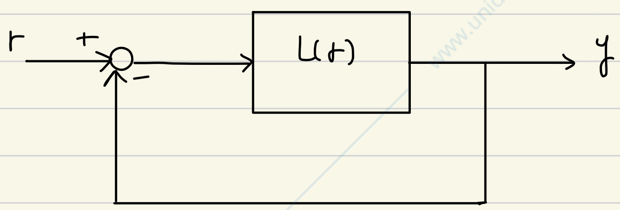
$$L(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s+10)}$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{s-2}{(s+1)(s+10)} \cdot \frac{(s+1)(s+10)}{s-2+(s+1)(s+10)} = \frac{s-2}{s-2+s^2+11s+10} =$$

$$= \frac{s-2}{s^2+12s+8}$$

Il denominatore della $F(s)$ è un polinomio del 2° ordine con tutti coefficienti concordi e non nulli → i poli sono tutti a parte reale negativa e quindi (anche in questo caso) possiamo concludere che il sistema è asintoticamente stabile.

Esercizio 2



Si consideri la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1+s}{(1+0.1s)^2(1+2s)^2}$$

(1) Tracciare il diagramma di Bode (modulo e fase) di $G(s)$

(2) Studiare la stabilità del sistema retroazionato in figura (dove $L(s) = R(s)G(s)$) quando:

