giovedì 9 aprile 2020 13:24

RAPPRESENTAZIONI DI UNA FdT

Punto di partenza

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

GRADO m

GRADO n

$$\boxed{\begin{array}{l} n \geq m \\ \mu = n - m \geq 0 \end{array}}$$

RADICI N(s) ZERI

" D(s) POLI

FORMA FATTORIZZATA della FdT

$$G(s) = \rho \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = \boxed{\rho \frac{\prod_{i=1}^{m} (s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s+p_i)}}$$

ρ = COSTANTE DI TRASFERIMENTO

ZERI e POLI REALI

$\left.\begin{array}{l} z_i \\ p_i \end{array}\right\}$ ZERI e POLI cambiati di segno

ZERI $-z_i$

POLI $-p_i$

PUÒ SUCCEDERE CHE CI SIANO ZERI e/o POLI NULLI (in $s=0$)

Se ci sono vengono "RACCOLTI" fuori dalle produttorie, e si scrive

$$(*) \quad \boxed{G(s) = \frac{\rho}{s^g} \frac{\prod_i (s+z_i)}{\prod_i (s+p_i)}}$$

COST. TRASF, TIPO, ZERI/POLI (REALI)

g: TIPO delle FdT

ES 2 ZERI in $s=0$
3 POLI in $s=0$

$$\rho \frac{s^{\cancel{2}}}{s^{\cancel{3}\,1}} \frac{\prod \dots}{\prod \dots}$$

$\Longrightarrow$ $g = \#\text{POLI in } s=0 - \#\text{ZERI in } s=0$ ovvero NULLI

Nell'es. $g = 3-2 = 1$

Dalla espressione (*):

$$G(s) = \frac{\rho}{s^g} \frac{\prod (s+z_i)}{\prod (s+p_i)} = \frac{\rho}{s^g} \frac{\prod_i \left[z_i \left(1+\frac{s}{z_i}\right)\right]}{\prod_i \left[p_i \left(1+\frac{s}{p_i}\right)\right]}$$

DEFINISCO

$\frac{1}{p_1} = T_1$ COSTANTE DI TEMPO DEI POLI

$\frac{1}{z_1} = \tau_1$ COSTANTE DI TEMPO degli ZERI

$\boxed{\frac{1}{z_i} = \tau_i}$ COSTANTE DI TEMPO degli zeri

Posso riscrivere

$$G(s) = \frac{\rho}{s^g} \frac{\prod \left[z_i (1 + s\tau_i) \right]}{\prod \left[p_i (1 + sT_i) \right]}$$

CHIAMO

$$\boxed{\mu = \rho \frac{\prod z_i}{\prod p_i}}$$

OTTENGO

GUADAGNO

$$\boxed{G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod (1 + s\tau_i)}{\prod (1 + sT_i)}}$$

GUADAGNO COSTANTI DI TEMPO

NOTA sul termine "COSTANTE DI TEMPO"

In generale $\{poli\} = \{autovalori\}$

Se anche ci sono cancellazioni, un Polo è sempre un AUTOVALORE

MODI

IP. $\lambda_i < 0$

$$\boxed{e^{\lambda_i t} = e^{-p_i t} = e^{-t/T_i}}$$

$T_i = \frac{1}{p_i}$

T_i : INDICA quanto rapidamente $\longrightarrow 0$ l'esponenziale associato al polo considerato [MODO del SISTEMA]

e^{-t/T_i} $t \to +\infty$ tanto più velocemente

$e^{-t/T_i} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$ tanto più velocemente quanto più T_i è "PICCOLA"

