lunedì 6 aprile 2020 10:29

SISTEMI INTERCONNESSI

Proviamo FdT per sistemi con più ingressi

$\dot{x}_1 = x_1$

$\dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

x_{10} x_{20}

vettore

$$\dot{x} = Ax + b_1 u_1 + b_2 u_2$$

$$y = Cx + d_1 u_1 + d_2 u_2$$

u_1 e $u_2 \in \mathbb{R}$

VALE PR. di SOVR. degli effetti (sistema LTI)

Ip C.I. NULLE e calcoliamo FdT

$$Y(s) = \underbrace{\left[C(sI-A)^{-1} b_1 + d_1\right]}_{G_1(s)} U_1(s) + \underbrace{\left[C(sI-A)^{-1} b_2 + d_2\right]}_{G_2(s)} U_2(s)$$

FdT + PSE

$$Y(s) = \underline{G_1(s)\, U_1(s) + G_2(s)\, U_2(s)}$$

se avessi m ingressi

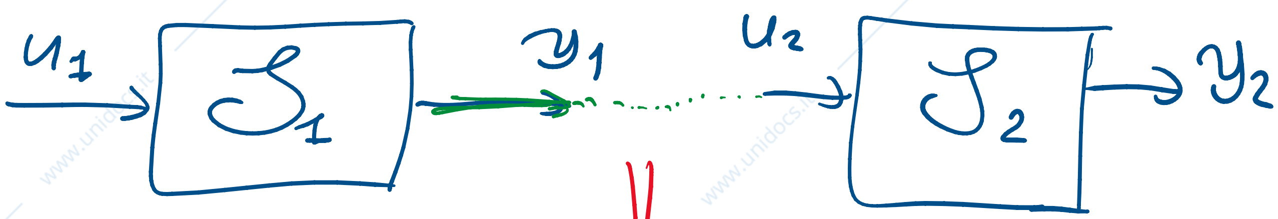
$$\underline{Y(s)} = \sum_{i=1}^{m} \underline{G_i(s)}\, \underline{U_i(s)}$$

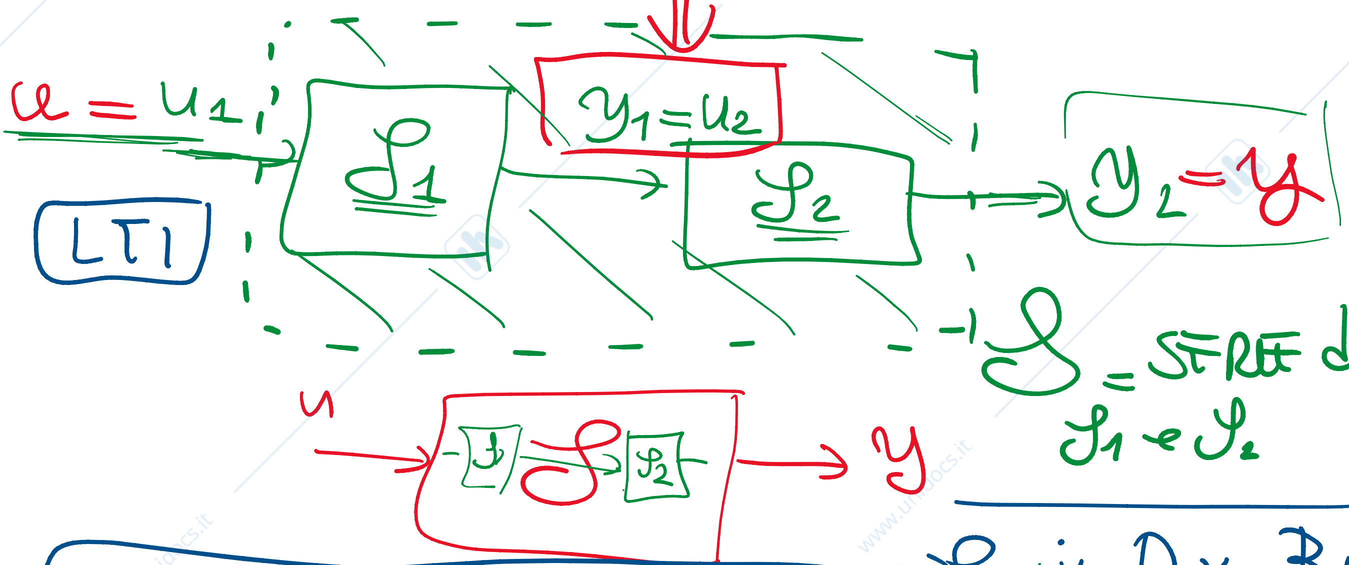
Noi consideriamo 3 modalità di interconnessione

