

CAPITOLO 1

- Cosa rappresentano le variabili di stato e le variabili indipendenti nei modelli di trasferimento?
Con variabile di stato indichiamo qualsiasi risorsa in quanto l'andamento delle quantità di risorsa presenti nei compartimenti descrive completamente il fenomeno di interesse. Se le quantità di risorsa trasferita tra i compartimenti sono definite esclusivamente dalle quantità di risorsa presente nei compartimenti stessi, allora il sistema viene detto isolato o autonomo. Se il sistema non è isolato allora vengono introdotte delle nuove variabili dette variabili indipendenti. Queste variabili sono indipendenti, agiscono sul sistema ma non sono influenzate da esso.
- È possibile distinguere le unità di risorsa all'interno di uno stesso compartimento?
Gli elementi di una stessa risorsa potranno ovviamente possedere ulteriori attributi, i quali non vengono considerati rilevanti. Le singole unità di risorsa si considerano quindi indistinguibili tra loro.
- Che cos'è un grafo di trasferimento?
Prende il nome di grafo di trasferimento quel grafo orientato definito da un insieme di nodi che rappresentano i compartimenti presenti nel sistema, collegati tra loro da archi orientati che denotano la presenza di trasferimento di risorsa tra i compartimenti.
- Come si rappresenta sul grafo di trasferimento la presenza di generazione di risorsa?
Sul grafo di trasferimento la presenza di generazione di risorsa è rappresentata con un arco la cui origine conterrà un trattino per sottolineare che la risorsa non viene prelevata ma generata.
- Come si rappresenta sul grafo di trasferimento la presenza di perdita di risorsa?
La presenza di un arco che esce da un compartimento senza entrare in nessun altro compartimento rappresenta il fenomeno della perdita di risorsa. La perdita dipende esclusivamente dalla risorsa a monte e cioè dal compartimento da cui esce l'arco orientato.
- Che cos'è l'equazione di bilancio di flusso per un compartimento?
L'equazione di bilancio di flusso è una proprietà che vale per ciascun compartimento. Essa ci dice che la velocità di variazione di risorsa è uguale al flusso di risorsa entrante meno il flusso di risorsa uscente.
- Cosa rappresentano i coefficienti di ricezione, accumulo e distribuzione?
Coefficiente di ricezione: del compartimento i dal compartimento j , per esempio è la somma dei coefficienti $\alpha_{ji} + \gamma_{ji}$. In generale il coeff. di ricezione di un

compartimento è dato somma delle risorse che entrano in esso o come trasferimento di risorsa o come generazione di risorsa.

Coefficiente di accumulo: per un compartimento è dato dalla risorsa generata dallo stesso e aggiunta allo stesso.

Coefficiente di distribuzione: è dato dalla somma dei coefficienti degli archi uscenti da un dato compartimento.

- Nel caso di un solo compartimento senza flussi entranti come si ricava il coefficiente di distribuzione a partire dal dato che esprime la variazione di risorsa in essa contenuta in un intervallo di tempo?
- Che relazione c'è tra i coefficienti di distribuzione e di ricezione dei vari compartimenti in assenza di generazione di risorsa?

- Che cos'è l'equazione di bilancio di risorsa per un compartimento?

Nella classe dei modelli di decisione rientrano quei fenomeni i cui trasferimenti avvengono a fronte di decisioni prese in determinate circostanze o periodi. L'equazione di bilancio di risorsa è una proprietà che vale per ciascun compartimento, utile a costruire un modello matematico, questa equazione è data dalla risorsa entrante meno la risorsa uscente.

Questo bilancio corrisponde alla seguente equazione alle differenze:

$$x_i(k+1) - x_i(k) = q_i^{(in)}(k) - q_i^{(out)}(k)$$

- Cosa rappresentano i coefficienti di sopravvivenza e i tassi di fecondità in un modello a struttura d'età?

Il coefficiente di sopravvivenza, ad esempio della classe i è dato da s_i ed indica il numero di componenti, in questo caso della classe i , che sopravvive almeno per un periodo di tempo T .

Il coefficiente di fecondità, ad esempio relativo alla classe d'età i è dato da f_i ed indica il numero di componenti nati, in media, durante un periodo di tempo T dai componenti della classe i diviso la numerosità della classe stessa.

- Che cos'è una struttura d'età di equilibrio?

La struttura d'età di equilibrio S_{eq} è la struttura a cui una popolazione tende al passare del tempo, è una struttura di lungo periodo. Essa ha la proprietà che se la distribuzione iniziale della popolazione è pari a S_{eq} , cioè $x(0)$ è tale che $x(0) = S_{eq}N(0)$ allora $S(k)$ rimane costante e pari a S_{eq} al passare del tempo. In tal caso $x(k) = S_{eq}N(k)$ e la numerosità della popolazione totale cresce e decresce con un tasso fisso $N(k+1) = \gamma N(k)$ dove $\gamma - 1$ è il tasso di crescita della popolazione sul lungo periodo.

- Perché nei grafi di trasferimento di modelli a struttura d'età i coefficienti di distribuzione di tutti i compartimenti (tranne l'ultimo) sono pari a 1?

- In quale situazione nei grafi di trasferimento dei modelli a struttura d'età il nodo corrispondente alla prima classe d'età contiene un autoanello?
In un modello a struttura d'età il nodo corrispondente alla prima classe contiene un autoanello solo nel caso in cui la prima classe abbia un coefficiente di fecondità diverso da zero.