(a) $R(s) = 0.1$

(b) $R(s) = 10$

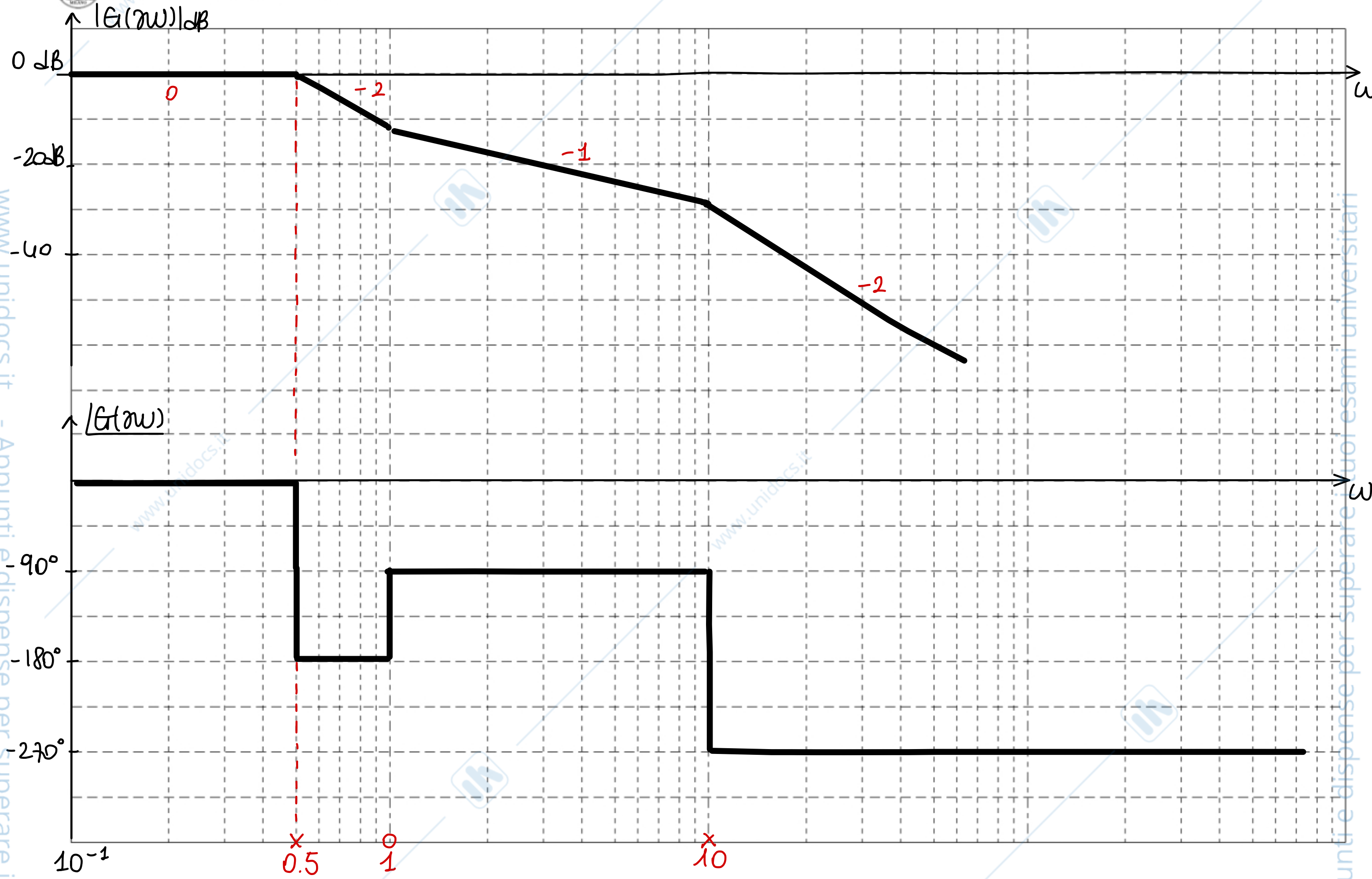
(c) $R(s) = 100$

(d) $R(s) = \frac{10}{1-s}$

(e) $R(s) = 10e^{-0.2s}$

(1) la funzione di trasferimento:

- è di tipo $g = 0$
- ha 1 zero in $z = -1$ (stabile)
- ha 4 poli: $p_{1,2} = -10$ (stabile)
  $p_{3,4} = -0.5$ (stabile)
- ha guadagno $\mu = G(0) = 1$



Si noti che $P=0$ (i poli di $G(s)$ sono entrambi stabili)

(2)

(a) $R(s) = 0.1$

Con $L(s)= R(s)G(s)$, l'unica cosa che cambia tra $G(s)$ ed $L(s)$ è il guadagno μ che diventa pari a: $\mu=0.1$.

Il diagramma di Bode del modulo è traslato verso il basso di -20 dB/dec. Risulta così che non si ha attraversamento dell'asse a 0 dB dato che $|L(j\omega)|<1$ $\forall\omega$.

Posso applicare il teorema del piccolo guadagno e affermare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

(b) $R(s) = 10$

Anche in questo caso l'unica cosa che cambia tra $G(s)$ ed $L(s)$ è il guadagno μ che diventa pari a $\mu=10$.

Di conseguenza il diagramma di Bode viene traslato verso l'alto di $20 \log|\mu| = 20$ dB.

Mi aspetto quindi che adesso esista ω_c tale che $|L(j\omega_c)|_{dB} = 0$.

In particolare:

$$|L(jw_c)|_{dB} = 0 \rightarrow |L(jw_c)| = 1$$
$$\rightarrow |R(jw_c)|\,|G(jw_c)| = 1$$
$$\rightarrow |G(jw_c)| = \frac{1}{|R(jw_c)|} = \frac{1}{10}$$

Cerco quindi la pulsazione in corrispondenza della quale $|G(jw_c)| = 0.1$ o, in decibel, $|G(jw_c)|_{dB} = -20\ dB$. Guardando il diagramma di Bode ci aspettiamo che $w_c \simeq 2.5 \frac{rad}{s}$

Dato che $P=0$, possiamo applicare il criterio di Bode e quindi dobbiamo calcolare (dato che $\mu>0$):

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c|$$

Dato che la fase non è modificata da $R(s)$, guardando il diagramma di Bode della fase si nota che $\varphi_c > -180°$ almeno asintoticamente e, quindi, ci aspettiamo che $\varphi_m > 0$ e che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile.