1) SERIE

1. SERIE
2. PARALLELO
3. RETROAZIONE

CASO 1 Connessione in SERIE





$\mathcal{S}$ = SERIE di $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$

VINCOLI DI INTERCONNESSIONE

$$\begin{cases} u = u_1 \\ y_1 = u_2 \\ y = y_2 \end{cases}$$

$\mathcal{S}_1$: $\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 \underbrace{u_1}_{=u}$

ORD. n_1 $\quad y_1 = C_1 x_1 + \cancel{D_1 u_1}$

$\mathcal{S}_2$: $\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2$

ORD. n_2 $\quad y_2 = C_2 x_2 + \cancel{D_2 u_2}$

IPOTESI

$D_1 = D_2 = 0$

ORDINE $n_1 + n_2$

$\downarrow$

$\mathcal{S}$ $u \to y$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 y_1 \end{cases}$$

$y = C_2 x_2$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \quad y_1 \end{cases}$$

SISTEMA LTI ORDINE n_1+n_2

$$\mathcal{S}: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 \underbrace{C_1 x_1}_{y_1} = B_2 C_1 x_1 + A_2 x_2 \\ y = C_2 x_2 \end{cases} \qquad A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline B_2 C_1 & A_2 \end{array}\right]$$

Per analizzare la stabilità di $\mathcal{S}$ in funzione di quello di $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, valutiamo la matrice A del sist. interconnesso

A è triangolare a blocchi

$$(\square) \quad \boxed{\lambda_i(A) = \lambda_i(A_1) \cup \lambda_i(A_2)}$$

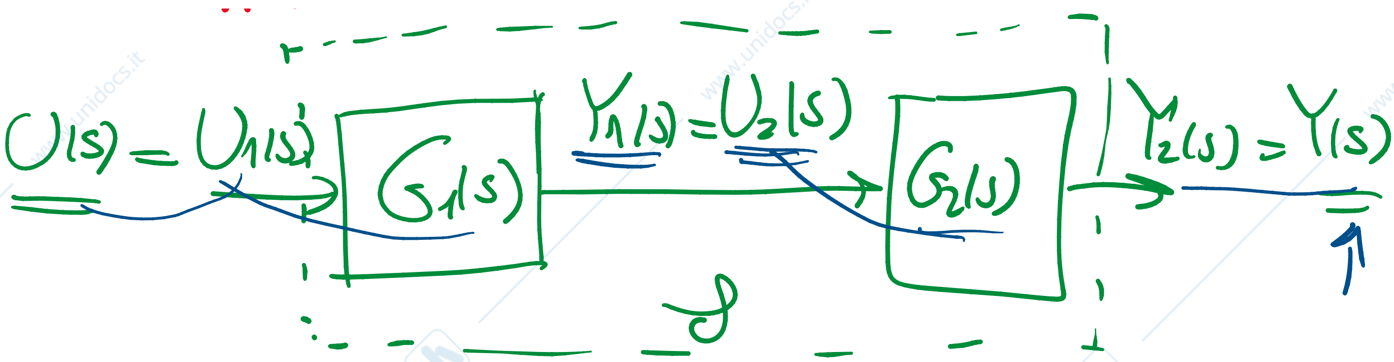
La connessione in SERIE NON modifica gli autovalori dei sistemi di partenza

$\mathcal{S}$ è AS. STABILE $\Longleftrightarrow$ lo sono sia $\mathcal{S}_1$ sia $\mathcal{S}_2$

La relazione $(\square)$ vale qualsiasi sia il numero dei sottosistemi interconnessi in serie.