CAPITOLO 2

- Cosa rappresentano le variabili di stato in un modello di transizione tra stati?
I modelli di transizione tra stati sono tipicamente definiti in un indice k che esprime la successione degli eventi in corrispondenza dei quali si verificano le transizioni. La generica variabile di stato rappresenta la probabilità di possedere l' i -esima qualità dopo k passi. Le variabili indipendenti $u(k)$ possono essere presenti, ad esempio, per modellare un'arbitraria ridistribuzione degli stati, ma nella gran parte delle applicazioni di interesse esse non sono presenti. La somma delle variabili di stato, ad ogni passo k , è pari all'unità.
- Che cos'è un grafo di transizione?
La presenza di transizione tra stati è rappresentata da un grafo orientato chiamato grafo di transizione. I nodi di questo grafo rappresentano gli stati del sistema e gli archi la presenza di una possibile transizione.
- Come si rappresenta sul grafo di transizione una transizione certa, cioè con probabilità di verificarsi pari a 1?
- Perché la somma dei pesi associati agli archi uscenti è pari a 1?
La somma dei pesi associati agli archi uscenti sarà sempre uguale ad 1 in quanto in un modello di transizione le qualità che descrivono il fenomeno sono tutte quelle possibili e cioè non possano essere assunte altre qualità se non quelle considerate. Dato quindi un compartimento gli archi che ne usciranno potranno essere diretti verso altri nodi o anche verso lo stesso nodo da cui l'arco è uscito, ne seguirà che la somma dei coefficienti di tutti gli archi sarà uguale ad 1. I coefficienti rappresenteranno sia le probabilità che il fenomeno muti le sue qualità sia la probabilità che rimanga invariato.
(la transizione deve avvenire necessariamente verso uno dei possibili stati, incluso quello corrente e, ad ogni stato k , la somma delle variabili di stato deve essere pari a 1).
- Cosa esprime la proprietà di Markov?
La proprietà di Markov si formalizza scrivendo che lo stato successivo $x(k+1)$ dipende solo dallo stato corrente $x(k)$. In questo caso il modello di transizione tra stati viene chiamato modello di Markov e la probabilità di trovarsi nello stato i al passo $k+1$ è data da: $x_i(k+1) = \alpha_{ji} x_j(k) + \alpha_{ii} x_i(k)$
dove si è considerato solo il contributo dovuto al nodo j -esimo.

- Che tipo di transizione è rappresentata da un autoanello?
Un autoanello rappresenta la probabilità di rimanere nello stato i a fronte di un evento.
- Perché la somma degli elementi di ogni colonna della matrice A vale 1?
Data l'equazione generale che definisce la dinamica di transizione:
 $x_i(k+1) = \sum_{j=1, j \neq i}^n (\alpha_{ji} x_j(k)) + \alpha_{ii} x_i(k)$
la sommatoria di α_{ji} è uguale ad 1, la sommatoria di $x_j(k)$ è uguale ad 1.
L'equazione scritta in forma matriciale sarà: $x(k+1) = Ax(k)$
Dove l'elemento α_{ij} della matrice A corrisponde alla riga i e alla colonna j pari a $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ e pertanto la somma degli elementi su ciascuna delle colonne della matrice A è pari ad 1.
- Perché nei modelli di transizione tra stati non ha senso parlare di "generazione" e di "perdita"?
Nei modelli di transizione viene modificata la qualità del fenomeno, il grafo di transizione rappresenta tutte le possibili transizioni tra i vari stati già esistenti che rappresentano tutte le qualità del soggetto. Ne segue che il modello non creerà risorsa né tantomeno la perderà in quanto si tratta di cambiamenti di qualità.
- Cos'è il PageRank?
Il PageRank è un algoritmo di analisi che assegna un peso numerico ad ogni elemento di un insieme di documenti connessi per mezzo di collegamenti ipertestuali, ad esempio l'insieme delle pagine nel World Wide Web, con lo scopo di quantificare l'importanza relativa all'interno dell'insieme stesso.
Un qualsiasi motore di ricerca su internet, una volta trovate tutte le pagine che contengono il testo richiesto dall'utente, ha il compito di decidere l'ordine in cui presentare all'utente l'elenco dei riferimenti alle pagine trovate dal motore (Page-Rank).
- Quali problemi crea la presenza di autorità per il calcolo del PageRank?
La presenza di un'autorità (pagine che sono puntate da altre pagine della rete ma che non puntano a nessuna di queste) fa sì che si creino dei vicoli ciechi nei quali, una volta entrati, non si esce più. Per evitare queste trappole per il surfer immaginario, il modello del Page-Rank assume che una volta giunto in un'autorità il surfer decida di andare in una pagina a caso della rete (compresa la pagina corrente) digitandone l'indirizzo.

CAPITOLO 3

- Quali sono i limiti e i vantaggi dei modelli d'influenza rispetto ai modelli di trasferimento di risorsa?
I modelli di trasferimento di risorsa utilizzano paradigmi modellistici come leggi di bilancio mentre i modelli d'influenza lasciano da parte qualsiasi "legge" che possa esprimere i meccanismi sottostanti al fenomeno e considerano come

obiettivo della costruzione di un modello quello di rappresentarne i comportamenti nei termini delle sole relazioni causa/effetto tra le variabili.