Calcoliamo φ_c per provare questo risultato.

$$\angle L(jw_c) = \angle\mu + \angle 1+jw_c - 2\angle 1+j0.1w_c - 2\angle 1+j2w_c =$$

$$= atg(w_c) - 2atg(0.1w_c) - 2atg(2w_c) \cong 68.2° - 28° - 157.4° = -117.2°$$

$$\rightarrow \varphi_m \cong 180° - 117.2° = 62.8° > 0$$

(c) $R(s) = 100$

Anche in questo caso $R(s)$ modifica solo μ, che diventa $\mu = 100$. In questo modo mi aspetto nuovamente di avere un attraversamento dell'asse a 0dB quando:

$$|L(jw_c)| = 1 \rightarrow |R(jw_c)|\,|G(jw_c)| = 1$$

$$\rightarrow |G(jw)| = \frac{1}{100} \quad \text{ossia} \quad |G(jw_c)| = -40\ dB$$

Guardando il diagramma di Bode si nota che questa condizione è verificata per $w_c \simeq 15 \frac{rad}{s}$, considerato l'errore tra diagramma reale ed asintotico.
Analogamente al caso precedente possiamo applicare il criterio di Bode e quindi, calcoliamo φ_m. Si noti che $\mu>0$ e che in questo caso non siamo in grado di fare una valutazione qualitativa a partire dal diagramma di Bode.

Calcoliamo quindi la fase in w_c:

$$\angle L(jw_c) = \angle\mu + \angle 1+jw_c - 2\angle 1+j0.1w_c - 2\angle 1+j2w_c =$$
$$= atg(w_c) - 2atg(0.1w_c) - 2atg(2w_c) \cong 86.2° - 112.6° - 176.2° = -202.6°$$

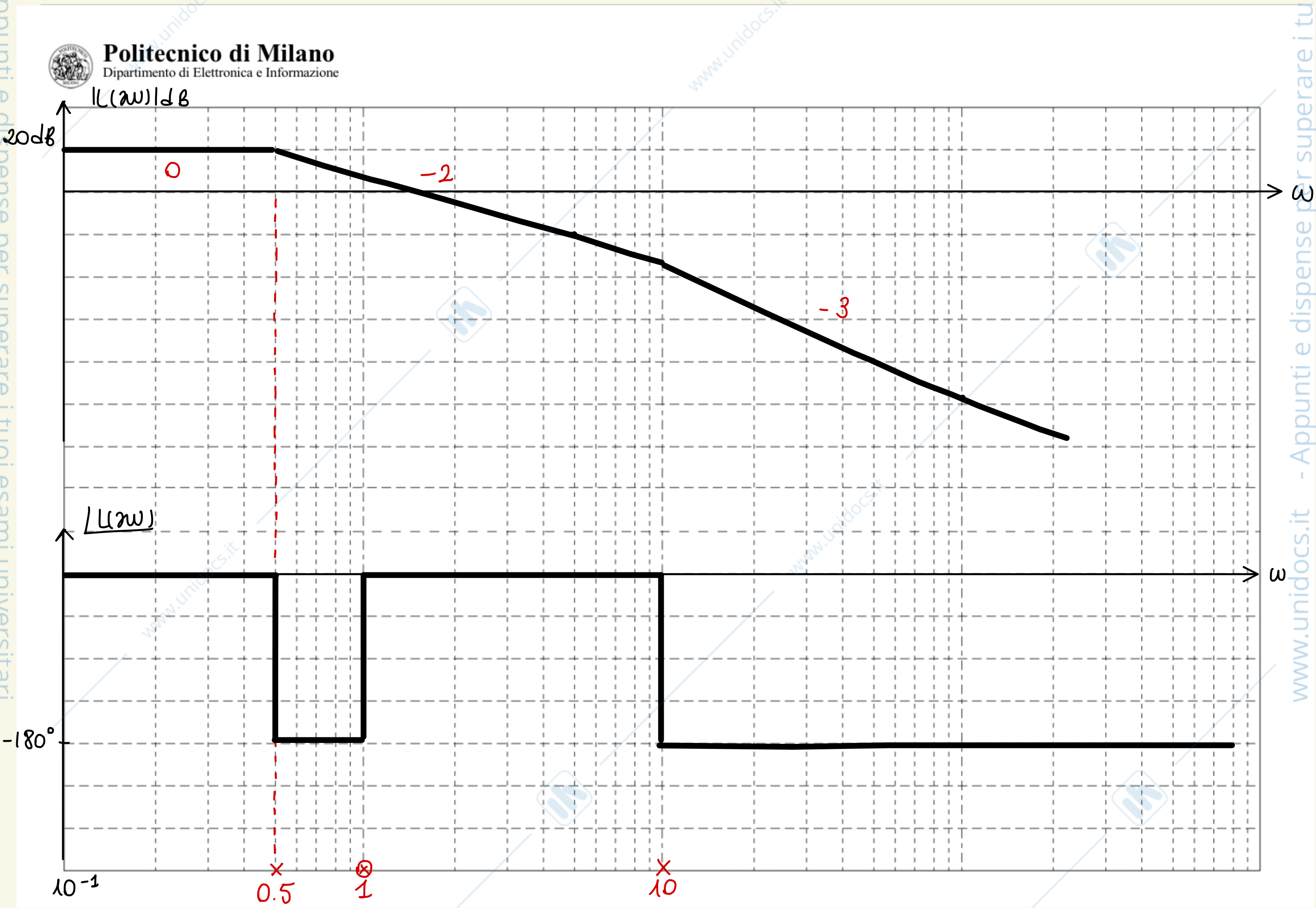
$\varphi_m = 180° - 202.6° = -22.6° < 0 \longrightarrow$ il sistema retroazionato è instabile.