Se ci sono COPPIE DI ZERI e/o poli complessi e coniugati, l'espressione di $G(s)$ si modifica come segue:

$$G(s) = \frac{\rho}{s^g} \frac{\prod_i (s+z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{mi} s + \alpha_{mi}^2)}{\prod_i (s+p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{mi} s + \omega_{mi}^2)}$$

$$= \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1+s\tau_i) \prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{mi}} s + \frac{s^2}{\alpha_{mi}^2}\right)}{\prod_i (1+sT_i) \prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{mi}} s + \frac{s^2}{\omega_{mi}^2}\right)}$$

$$\boxed{\mu = \rho \frac{\prod z_i \prod \alpha_{mi}^2}{\prod p_i \prod \omega_{mi}^2}}$$

ζ_i e ξ_i : SMORZAMENTI di ZERI/POLI

α_{mi} e ω_{mi} : PULSAZIONI NATURALI ZERI/POLI

Interpretazione geometrica di PULSAZ. NATURALE e SMORZAMENTO

Consideriamo il polin. di 2° grado

Poli $\boxed{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = 0$ (1)

Radici Poli $a \pm jb$ $\quad Re(\text{polo}) = a$

$Im(\text{polo}) = b$

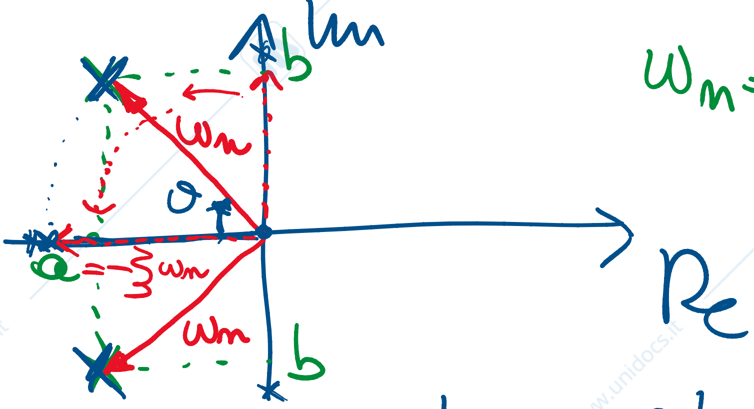
$(s - a - jb)(s - a + jb) =$ (2)

$= \boxed{s^2 - 2as + a^2 + b^2} = 0$ (3)

Si ottiene
$$\begin{cases} \omega_n^2 = a^2 + b^2 \\ a = -\xi\omega_n \end{cases} \Rightarrow b = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

N.B. I poli si indicano nel piano complesso con X

gli zeri O



$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|\omega_n \cos\theta| = |a|$

$$\boxed{\xi = \cos\vartheta} \iff |\omega_n \cos\vartheta| = |a| = \xi\,\omega_n$$

$|\xi| < 1$

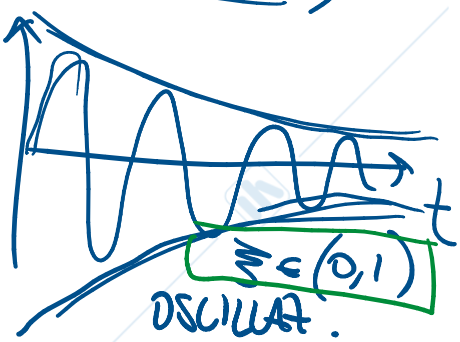
$$\xi : \begin{cases} = 1 \ (\vartheta = 0) & \text{POLI REALI} \\ = 0 \ \left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right) & \boxed{\text{POLI IMMAGINARI PURI}} \end{cases}$$

RICORDA

Modi associati ad autoval. c.c. ($Re < 0$)

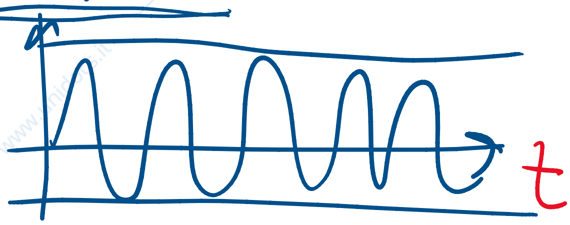
$$\boxed{e^{Re(\lambda_i)t} \sin(\,Im(\lambda_i)t\,)}$$

$e^{\sigma t} \sin(\omega t)$



OSCILLAZ. SMORZATE

POLI IMM PURI $\Rightarrow Re(\lambda_i) = 0$



OSCILL. PERMAN.