- Che cos'è un grafo d'influenza?
Il grafo di influenza rappresenta la struttura delle interazioni fra le variabili di interesse. I nodi rappresentano le variabili e gli archi orientati le influenze tra esse: un arco dal nodo j al nodo i indica che la variabile modifica la dinamica della variabile x_i . La presenza di una variabile indipendente sarà indicata con un nodo apposito, come per i modelli di trasferimento di risorsa. I grafi di influenza possono avere degli autoanelli in quanto il valore corrente di una variabile può ben influenzare l'andamento futuro.
- Perché i pesi associati agli archi di un grafo d'influenza possono essere anche negativi?

- Che differenza c'è tra un modello d'influenza a tempo continuo e uno a tempo discreto?

Per i modelli d'influenza a tempo discreto avremo l'equazione:

$$x_i(k+1) = \text{somm. Per } j=1 \text{ ad } n \text{ di } \alpha_{ji}x_j(k) + \text{somm. } l=1 \text{ a } p \text{ di } \beta_{li}u_l(k)$$

che in forma matriciale diventa:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad \text{con } \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

Per i modelli d'influenza a tempo continuo avremo:

$$\dot{x}_i(t) = \text{somm. Per } j=1 \text{ ad } n \text{ di } \alpha_{ji}x_j(t) + \text{somm. } l=1 \text{ a } p \text{ di } \beta_{li}u_l(t)$$

che in forma matriciale diventa:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{con } \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

- Cos'è il modello a ragnatela?
Modello a ragnatela è come viene chiamato il modello della dinamica dei prezzi. Il modello grafico della dinamica dei prezzi per come viene sviluppato ricorda una ragnatela per questo ha preso questo nome.
- Cosa comportano tempi di produzione maggiori di un periodo in un modello a ragnatela?

Sul lungo periodo ci sono tre possibili conclusioni:

- Se $b > a$ (retta dell'offerta più pendente della retta della domanda) quindi il produttore è più sensibile al prezzo del consumatore. Il prezzo tende a divergere dal prezzo di equilibrio.
- Se $b = a$ i consumatori e i produttori sono sensibili in egual misura. Il prezzo oscilla tra due valori, ma non si avvicina né si allontana dal prezzo di equilibrio.
- Se $b < a$ cioè il produttore è meno sensibile al prezzo rispetto ai consumatori. Il prezzo tende a convergere al prezzo di equilibrio.

- Qual è la differenza tra il modello di Samuelson e quello di Hicks?

Il modello di Samuelson è il modello moltiplicatore-acceleratore che si basa sulle seguenti ipotesi della dinamica del sistema macroeconomico:

$$I(k+1) - I_0 = a [C(k+1) - C(k)]$$

$$C(k+1) - C_0 = cR(k)$$

$$Y(k) = C(k) + I(k) + G(k)$$

$$T(k) = R(k)$$

Dove $0 < c < 1$ è la propensione marginale al consumo, $1/(1-c)$ è il moltiplicatore e il coefficiente a è il cosiddetto acceleratore.

Con sostituzioni dirette otteniamo:

$$I(k+1) = aI(k) + a(c-1)C(k) + I_0 + aC_0 + aG(k)$$

$$C(k+1) = cI(k) + cC(k) + C_0 + cG(k)$$

$R(k)$ = reddito nazionale

$Y(k)$ = prodotto nazionale

$C(k)$ = consumo delle famiglie

$I(k)$ = investimenti delle imprese

$G(k)$ = spesa pubblica

Indichiamo le variabili di stato con $x_1(k) = I(k)$ e $x_2(k) = C(k)$, le variabili indipendenti invece saranno $u_1(k) = G(k) + C_0/c$ e $u_2(k) = I_0$.

Il modello di Samuelson prevede che la spesa pubblica $G(k)$ sia costante.

Il modello di Hicks assume, invece, che la spesa pubblica cresca a un tasso costante e quindi sia $G(k) = \eta * s^k$. Il modello di Samuelson dal modello di Hicks si otterrà come caso particolare per $s=1$.

CAPITOLO 5 (tempo continuo)

- Cosa esprime il principio di sovrapposizione degli effetti?

La linearità di un sistema ha delle conseguenze molto importanti ai fini dell'analisi delle proprietà delle soluzioni. La più importante tra queste è nota come principio della sovrapposizione degli effetti che consiste nel fatto che l'effetto combinato di più cause è pari alla somma degli effetti prodotti dalle singole cause, considerando come "cause" sia gli andamenti delle variabili indipendenti sia le condizioni iniziali, ed "effetti" gli andamenti risultanti delle variabili di stato.

Se $x'(t)$ è la soluzione relativa alle condizioni iniziali x_0' e all'andamento $u'(t)$ delle variabili indipendenti, e $x''(t)$ è la soluzione relativa alle condizioni iniziali $x_0''(t)$ e all'andamento $u''(t)$, allora la soluzione relativa alle condizioni iniziali $x_0''' = \alpha x_0' + \beta x_0''$ e all'andamento $u'''(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t)$ è data da $x'''(t) = \alpha x'(t) + \beta x''(t)$.

- Come è definita l'evoluzione libera?

