FONDAMENTI DI AUTOMATICA - Ingegneria Elettronica **Prof.ssa Mara Tanelli**
Prima prova in itinere del 27 aprile 2012

1. Si consideri il sistema dinamico non lineare con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalla seguente equazione differenziale

$$\ddot{y} + \dot{y} - \sqrt{y}\dot{y} - 2y(t)u^2(t) + 2 = 0.$$

1.1 Determinare una rappresentazione del sistema in forma di stato.

Ponendo $\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases}$ si ottiene $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + \sqrt{x_1}x_2 + 2x_1\bar{u}^2 - 2 \\ y = x_1 \end{cases}$

1.2 Determinare stato e uscita di equilibrio associati all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$, $t \geq 0$ e scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio determinato.

Annullando le derivate, si ha $\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ 2\bar{x}_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \bar{x}_1 = 1 \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{y} = 0 \end{cases}}$

Sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = \delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = \left.\left(\frac{\bar{x}_2}{2\sqrt{\bar{x}_1}} + 2\bar{u}^2\right)\right|_{ep} \delta x_1 + \left(\sqrt{\bar{x}_1} - 1\right)\delta x_2 + 4\bar{x}_1\big|_{ep}\,\bar{u}\,\delta u \\ \delta y = \delta x_1 \end{cases}$$

In $(1,0)$ si ha

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = \delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = 2\,\delta x_1 + 4\,\delta u \\ \delta y = \delta x_1 \end{cases}$$

1.3 Studiare la stabilità del sistema linearizzato e dire se, a partire da esso, sia possibile valutare la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0 \quad \Updownarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{2}$$

$\exists i : Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow$ SISTEMA LINEARIZZATO INSTABILE

$\Downarrow \quad \Rightarrow$ MOVIMENTO di EQ. del sistema NL INSTABILE

2. Si consideri il sistema dinamico lineare e tempo invariante con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = \alpha x_1 - x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_1(t),$$

con α parametro reale.

2.1 Studiare le proprietà di stabilità del sistema in funzione di α.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \lambda_i(A) = \{\alpha, -1\}$$

- $\alpha < 0$: $Re(\lambda_i) < 0, \forall i \Leftrightarrow$ sistema AS. STABILE
- $\alpha > 0$: $\exists i : Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow$ " INSTABILE
- $\alpha = 0$: $Re(\lambda_i) \leq 0$ e $\exists i : Re(\lambda_i) = 0$ con λ_i AUTOV. SEMPLICE $\Rightarrow$ SISTEMA SEMPL. STABILE

2.2 Posto $\alpha = -5$, determinare il movimento di stato e uscita associato all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 2$, $t \geq 0$ e alle condizioni iniziali $x(0) = [1, \ 2]^T$.

II^a eq. $\quad \dot{x}_2 = -x_2 + u, \quad x_2(0) = 2, \quad \bar{u} = 2$

Si noti che, dall'equazione di stato, si ottiene che, all'equilibrio, $\bar{x}_2 = \bar{u}$ e quindi $x_2(0) = \bar{x}_2 \Rightarrow \boxed{x_2(t) = \bar{x}_2 = 2, \forall t;}$

I^a eq $\quad \dot{x}_1 = -5x_1 - x_2 + u, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(t) = 2, \quad u(t) = \bar{u} = 2$

$\Downarrow$

$\dot{x}_1 = -5x_1, \quad x_1(0) = 1$

$$\boxed{x_1(t) \underset{t \geq 0}{=} e^{-5t} x_1(0)} \qquad \boxed{y(t) = x_1(t) = e^{-5t}, \ t \geq 0}$$

2.3 Sempre con $\alpha = -5$ determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema e dire, motivando la risposta, se è possibile valutare le proprietà di stabilità del sistema dall'analisi della sola $G(s)$.