$\xi = 0$

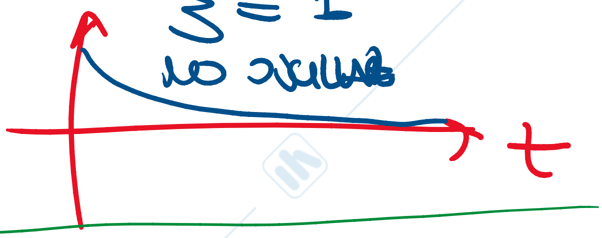
POLI REALI

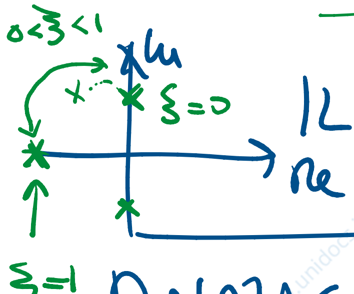
$e^{\lambda t}$

$\lambda < 0$

$\xi = 1$

NO OSCILLAZ.





IL PERIODO delle oscillaz. $T_{osc} = \dfrac{2\pi}{\omega_n}$

ANALISI DEL "GUADAGNO"

$$\boxed{G(s) = \frac{\mu}{s^g}\,\frac{\prod(1+s\tau_i)}{\prod(1+sT_i)}}$$

$$G(s) = \rho\,\frac{\prod(s+z_i)}{s^g\prod(s+p_i)}$$

Ipotesi $\boxed{g=0}$ (NON ci sono né ZERI né poli in $s=0$)

$$\boxed{G(s) = \mu\,\frac{\prod(1+s\cancel{\tau_i})}{\prod(1+s\cancel{T_i})}} \leftarrow s=0$$

Se $g=0$

$$\boxed{\mu = G(s)\Big|_{s=0}}$$

GUADAGNO se il TIPO $g=0$

$$\hookrightarrow G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

GUADAGNO STATICO

$$G(s)\Big|_{s=0} = \underline{-CA^{-1}B + D} = \bar{y}/\bar{u}$$

Sistemi LTI

$\boxed{\text{Se } g \neq 0}$

$$\boxed{G(s) = \frac{\mu}{s^g}\,\frac{\prod(1+s\tau_i)}{\prod(1+sT_i)}}$$

↳ DEVO DEFINIRE il GUADAGNO GENERALIZZATO

$$\boxed{\mu_{GEN} = \lim_{s \to 0} s^g G(s)}$$

$$G(s) = \mu \frac{\Pi(1+sT_i)}{\cancel{s^g}\, \Pi(1+sT_i)} \cancel{s^g} =$$

↳ $s=0$ $\quad \mu$

STAB. MOVIMENTO

$$\left.\begin{matrix} u(t) = u^*(t) \\ x_{m0} \end{matrix}\right\} \rightarrow x_m(t)$$

$$\begin{matrix} u^*(t) \\ x_{p0} \end{matrix} \longrightarrow x_p(t)$$

$$| x_p(t) - x_m(t) | < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

$$|x_p - x_{on}| < \delta$$

se

LTI $\dot{x} = Ax + Bu$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_n &= A x_n + Bu^* \\ \dot{x}_p &= A x_p + Bu^* \end{aligned}}$$

$$\underbrace{\dot{x}_p - \dot{x}_n = A(x_p - x_n)}$$

STABILITÀ

$$\boxed{\delta\dot{x} = A\,\delta x}$$

$\delta x_0 = x_{p0} - x_{m0}$

STABILITÀ non dipende dal singolo mov (SCELTA C.I. e u^*)

ma dipende dal sistema u^*
(MATRICE A)