Dato un sistema lineare invariante a tempo continuo si chiama evoluzione libera $x_1(t)$ la soluzione corrispondente al caso in cui la variabile indipendente $u(t)$ sia identicamente nulla e lo stato iniziale $x(0)$ sia quello assegnato x_0 .

- Come è definita la risposta forzata?
Dato un sistema lineare invariante a tempo continuo si chiama risposta forzata $x_f(t)$ la soluzione del sistema corrispondente al caso in cui lo stato iniziale sia nullo e la variabile indipendente abbia l'andamento assegnato.
- Quali modi naturali possono essere associati a un autovalore reale?
($e^{\lambda_i t}$)* v_i è il modo naturale associato all'autovalore λ_i .
Se:
 - $\lambda_i > 0 \Rightarrow$ il modo naturale sarà divergente, ovvero tenderà ad infinito, al crescere di t , lungo la retta che contiene l'autovalore.
 - $\lambda_i < 0 \Rightarrow$ il modo naturale sarà convergente, ovvero al crescere di t , tenderà all'origine dello spazio di stato.
 - $\lambda_i = 0 \Rightarrow$ il modo naturale sarà costante, la corrispondente traiettoria nello spazio di stato si ridurrà al solo punto $x(0)$.
- Quali modi naturali possono essere associati a un autovalore complesso?
- Che cos'è un sottospazio invariante per il sistema?
Il sottospazio invariante è quel sottospazio nel quale si origina e resta confinata la traiettoria dell'evoluzione libera. Infatti, se lo stato iniziale $x(0)$ si trova in questo sottospazio, allora l'intera traiettoria che ne nasce, cioè l'evoluzione libera, vi resta confinata per sempre per ogni t .
- Come si calcola l'evoluzione libera?
L'evoluzione libera $x_l(t)$ è la soluzione del sistema corrispondente al caso in cui la variabile indipendente $u(t)$ sia identicamente nulla. Quindi dovrà essere:
 $x_l(t)' = A x_l(t)$
per un assegnato stato iniziale $x_l(0) = x_0$. Pertanto, trovare l'evoluzione libera $x_l(t)$ significa trovare le soluzioni di $x_l(t)' = A x_l(t)$ tale che $x_l(0) = x_0$.
- Qual è la traiettoria nello spazio di stato dell'evoluzione libera quando lo stato iniziale è proporzionale a un autovettore relativo a un autovalore reale negativo?
La traiettoria nello spazio di stato quando lo stato iniziale è proporzionale a un autovettore relativo ad un autovalore $\lambda_i < 0$ tenderà a convergere verso l'origine dello spazio di stato.
- Qual è la traiettoria nello spazio di stato dell'evoluzione libera quando lo stato iniziale è proporzionale a un autovettore relativo a un autovalore reale positivo?
La traiettoria nello spazio di stato quando lo stato iniziale è proporzionale a un autovettore relativo ad un autovalore $\lambda_i > 0$ tenderà a divergere verso infinito al crescere di t .
- Come si calcola la risposta forzata nel caso di andamenti costanti delle variabili indipendenti?
Vedi pg.162

CAPITOLO 6 (tempo discreto)

- Cosa esprime il principio di sovrapposizione degli effetti?

Un sistema lineare invariante a tempo discreto è un sistema di equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti che può essere scritto in forma matriciale nel modo seguente: $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$.

La linearità di un sistema ha conseguenze importanti nell'analisi delle proprietà delle soluzioni. Analogamente al caso a tempo continuo la più importante è nota come principio di sovrapposizione degli effetti e consiste nel fatto che l'effetto combinato di più cause è pari alla somma degli effetti prodotti dalle singole cause, considerando "cause" sia gli andamenti delle variabili indipendenti sia le condizioni iniziali, ed "effetti" gli andamenti risultanti delle variabili di stato.

- Come è definita l'evoluzione libera?

Dato un sistema lineare invariante a tempo discreto descritto da $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ si chiama evoluzione libera $x_l(k)$ la soluzione corrispondente al caso in cui la variabile indipendente sia identicamente nulla e lo stato iniziale $x(0)$ sia quello assegnato x_0 .

- Come è definita la risposta forzata?

Dato un sistema lineare invariante a tempo discreto descritto da $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ si chiama risposta forzata $x_f(k)$ la soluzione del sistema corrispondente al caso in cui lo stato iniziale sia nullo e la variabile indipendente abbia l'andamento assegnato.

- Quali modi naturali possono essere associati a un autovalore reale positivo?

$(\lambda_i^k) \cdot v_i$ è il modo naturale associato ad un autovalore reale. Nel caso di autovalori reali positivi il grafico si svilupperà con dei punti $x(0), x(1), x(2), \dots$ appartenenti alla parte di retta contenuta nel primo quadrante.

- Quali modi naturali possono essere associati a un autovalore reale negativo?

$(\lambda_i^k) \cdot v_i$ è il modo naturale associato ad un autovalore reale. Nel caso di autovalori reali negativi il grafico si svilupperà con dei punti $x(0), x(1), x(2), \dots$ appartenenti alla retta passante per il primo e terzo quadrante.

- Quali modi naturali possono essere associati a un autovalore complesso?

- Come si calcola l'evoluzione libera?