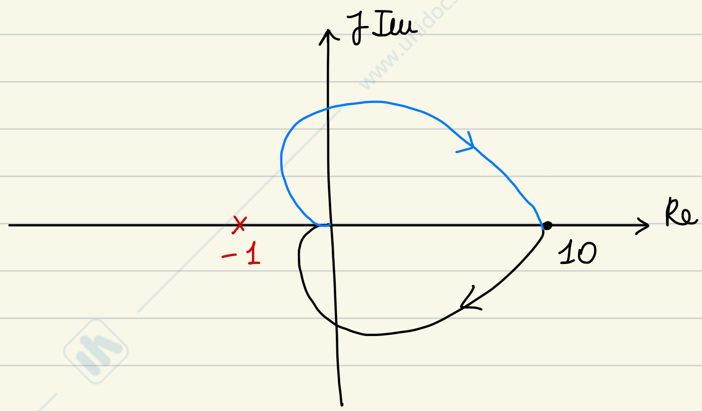
(d) $R(s) = \dfrac{10}{1-s}$

In questo caso $L(s) = 10 \dfrac{1+s}{(1-s)(1+0.1s)^2(1+2s)^2}$

In questo caso $P=1$, quindi non possiamo applicare il criterio di Bode ma dobbiamo applicare il criterio di Nyquist. Per far questo, disegniamo i diagrammi di Bode associati alla nuova $L(s)$, tenendo conto che:

- $g=0$, $\mu=10$
- $z=-1$
- $p_{1,2}=-0.5$, $p_3=1$ (instabile), $p_{4,5}=-10$





$N=0$

$\rightarrow$ Il sistema in anello chiuso è instabile dato che $N=0$ e $P=1$ $(N \neq P)$

(e) $R(s) = 10e^{-0.2s}$

Con l'introduzione della $R(s)$ con ritardo si ha:

$$L(s) = 10e^{-0.2s} \frac{s+1}{(1+0.1s)^2(1+2s)^2}$$

Come visto in precedenza l'effetto del ritardo è visibile solo nella fase, mentre il modulo non è modificato dall'esponenziale. Quindi:

$$|L(j\omega)| = |10e^{-0.2j\omega} G(j\omega)| = |10\, G(j\omega)|\, \underbrace{|e^{-0.2j\omega}|}_{=1} = |10\, G(j\omega)|$$ $\rightarrow$ è esattamente quello che ottenevamo nel caso (b).