Applico la trasf. di Laplace alle eq. di stato: $(s+5)X_1(s) = -X_2(s) + U(s)$

$(s+1)X_2(s) = U(s)$

Da cui: $(s+5)X_1(s) = -\frac{U(s)}{s+1} + U(s) = \frac{s}{s+1}U(s)$

$$Y(s) = X_1(s) = \underbrace{\frac{s}{(s+5)(s+1)}}_{G(s)} U(s)$$

G(s) ha 2 poli e il sistema è di ordine 2 ⇒ non ci sono cancellazioni e quindi è possibile studiare la stab. del sistema a partire dalla sola G(s)

2.4 Calcolare l'espressione analitica dell'uscita forzata $y(t)$ del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ calcolata al punto precedente a $u(t) = \text{sca}(t)$ e tracciarne il grafico qualitativo precisando il valore iniziale $(y(0))$ e finale (y_∞) ed il valore della derivata prima nell'origine $(\dot{y}(0))$.

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s+1}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+5B=1 \end{cases} \Updownarrow \begin{cases} A=-1/4 \\ B=1/4 \end{cases}$$

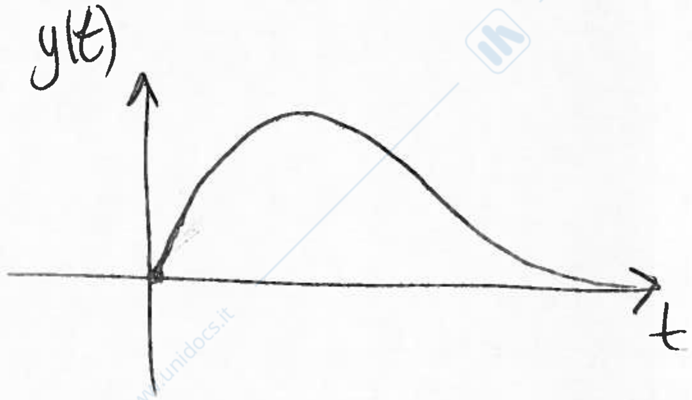
$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{4}e^{-5t} + \frac{1}{4}e^{-t}, \quad t \geq 0}$$

$$y(0) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

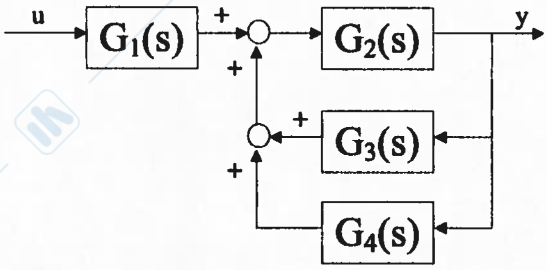
$$\dot{y}(0) = \left.\left(+\frac{5}{4}e^{-5t} - \frac{1}{4}e^{-t}\right)\right|_{t=0} = 1$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

Si noti che il sistema è AS. STABILE e di tipo $\rho = -1$ ⇒ la risposta a scalino tende a zero



3. Si consideri lo schema a blocchi in figura



con $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$ funzioni di trasferimento di sistemi dinamici lineari e tempo invarianti di ordine 1.

3.1 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ tra l'ingresso u e l'uscita y in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$ $G_3(s)$ e $G_4(s)$.

$$H(s) = G_1(s) \frac{G_2(s)}{1 - G_2(s)\left(G_3(s) + G_4(s)\right)} = G_1(s)\, G_a(s)$$

3.2 Posto $G_1(s) = \frac{1}{s+4}$, $G_2(s) = \frac{s+4}{s+5}$, $G_3(s) = \frac{2}{s+1}$ e $G_4(s) = -\frac{1}{s+1}$ calcolare $H(s)$ e studiare la stabilità del sistema complessivo.

$$G_2(s)\left[G_3(s) + G_4(s)\right] = \frac{s+4}{(s+3)(s+1)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+4} \frac{s+4/s+5}{1 - \frac{s+4}{(s+3)/(s+1)}} = \frac{1}{\cancel{s+4}} \frac{\cancel{s+4}}{s+5} \frac{(s+5)(s+1)}{(s+5)(s+1) - s - 4} = \boxed{\frac{s+1}{s^2+5s+1}}$$

<u>STABILITÀ</u>

- Σ ha ordine 4
- $H(s)$ ha due poli con parte reale <0 (il denom. è polinomio di II grado con coefficienti concordi e non nulli)
- 2 AUTOVALORI NASCOSTI:
  1) ~~...~~ Parallelo di G_3 e G_4 : $\lambda_1 = -1$
  2) Serie tra G_1 e G_a : $\lambda_2 = -4$