L'evoluzione libera è la soluzione del sistema corrispondente al caso in cui la variabile indipendente sia identicamente nulla. In questo caso dovrà essere:

$$x_l(k+1) = A x_l(k), \text{ per } k = 0, 1, \dots$$

per un assegnato stato iniziale $x_l(0) = x_0$. Trovare l'evoluzione libera $x_l(k)$ significa trovare la soluzione di $x_l(k+1) = A x_l(k)$ tale che $x_l(0) = x_0$.

- Qual è la traiettoria nello spazio di stato dell'evoluzione libera quando lo stato iniziale è proporzionale a un autovettore relativo a un autovalore reale negativo? Se $|\lambda_i| < 1$ il modo naturale sarà convergente, cioè la traiettoria nello spazio di stato tenderà all'origine.
- Qual è la traiettoria nello spazio di stato dell'evoluzione libera quando lo stato iniziale è proporzionale a un autovettore relativo a un autovalore reale positivo? Se $|\lambda_i| > 1$ il modo naturale sarà divergente, cioè la traiettoria al crescere di k tenderà ad infinito.
- Come si calcola la risposta forzata nel caso di andamenti costanti delle variabili indipendenti?
La risposta forzata per $k \geq 1$, cioè
$$x_f(k) = \text{somm. per } h=0 \text{ a } k-1 \text{ di } [(A^{(k-h-1)}) * Bu(h)]$$
nel caso in cui la variabile assuma valori costanti $u(k)=u$ allora si scrive:
$$x_f(k) = (\text{somm. per } h=0 \text{ a } k-1 \text{ di } A^{(k-h-1)}) * Bu$$
E poiché
$$\text{somm. per } h=0 \text{ a } k-1 \text{ di } A^{(k-h-1)} = \text{somm. per } \xi=0 \text{ a } k-1 \text{ di } A^\xi$$
allora avremo che per $k \geq 1$
$$x_f(k) = (\text{somm. per } \xi=0 \text{ a } k-1 \text{ di } (A^{(\xi)}) * B) * u$$
nel caso in cui la matrice A non abbia autovalori pari ad 1 allora è possibile calcolare in forma esplicita la sommatoria nel modo seguente:
$$x_f(k) = [(I-A)^{-1}] * (I-A^k) * Bu.$$
In generale il calcolo della sommatoria è semplice se si considera che il termine all'interno della sommatoria $A^{(\xi)}$ coincide con la risposta libera che si avrebbe a partire dallo stato iniziale $x_0=B$

CAPITOLO 7

- Come è definito uno stato di equilibrio e qual è il suo significato?
Dato un sistema a tempo continuo o a tempo discreto, uno stato x_e si dice stato di equilibrio se l'evoluzione libera a partire dallo stato iniziale x_e è costante e pari a x_e , cioè $x_l(t) = x_e$ per ogni $t \geq 0$ o con k per ogni $k \geq 0$.
In generale un equilibrio è un particolare stato del sistema che in assenza di perturbazioni si mantiene costante con il passare del tempo.
Un sistema meccanico all'equilibrio è quindi immobile e di conseguenza tutte le variabili o grandezze che lo definiscono restano costanti nel tempo.
- Come è definita una coppia di equilibrio?
Nel caso in cui siano presenti anche variabili indipendenti ed esse assumano andamenti costanti nel tempo è possibile definire una coppia di equilibrio.
Dato un sistema a tempo continuo o discreto, una coppia $[x_e, u_e]$ viene detta coppia di equilibrio per il sistema se l'andamento delle variabili di stato a fronte di un andamento costante pari a u_e della variabile indipendente e di uno stato iniziale x_e è costante e pari a x_e , cioè $x(t) = x_e$ per ogni $t \geq 0$ o $k \geq 0$.
Per i sistemi in cui siano definite le variabili indipendenti, una coppia di equilibrio corrisponde a $[x_e, 0]$

- Come si calcolano gli stati e le coppie di equilibrio per un sistema a tempo continuo?

Nei sistemi a tempo continuo affinché l'evoluzione libera sia costante è necessario che la derivata dello stato sia nulla in ogni istante di tempo e quindi gli stati di equilibrio sono le soluzioni del sistema $x_e' = Ax_e = 0$.

Pertanto, tutti gli stati di equilibrio fanno parte del nucleo (o ker) della matrice A: x_e appartiene a $\ker A$.

Per le coppie di equilibrio, dalla def. di coppie di equilibrio deriva che l'evoluzione a partire da uno stato d'equilibrio rimane costante e pari allo stato d'equilibrio stesso a fronte di un valore costante della variabile indipendente pari a u_e . Affinchè l'evoluzione sia costante è necessario che la derivata dello stato sia nulla in ogni istante di tempo quindi le coppie di equilibrio sono proprio i valori di $[x_e, u_e]$ che annullano la derivata prima della soluzione:

$$x_e' = Ax_e + Bu_e = 0$$

- Come si calcolano gli stati e le coppie di equilibrio per un sistema a tempo discreto?

Per un sistema a tempo discreto la condizione di equilibrio è invece:

$x(k+1) = x(k) = x_e$ per ogni k . Cioè $x_e = Ax_e$. Pertanto, tutti gli stati di equilibrio fanno parte del nucleo della matrice $I - A \Rightarrow x_e$ appartiene a $\ker(I - A)$.