Nel caso (b) ottenevamo $\omega_c \simeq 2.5$ rad/s (che non è modificata dal ritardo) e dato che $P=0$ e $\mu>0$ possiamo comunque studiare la stabilità del sistema retroazionato con il criterio di Bode.

Dobbiamo quindi calcolare $\varphi_m = 180° - |\varphi_c|$.

$$\varphi_c = \angle L(j\omega_c) = \angle \mu + \angle e^{-j0.2\omega_c} + \angle 1+j\omega_c - 2\angle 1+j0.1\omega_c - 2\angle 1+j2\omega_c =$$

$$= -0.2\omega_c + \underbrace{atg(\omega_c) - 2\,atg(0.1\omega_c) - 2\,atg(2\omega_c)}_{\text{già calcolato al punto (b)} \,\cong\, -117.2°} = -0.2\omega_c \cdot \frac{180°}{\pi} - 117.2° =$$

$$\cong -145.8°$$

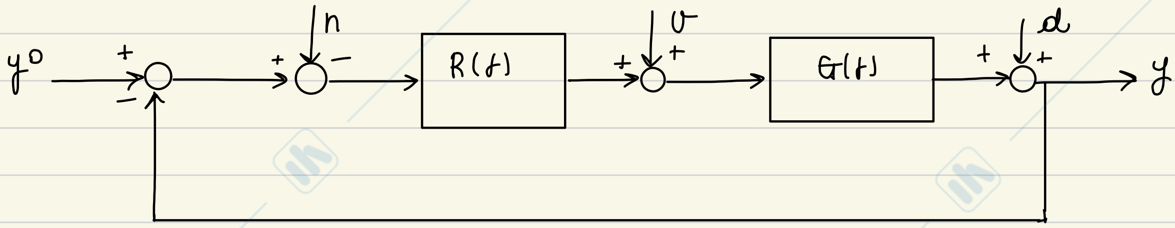
$\rightarrow \varphi_m = 34.1° > 0$

Nota che rispetto al caso (b) abbiamo una riduzione del margine di fase, dovuta alla presenza del ritardo.

Il sistema retroazionato è comunque asintoticamente stabile.

Esercizio 3

Si consideri lo schema di controllo in figura sottostante, in cui $R(s) = \frac{1}{s}$ e $G(s) = \frac{1}{(1+0.1s)^2}$.
Calcolare l'ampiezza dell'errore $|e_\infty|$ quando $y^o = \pm 4\,\text{ramp}(t)$, $n(t) = \pm 0.1\,\text{sca}(t)$, $d(t) = 2\sin(0.1t)$ e $v(t) = 0$.