$\mathcal{S}$ è AS.ST. $\Longleftrightarrow$ lo sono tutti i sottosistemi di partenza

LA CONNESSIONE IN SERIE NEL DOMINIO della TRASFORMATA



Calcolo della FdT G(s) del sistema interconnesso

$$\underline{Y(s)} = G(s)\,\underline{U(s)}$$

def. FdT

$$\underline{Y(s)} = Y_2(s) \stackrel{\downarrow}{=} G_2(s)U_2(s) = G_2(s)Y_1(s) = G_2(s)G_1(s)U_1(s) = \underbrace{G_2(s)G_1(s)}U(s)$$

SISTEMI SONO SISO

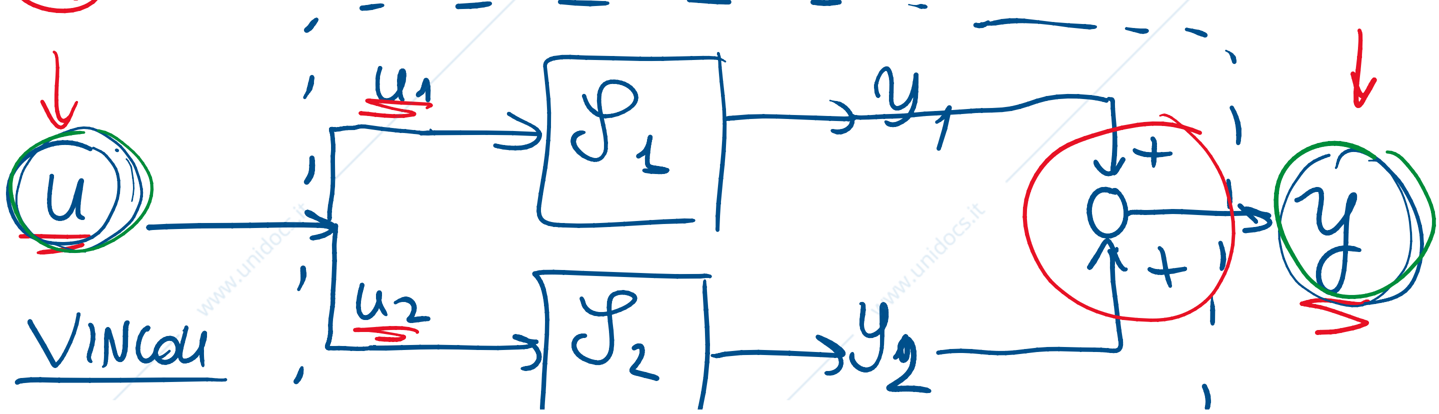
$$G(s) = G_2(s)\,G_1(s) \stackrel{*}{=} G_1(s)\,G_2(s)$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}\,\frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

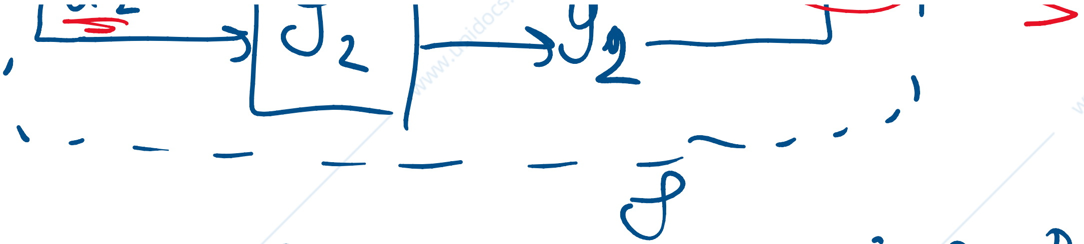
$$\{\text{poli di } G(s)\} \equiv \{\text{poli di } G_1(s)\} \cup \{\text{poli di } G_2(s)\}$$