Per i sistemi a tempo discreto l'evoluzione a partire da uno stato di equilibrio rimane costante e pari allo stato di equilibrio stesso a fronte di un valore costante della variabile indipendente pari a u_e . La condizione di equilibrio per le coppie di equilibrio è quindi:

$$x_e = Ax_e + Bu_e$$

- Quand'è che uno stato di equilibrio è asintoticamente stabile, instabile o marginalmente stabile?

Uno stato di equilibrio si dice asintoticamente stabile se l'evoluzione libera a partire da un qualsiasi stato iniziale x_0 tende ad x_e sul lungo periodo, ovvero

$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_e$ per ogni x_0

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_1(k) = x_e$ per ogni x_0

Uno stato si dice asintoticamente instabile se esiste almeno uno stato iniziale a partire dal quale l'evoluzione libera si allontana indefinitamente dallo stato di equilibrio:

esiste x_0 tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t)| = \infty$

esiste x_0 tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_1(k)| = \infty$

Uno stato si dice marginalmente stabile se non è né asintoticamente stabile né instabile.

- È possibile estendere la definizione di asintotica stabilità, instabilità e stabilità marginale alle coppie di equilibrio?

Si la definizione di asintotica stabilità, instabilità e stabilità marginale si estende alle coppie di equilibrio semplicemente sostituendo ad $x_1(t)$ $x(t)$.

- Quale proprietà lega il tipo di stabilità dell'origine a quello degli altri eventuali stati di equilibrio del sistema?
Un sistema lineare si dice asintoticamente stabile, instabile o marginalmente stabile se l'origine dello spazio di stato è uno stato di equilibrio rispettivamente asintoticamente stabile, instabile o marginalmente stabile.
- Quali sono i criteri di stabilità per i sistemi a tempo continuo?
Un sistema lineare a tempo continuo è:
 - Asintoticamente stabile se e solo se $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ per ogni autovalore λ_i della matrice A ;
 - Instabile se e solo se esiste almeno un autovalore λ_i della matrice A tale che $\text{Re}(\lambda_i) > 0$;
 - Marginalmente stabile se e solo se $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ per ogni autovalore λ_i della matrice A ed esiste almeno un autovalore λ_i tale che $\text{Re}(\lambda_i) = 0$.
- Quali sono i criteri di stabilità per i sistemi a tempo discreto?
Un sistema lineare a tempo discreto è:
 - Asintoticamente stabile se e solo se $|\lambda_i| < 1$ per ogni autovalore λ_i della matrice A ;
 - Instabile se e solo se esiste almeno un autovalore λ_i della matrice A tale che $|\lambda_i| > 1$;
 - Marginalmente stabile se e solo se $|\lambda_i| \leq 1$ per ogni autovalore λ_i della matrice A ed esiste almeno un autovalore λ_i tale che $|\lambda_i| = 1$.
- Qual è il criterio di stabilità per i modelli di trasferimento?
Un modello di trasferimento in cui non sia presente generazione di risorsa è asintoticamente stabile se e solo se ciascun nodo del grafo di trasferimento o ha una perdita o è collegato mediante un cammino orientato a un nodo che ha una perdita. In caso contrario il modello di trasferimento è marginalmente stabile.
- È possibile caratterizzare il comportamento sul lungo periodo di sistemi asintoticamente stabili?
Il comportamento sul lungo periodo dell'evoluzione libera del sistema o della risposta forzata in presenza di variabili indipendenti costanti nel caso di sistemi asintoticamente stabili può essere caratterizzato in maniera molto semplice.
A fronte di un valore costante u_e della variabile indipendente lo stato $x(t)$ o $x(k)$, sul lungo periodo, tenderà al valore x_e corrispondente alla coppia di equilibrio $[x_e, u_e]$ indipendentemente dallo stato iniziale del sistema.
- Sotto quali ipotesi è possibile caratterizzare il comportamento sul lungo periodo di sistemi marginalmente stabili?
Nel caso in cui il sistema è marginalmente stabile il comportamento sul lungo periodo dipenderà in generale dalle condizioni iniziali. La marginale stabilità implica la presenza di un sottospazio di stati di equilibrio di dimensione non nulla. Tuttavia, in molti casi pratici possono essere presenti dei vincoli, in queste

situazioni nonostante il sistema sia marginalmente stabile, l'evoluzione libera o la risposta forzata per variabili indipendenti costanti può tendere comunque sul lungo periodo ad un unico stato di equilibrio che soddisfi i vincoli indipendentemente dalle condizioni iniziali.

- È possibile caratterizzare il comportamento sul lungo periodo di sistemi instabili? Studiamo il comportamento sul lungo periodo di sistemi instabili. L'evoluzione libera del sistema oppure la risposta forzata in presenza di variabili indipendenti costanti, diverge, cioè tende ad infinito. In molti casi però può divergere seguendo una direzione ben precisa e cioè tende ad infinito allineandosi con una retta. È importante notare che nel caso in cui l'andamento sul lungo periodo segua una retta, allora lo stato del sistema tende all'infinito mantenendo costanti i rapporti $x_i(k)/N(k)$ tra le sue componenti e la popolazione totale.

CAPITOLO 8

le variabili indipendenti possono essere classificate come variabili di controllo, se l'andamento può essere scelto liberamente, oppure variabili di disturbo, in caso contrario. I controlli verranno indicati con la lettera u , mentre i disturbi con la lettera d . in un modello possono essere presenti sia controlli che disturbi.