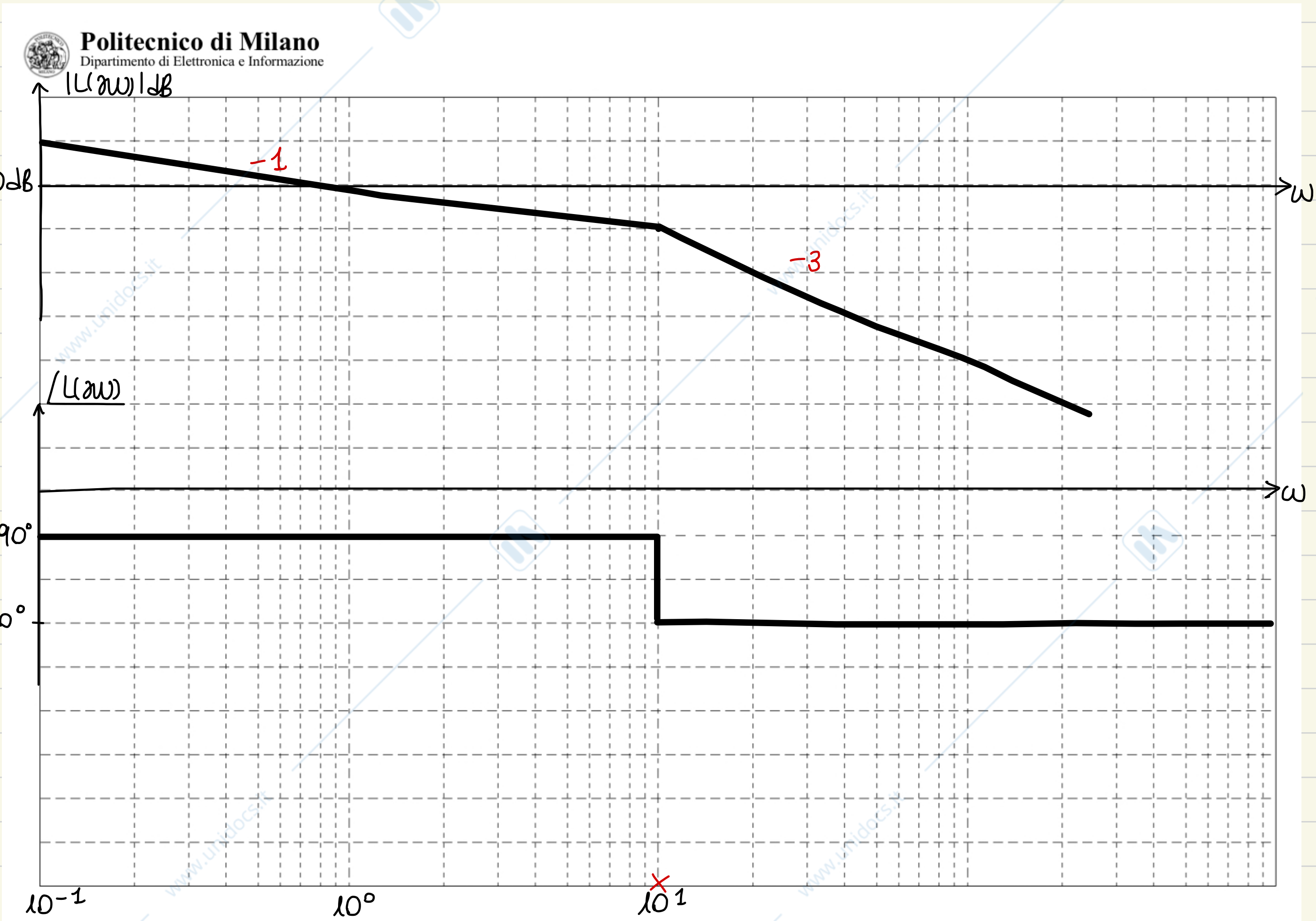


Prima di calcolare l'errore a regime dobbiamo stabilire se il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{1}{s(1+0.1s)^2}$$

La funzione di anello:

- è di tipo $g = 1$
- ha guadagno generalizzato $\mu = 1$
- non ha zeri
- ha un polo doppio in $p = -10$ (stabile)



Nota che : $|L(j0.1)|_{dB} = 20\log|\mu| - 20\log 0.1 = 20\ dB$ ($\log|\mu| = 0$)

Si nota quindi che $P=0$ e che si ha un solo attraversamento dell'asse a 0 dB per $\omega c \simeq 1\ \frac{rad}{s}$ si può utilizzare il criterio di Bode.
Guardando il diagramma asintotico della fase si può inoltre dedurre che, in ωc, $\varphi c > -180°$ e quindi, dato che $\mu > 0$, ci aspettiamo che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile. Per sicurezza calcoliamo la fase in ωc:

$$\angle L(j\omega c) = \angle\mu \underbrace{- 90°}_{\text{effetto del polo in zero}} - 2atg(0.1\omega c) \cong -90° - 10° = -110° \Rightarrow \varphi m > 0°$$

Posso quindi calcolare l'errore a regime applicando il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$e(t) = e_n(t) + e_{y°}(t) + e_v(t) + e_d(t)$$

Dato che $v(t)=0$ posso subito dire che $e_{v\infty}=0$, mentre posso calcolare $e_{y°\infty}$ e $y_{n\infty}$ usando il teorema del valore finale e $e_{d\infty}$ utilizzando il teorema della risposta in frequenza.