SE NON CI SONO CANCELLAZIONI

② CONNESSIONE IN PARALLELO



VINCOLI



$$\begin{cases} \underline{\underline{u}} = u_1 = u_2 \\ \underline{\underline{y}} = y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\underset{n_1}{\mathcal{S}_1} \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 \underline{\underline{u_1}} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \qquad \underset{n_2}{\mathcal{S}_2} \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 \underline{\underline{u_2}} \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases}$$

$$\underset{n_1+n_2}{\mathcal{S}} \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

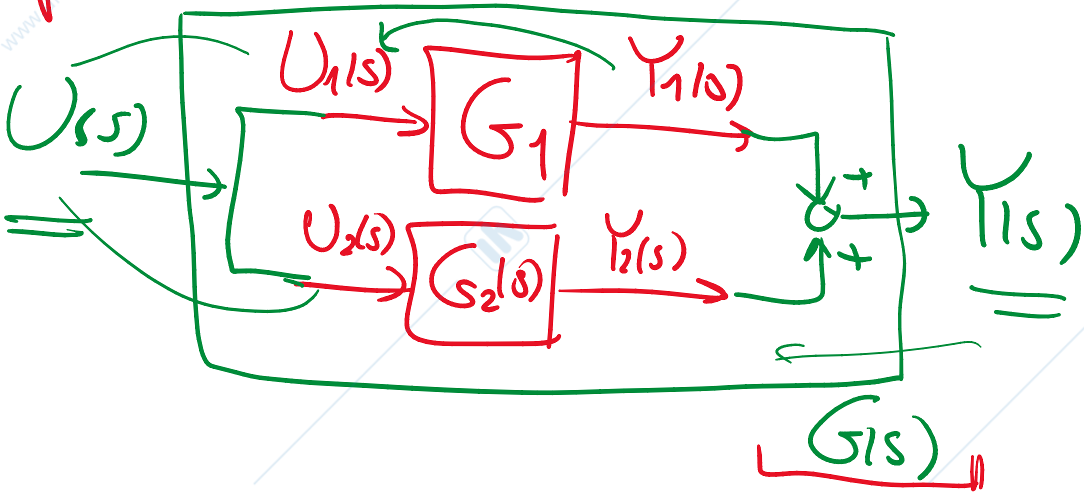
A è DIAGONALE A BLOCCHI

$$\underline{\{\lambda_i(\mathcal{S})\}} = \{\lambda_i \underline{\underline{(A_1)}}\} \cup \{\lambda_i \underline{\underline{(A_2)}}\}$$

$\mathcal{S}$ è AS. STABILE $\iff$ lo sono sia $\mathcal{S}_1$ sia $\mathcal{S}_2$

(lo sono TUTTI i sottosistemi interconnessi in parallelo)

Se passiamo alle FdT, si ha



$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s) U_1(s) + G_2(s) U_2(s) =$$
$$= (G_1(s) + G_2(s)) U(s)$$

$$\stackrel{!}{=} \underline{\left(G_1(s)+G_2(s)\right)} U(s)$$

Nella connessione in // la FdT complessiva è la somma delle FdT dei singoli sottosistemi