I controlli sono utilizzati per cercare di modificare l'andamento delle variabili di stato al fine di raggiungere prefissati obiettivi anche con la presenza di disturbi.

- Come è definito l'indice di prestazione di un sistema?
Gli indici di prestazione sono una o più variabili aggregate, indicate con $y(k)$ che rappresentano quelle grandezze il cui andamento nel tempo è di particolare interesse nella gestione del fenomeno considerato.
Inizialmente assumiamo che gli indici di prestazione siano combinazione lineare del solo stato esprimibili in forma: $y(k) = Cx(k)$ dove C è una matrice $R_{q \times n}$ e q è il numero degli indici considerati nel modello.
Talvolta l'indice di prestazione può dipendere non solo dalle variabili di stato ma anche dalle variabili di controllo, quindi in generale assumeremo che gli indici di prestazione siano delle combinazioni lineari delle variabili di stato e di controllo esprimibili nella forma: $y(k) = Cx(k) + Du(k)$, dove C è una matrice $R_{q \times n}$ e D una matrice $R_{q \times p}$ dove q è il numero degli indici e p il numero di controlli considerati nel modello.
- Che cosa distingue il controllo dagli indici di prestazione?
La variabile di controllo è solitamente utilizzata per modificare in modo prefissato l'andamento degli indici di prestazione.
- Che cos'è una funzione di trasferimento?
La funzione di trasferimento del sistema
$$W(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]$$

La funzione di trasferimento è una matrice $q \times p$ i cui elementi sono funzioni razionali proprie della variabile z . essa permette di calcolare la risposta forzata dagli indici di prestazione associati al sistema, nel dominio di z , nota $U(z)$.

La funzione di trasferimento può essere anche interpretata come la trasformata z della risposta forzata dell'indice di prestazione a un particolare controllo $u(k)$ e cioè a quello per cui $U(z)=1$. Tale controllo prende il nome di impulso discreto ed è pari a $u(k)=1$ per $k=0$, $u(k)=0$ per $k>0$

E la corrispondente risposta forzata dell'indice di prestazione prende il nome di risposta impulsiva $w(k)$. Si ha che $w(k)=D$ per $k=0$, $w(k)=C(A^{(k-1)})B$ per $k>0$.

- Come si calcola la funzione di trasferimento a partire dalla risposta impulsiva?
La funzione di trasferimento a partire dalla risposta impulsiva $w(k)$ sarà uguale a $W(z)=Z[w(k)]$ con $w(k)=D$ per $k=0$, $w(k)=C(A^{(k-1)})B$ per $k>0$.
- Come si calcola la funzione di trasferimento della connessione serie?
La funzione di trasferimento della connessione in serie sarà $W(z)=W_1(z)W_2(z)$
La funzione di trasferimento tra disturbo e prestazione è $W_d(z) = (C(zI - A)^{-1} B_d + D_d)$
- Cos'è lo schema di controllo a controreazione e perché si usa?
Il controllo a controreazione tiene conto del valore degli indici di prestazione. Invece di determinare l'intera sequenza di controllo a priori è possibile scegliere ad ogni istante il valore del controllo $u(k)$ sulla base dello scostamento che gli indici di prestazione hanno rispetto agli obiettivi da raggiungere. L'idea, quindi, consiste nello scegliere il valore corrente del controllo sulla base dell'effetto ottenuto sulle prestazioni con le decisioni precedenti. L'azione di controllo avviene in reazione allo scostamento delle prestazioni dagli obiettivi.
Il controllo a controreazione è utilizzato in applicazioni di ogni tipo, la ragione di questo è la capacità di assicurare gli obiettivi prefissati in presenza di disturbi non noti e quando il modello utilizzato per il calcolo della legge di controllo si discosti dal fenomeno che si vuole controllare. La controreazione permette di progettare sistemi di controllo robusti, cioè basati su modelli del fenomeno molto semplificati e insensibili a disturbi di varia natura.
Applicazioni elettriche e meccaniche e economico-gestionali.
- Come si caratterizza la fedeltà di risposta di un sistema di controllo?
La qualità di una legge di controllo viene valutata sulla base di come il sistema complessivo risponde all'azione del controllo e viene detta fedeltà di risposta. Essa consiste nella capacità di un sistema di controllo di fare in modo che gli indici di prestazione del sistema a ciclo chiuso tendano a seguire un obiettivo prefissato. Tale proprietà viene analizzata guardando due caratteristiche dell'andamento dell'errore: la prima è l'errore sul lungo periodo che misura lo scostamento sul lungo periodo tra l'indice di prestazione associato al sistema e l'obiettivo desiderato; la seconda è l'errore transitorio che indica invece la modalità con cui l'indice di prestazione tende all'obiettivo.
La fedeltà di risposta di un sistema è la precisione con cui il sistema di controllo è in grado di far seguire all'indice $y(k)$ l'andamento obiettivo $y^*(k)$. Viene caratterizzata in base all'errore sul lungo periodo e alla velocità di convergenza a zero dell'errore transitorio.

- Che cos'è un sistema di tipo h?