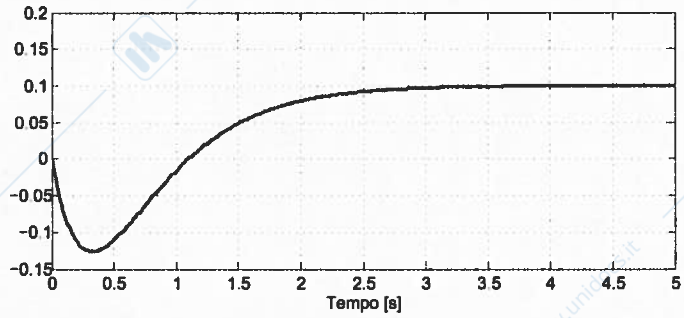
$$Re(\lambda_i(\Sigma)) < 0, \forall i \iff \text{SISTEMA AS. STABILE}$$

3.3 Cacolare il valore di regime dell'uscita forzata $y(t)$ del sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ all'ingresso $u(t) = 2\text{imp}(t) - 3\text{sca}(t) + 5e^{-3t}$, $t \geq 0$.

$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$ uso principio di sovrapposizione degli effetti

- $y_{\infty,1} = 0$: la risposta all'impulso è $\mathcal{L}^{-1}(H(s))$. Il sistema è AS. STABILE, quindi ho solo i contributi dei modi che $\to 0$
- $y_{\infty 2} = -3H(0) = -3$ Sistema AS. STABILE e di tipo zero, alimentato da uno scalino di ampiezza -3
- $y_{\infty,3} = 0$

4. In figura è mostrato il grafico dell'uscita forzata ad uno scalino unitario di un sistema lineare e tempo invariante a tempo continuo di ordine due senza autovalori nascosti.



4.1 Dire, motivando la risposta se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) Il sistema è asintoticamente stabile. VERO

La risposta tende ad un valore costante e non ci sono autovalori nascosti $\Rightarrow$ il sistema ha autovalori con parte reale negativa

b) La funzione di trasferimento del sistema è di tipo $g < 0$. FALSO

Se il sistema avesse tipo $g<0$ la risposta a scalino tenderebbe a zero

c) Il grado relativo del sistema è maggiore di zero. VERO

Si ha $y(0) = 0$ e la prima derivata $\neq 0$ nell'origine è quella ~~che~~ di ordine pari al grado relativo,

dunque il grado relativo è >0

d) La funzione di trasferimento del sistema ha uno zero a parte reale negativa. FALSO

Il grafico mostra una risposta inversa $\Rightarrow$ ho uno zero a parte reale positiva. Poiché non vi sono cancellazioni e il sistema è di ordine 2, avere $y(0)=0$ implica grado relativo >0 e quindi c'è solo uno zero

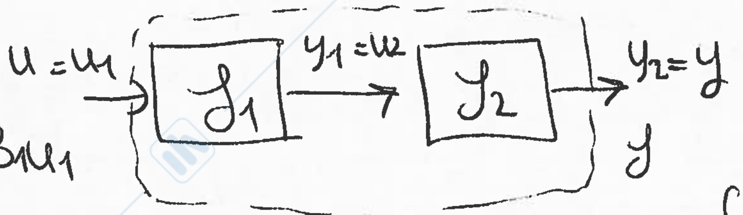
e) Il sistema ha guadagno unitario.

FALSO $\quad y_\infty = G(0) = 0{,}1 \neq 1$

f) La funzione di trasferimento del sistema ha poli complessi e coniugati. FALSO

La risposta a scalino non presenta oscillazioni

5. Si tracci lo schema a blocchi di due sistemi lineari e tempo invarianti strettamente propri interconnessi in serie. Si scrivano le equazioni di stato e di uscita del sistema interconnesso, mostrando che gli autovalori del sistema complessivo sono dati dall'unione degli autovalori dei singoli sistemi.



$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases}$$

Vincoli di interconnessione $\begin{cases} u = u_1 \\ y_1 = u_2 \\ y = y_2 \end{cases}$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y = C_2 x_2 \end{cases}$$

La matrice A del sistema interconnesso è $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}$

ed è triangolare a blocchi.

Gli autovalori di A sono pertanto dati da:

$$\lambda_i(A) = \lambda_i(A_1) \cup \lambda_i(A_2)$$

che è quanto si voleva mostrare