La funzione di trasferimento tra e e d è: $\quad E_d(s) = -\frac{1}{1+L(s)} D(s) = -\underbrace{S(s)}_{\text{sensitività}} D(s)$

Quindi:
$e_{d\infty}(t) = 2|-S(j0.1)| \sin(0.1t + \angle -S(j0.1)) = 2|S(j0.1)| \sin(0.1t + \angle -S(j0.1))$

Noi siamo interessati a trovare l'ampiezza dell'errore e quindi, per questo termine, cerchiamo solo il valore assoluto del massimo errore a regime dovuto alla sinusoide, ossia:

$|e_{d\infty}|_{max} = 2|S(j0.1)|$

Dobbiamo quindi calcolare $|S(j0.1)|$. Sappiamo che in prima approssimazione:

$$|S(j\omega)| \simeq \begin{cases} 1/|L(j\omega)| & se \quad \omega \ll \omega c \\ 1 & se \quad \omega \gg \omega c \end{cases}$$

In questo caso $\omega c = 1\ rad/s$, quindi $|S(j0.1)| \simeq \frac{1}{|L(j0.1)|}$

Sempre da Bode notiamo che $|L(j0.1)|_{dB} = 20\ dB \rightarrow |L(j0.1)| = 10$

$\Rightarrow |S(j0.1)| = 0.1$ e $|e_{d\infty}|_{max} = 0.2$

Potriamo quindi calcolare i due termini rimanenti, con:

$E_n(s) = F(s)N(s)$ e $E_{y^o}(s) = F(s)\,y^o(s)$

- $n(t) = \pm 0.1\,sca(t) \rightarrow N(s) = \pm \frac{0.1}{s}$

$\rightarrow E_n(s) = \pm \frac{0.1}{s} \frac{L(s)}{1+L(s)}$

Applicando il teorema del valore finale:

$$\lim_{s\to 0} sE_n(s) = \lim_{s\to 0} \pm 0.1 \frac{L(s)}{1+L(s)} = \pm 0.1 \lim_{s\to 0} \frac{1}{s(\cancel{1+0.1s})^2} \cdot \frac{s(\cancel{1+0.1s})^2}{s(1+0.1s)^2+1} = \pm 0.1$$

$e_{n\infty} = \pm 0.1 \rightarrow |e_{n\infty}| = 0.1$

Nota che n è di tipo 1 come $L(s) \rightarrow |e_{n\infty}|$ coincide con l'ampiezza di n

- $y^o(t) = \pm 4\,ramp(t) \rightarrow y^o(s) = \pm \frac{4}{s^2}$

$\rightarrow E_{y^o}(s) = \pm \frac{4}{s^2} \frac{L(s)}{1+L(s)}$

Applicando il teorema del valore finale:

$$\lim_{s\to 0} sE_{y^o}(s) = \lim_{s\to 0} \pm \frac{4}{s} \frac{1}{1+L(s)} = \pm 4 \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}(1+0.1s)^2}{\cancel{s}[s(1+0.1s)^2+1]} = \pm 4$$

$e_{y^o\infty} = \pm 4 \rightarrow |e_{y^o\infty}| = 4$

$\Rightarrow |e_\infty| = |e_{n\infty} + e_{y^o\infty} + e_{v\infty} + e_{d\infty}| \le |e_{n\infty}| + |e_{y^o\infty}| + |e_{d\infty}| \le |e_{n\infty}| + |e_{y^o\infty}| + |e_{d\infty}|_{max} =$
$= 0.1 + 4 + 0.2 = 4.3$