Per un sistema a controreazione come quello con schema a blocchi del controllo a ciclo chiuso la fedeltà di risposta sul lungo periodo viene valutata in base all'errore che il sistema produce quando l'obiettivo $y^*(k)$ abbia un andamento polinomiale in k di ordine 0, 1 e 2.

1. Un gradino unitario (ordine 0),

$$y^*(k)=0 \text{ per } k<0 \text{ e } y^*(k)=1 \text{ per } k \geq 0 \quad Y^*(z)=z/(z-1)$$

obiettivo costante e pari ad 1

2. Una rampa unitaria (ordine 1)

$$y^*(k)=0 \text{ per } k<0 \text{ e } y^*(k)=k \text{ per } k \geq 0 \quad Y^*(z)=z/[(z-1)^2]$$

obiettivo con un incremento costante pari ad 1 a ogni passo

3. Una parabola unitaria (ordine 2)

$$y^*(k)=0 \text{ per } k<0 \text{ e } y^*(k)=[k(k-1)]/2 \text{ per } k \geq 0 \quad Y^*(z)=z/[(z-1)^3]$$

obiettivo con accelerazione costante e pari ad 1

Un sistema si dice di ordine h se l'errore sul lungo periodo in corrispondenza a un andamento polinomiale di ordine h per la variabile obiettivo è uguale ad una costante diversa da zero.

Si ha che un sistema a ciclo chiuso di tipo h commette errore nullo sul lungo periodo a ogni obiettivo polinomiale di ordine minore di h , un errore costante e diverso da zero per un obiettivo polinomiale di ordine h e una sequenza di errore divergente per ogni obiettivo polinomiale di ordine maggiore di h .

- Quale caratteristica contraddistingue un sistema a tempo finito di risposta?

Un sistema con funzione di trasferimento $W(z)$ ha tempo di risposta finito se e solo se la sua funzione di trasferimento ha tutti i poli coincidenti in $z=0$

- Come si caratterizza la sensibilità di un sistema a controllo ai disturbi?

Fra i disturbi più frequenti ci sono: i disturbi di misura, dovuti alle eventuali incertezze con le quali si acquisiscono i valori degli indici di prestazione e agiscono quindi sugli indici stessi; i disturbi di attuazione, quei disturbi che agiscono sulle variabili di controllo; i disturbi interni, quelli che agiscono sulle variabili di stato e quindi all'interno del processo.

Di solito si assume che il disturbo $d(k)$ sia una costante di cui però non si conosce l'ampiezza o si assume che sia una sequenza aleatoria di cui non si conoscono però le caratteristiche statistiche. Grazie al principio di sovrapposizione degli effetti è possibile valutare l'influenza dei disturbi sul comportamento del sistema.

Caso di disturbi di misura: $Wd(z)=1/(1+F(z))$ e $y_0=1/(1+\lim_{z \rightarrow 1} F(z))$

Caso di disturbi di attuazione: $Wd(z)=P(z)/(1+P(z)G(z))$ e $y_0=\lim_{z \rightarrow 1} Wd(z)$

Caso di disturbi interni $Wd(z)=P_2(z)/(1+P(z)G(z))$

- Come si valuta la sensibilità di un sistema alle variazioni parametriche?

Vedere pg. 283

CAPITOLO 9

- Cosa si intende per controllori standard?
Per controllori standard si intendono quei controllori a controreazione che hanno una struttura prefissata dipendente da alcuni parametri.
- Che cos'è un controllo proporzionale?
Sistema di controllo a controreazione in cui la funzione di trasferimento $G(z)$ sia una costante ovvero $G(z)=c_p e(k)$ in cui l'azione di controllo è proporzionale all'errore per questo tale legge prende il nome di controllo proporzionale e il controllore è un sistema statico, in quanto la legge che lo definisce è una relazione algebrica fra $e(k)$ e $u(k)$.
L'azione di controllo sarà tanto più grande quanto più l'errore corrente è grande. Il principale vantaggio di questo approccio è quello di fare ridurre l'errore e_0 sul lungo periodo per riferimenti a gradino.
- Quali limitazioni impone il controllo proporzionale nel soddisfacimento delle specifiche dei sistemi di controllo?
La scelta del valore di c_p deve essere limitata ai valori tali per cui le radici del denominatore di $W(z)$ sono interne al cerchio. (vedi pag. 289)
- Come si caratterizza un controllo proporzionale-integrale?
Il controllore è descritto dalla seguente legge:
 $u(k) = c_p e(k) + c_i \sum_{h=0}^k e(h)$
in cui oltre al termine proporzionale all'errore è presente un termine di tipo integrale, e cioè proporzionale alla somma degli errori fino al passo corrente. Questa legge prende il nome di controllo proporzionale-integrale che assicura un errore di lungo periodo nullo in risposta a un gradino unitario in quanto l'azione di controllo cresce fino a un valore costante, finché l'errore non si annulla.
- Qual è il ruolo della parte proporzionale e della parte integrale del controllore PI?
- Quali limitazioni impone il controllo proporzionale-integrale nel soddisfacimento delle specifiche dei sistemi di controllo?
L'implementazione di un controllore PI prevede la memorizzazione di tutti i valori a partire dall'istante iniziale e questo ovviamente non è possibile. Si può però implementare la legge di controllo utilizzando un'equazione ricorsiva equivalente:
 $u(k+1) - u(k) = c_p e(k+1) - c_p e(k) + c_i e(k+1)$