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

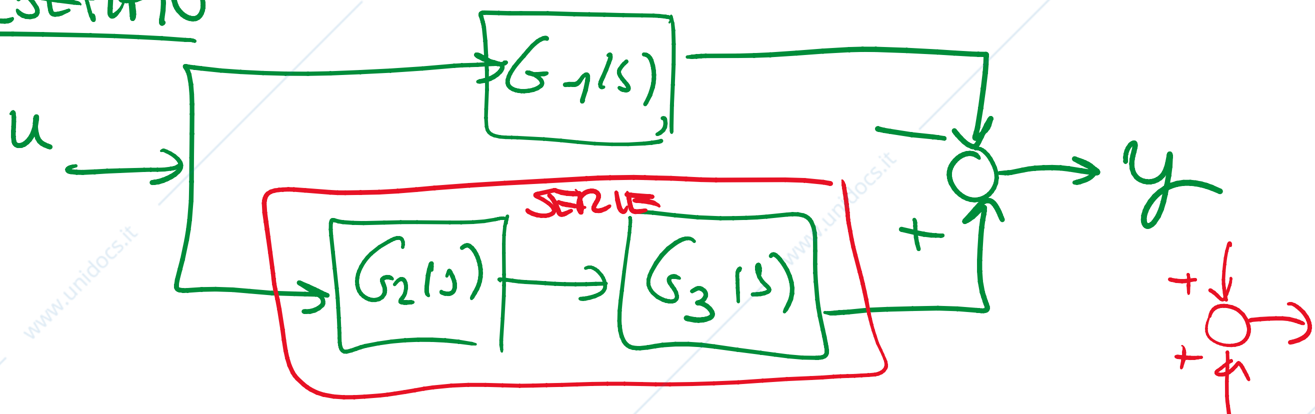
$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s)+N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

SERIE $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ $\quad \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}$

se no cancellazioni

$$\{\text{poli } G(s)\} = \{\text{poli } G_1\} \cup \{\text{poli } G_2\}$$

ESEMPIO



(1) Calc. G(s) in funzione di G_1, G_2 e G_3

✓ $$G(s) = -G_1(s) + G_2(s)G_3(s)$$

serie di G_2 e G_3 in // con $-G_1$

$$G(s) = -\frac{3}{s+1} + \frac{\cancel{s+2}}{s+1}\,\frac{1}{\cancel{s+2}} = -\frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+1} = -\frac{2}{s+1}$$

Date || $G_1(s) = \frac{3}{\dots}$ $\quad G_2(s) = \frac{s+2}{\dots}$ $\quad G_3(s) = \frac{1}{\dots}$ ||

Date $G_1(s) = \frac{3}{s+1}$ $G_2(s) = \frac{s+2}{s+1}$ $G_3(s) = \frac{1}{s+2}$

FdT di sistemi di ordine $n=1$

Calcolare $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema interconnesso

→ il polo di G_1, G_2 e G_3 ≡ con l'unico autovalore del sistema

→ ordine del sistema interconnesso

$n = n_1 + n_2 + n_3 = 1+1+1 = 3$

Dai calcoli ho $\boxed{G(s) = \frac{-2}{s+1}}$ FdT 1° ordine

↓

$\boxed{\text{polo} \Rightarrow s = -1}$

Poiché so che $n=3$

⇓

ho $3-1 = 2$ AUTOVALORI NASCOSTI

↳ $\lambda = -2$ (CANCELLAZ. ZERO/POLO nella serie)

$\lambda = -1$ (DEN. COMUNE nel $\parallel$)

$\lambda_i(\mathcal{S}) = \{-1, -2, -1\}$

$Re(\lambda_i(\mathcal{S})) < 0, \forall i \iff$ SISTEMA INTERCONN. è AS. STABILE

RISPOSTA ALTERNATIVA

RISPOSTA ALTERNATIVA

$G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$ sono FdT di sistemi AS. STABILI (hanno 1 polo Re = autovalore e polo Re < 0)