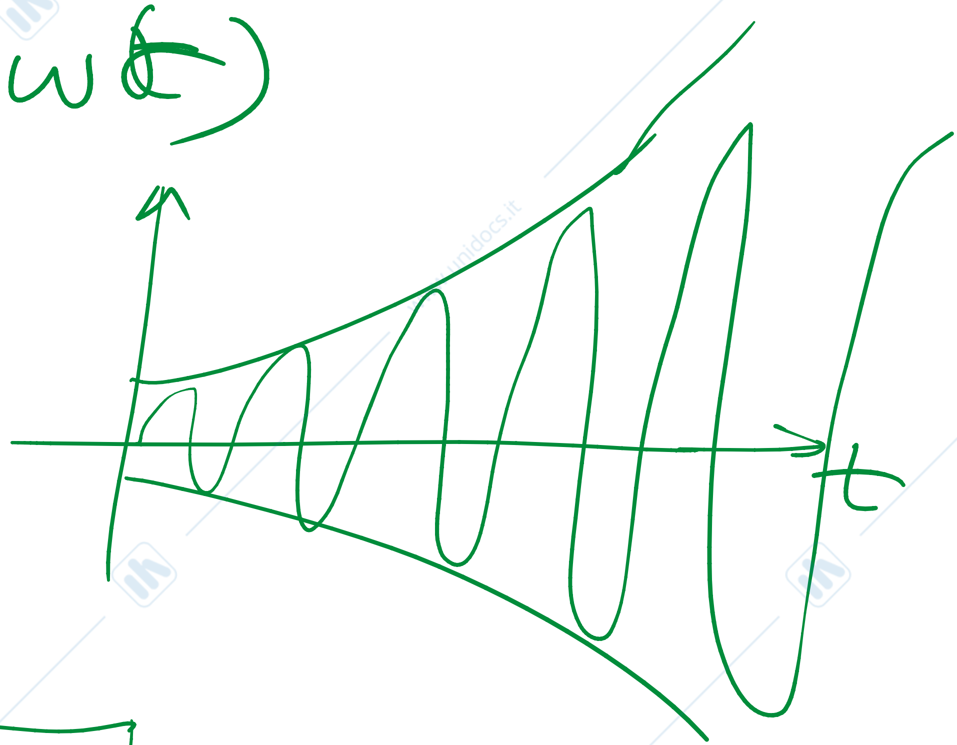
$$\delta x(t) = e^{At} \boxed{\delta x_0}$$

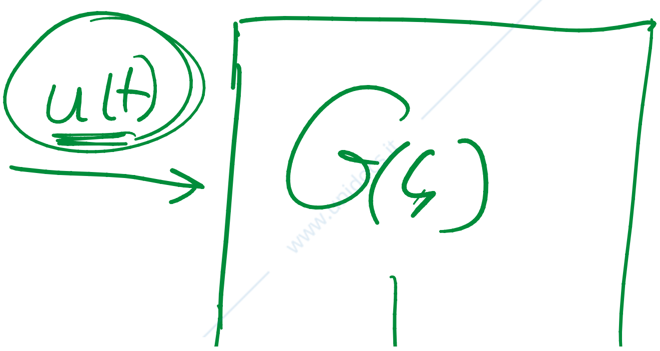
$$\boxed{x_p(t) - x_n(t)}$$

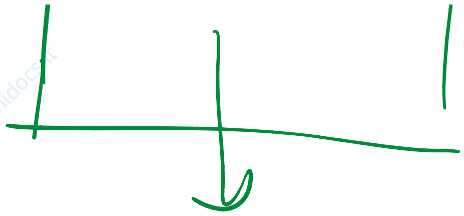
MODO $\sigma \pm j\omega$

$$e^{\sigma t} \cos(\omega t)$$

$\sigma > 0$







Per c.c. ω_n / ξ