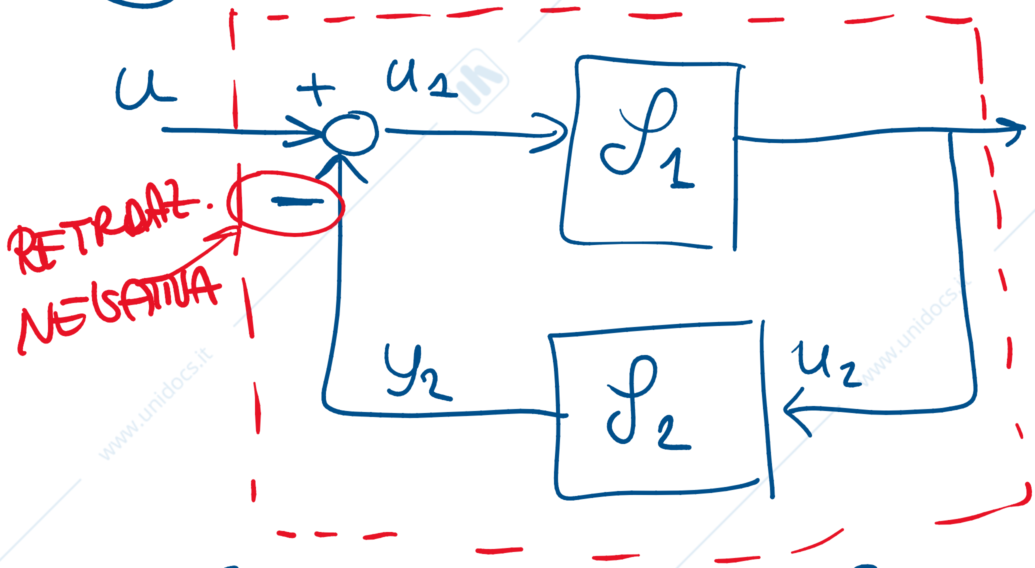
\+

CONNESSIONE SERIE e $\parallel$ (NON ALTERA le PROPR. di STABILITÀ)

$\Downarrow$

$\mathcal{S}$ è AS. STABILE

③ CONNESSIONE IN RETROAZIONE



VINCOLI

$$\mathcal{S}\begin{cases} u_1 = u - y_2 \\ y = y_1 = u_2 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_1:\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \qquad \mathcal{S}_2:\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}:\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1(u - y_2) = A_1 x_1 + B_1 u \\ \quad - B_1 y_2 = A_1 x_1 - B_1 C_2 x_2 + B_1 u \end{cases}$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 (C_1 x_1) = B_2 C_1 x_1 + A_2 x_2$$

$$y = C_1 x_1$$

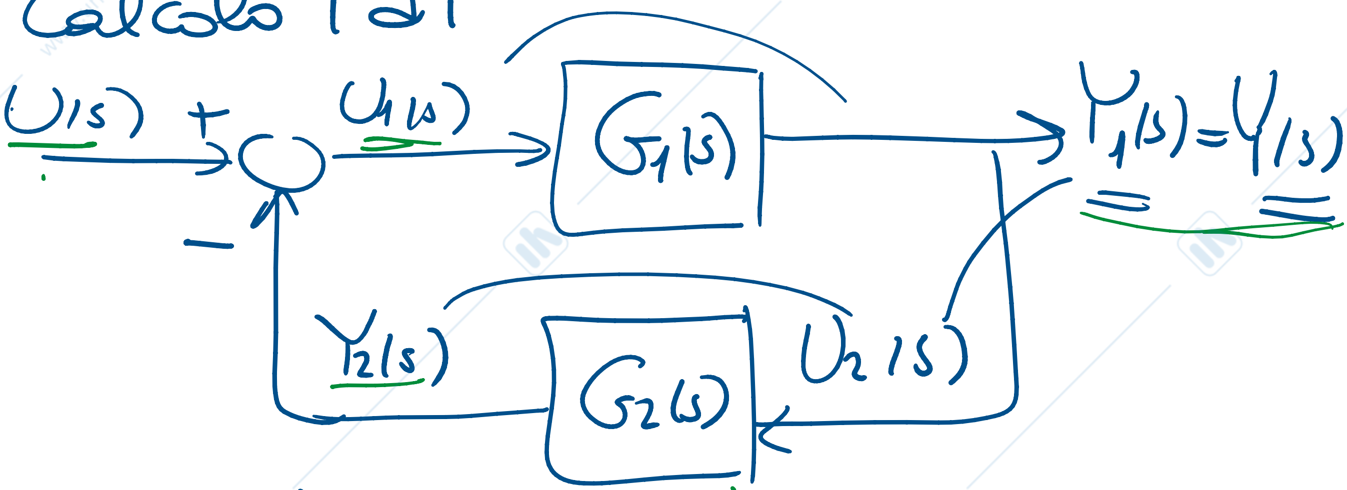
$$\mathcal{S}: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 - B_1 C_2 x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = B_2 C_1 x_1 + A_2 x_2 \\ y = C_1 x_1 \end{cases} \qquad A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & -B_1 C_2 \\ \hline B_2 C_1 & A_2 \end{array}\right]$$

$$\{\lambda_i (A(\mathcal{S}))\} \neq \{\lambda_i (A_1)\} \cup \{\lambda_i (A_2)\}$$

NON c'è un legame tra la STABILITÀ di $\mathcal{S}$ e quella dei sottosistemi che lo compongono

---

Calcolo FdT



$$Y(s) = Y_1(s) \overset{\text{FdT}}{=} G_1(s) U_1(s) \overset{\text{VINCOLO}}{=} G_1(s) \left[U(s) - Y_2(s) \right]$$

FdT

$$Y(s) = Y_1(s) = G_1(s)\,U_1(s) = G_1(s)\,[\ldots]$$

$$= G_1 U(s) - G_1 \overbrace{G_2(s)}^{\text{FdT}} U_2(s) =$$

UINGOLO

$$Y(s) = G_1 U(s) - G_1(s)\,G_2(s)\,Y(s)$$

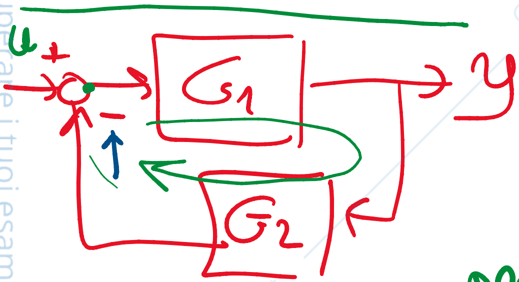
$$\left(1 + G_1(s)G_2(s)\right) Y(s) = G_1(s)\,U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \boxed{\frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)\,G_2(s)}} \quad (\Box)$$

RETROAZ. NEGATIVA

(se c'è una RETR. POSITIVA

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)\,G_2(s)}$$
)



FdT che trovo percorrendo il cammino diretto tra u e y

LINEA di ANDATA

$$= \frac{}{1 + \text{FdT d'anello}}$$

se retr. neg

FdT che trovo percorrendo l'anello di retroazione

retroazione

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{N_1/D_1}{1+\frac{N_1}{D_1}\frac{N_2}{D_2}}$$

Poli del sistema retroazionato ≡ "in anello chiuso"

Poli di $G(s)$ ≡ radici dell'equazione

$$\boxed{1 + \underbrace{\text{FdT d'anello}}_{L(s) = G_1(s)\, G_2(s)} = 0}$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA (RETR. NEGATIVA)

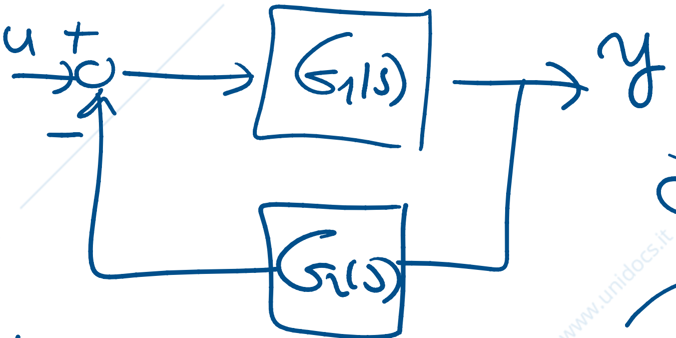
se retr. è positiva, diventa
$1 - L(s) = 0$

DIVENTA − se retr positiva

$$1 + L(s) = 0$$

$$\boxed{1 + \frac{N_L(s)}{D_L(s)} = 0 \iff D_L(s) + N_L(s) = 0}$$

ESEMPIO



$\int$ ordine
$1+0=1$

$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$

ORDINE 1

$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$ ORDINE 1

$G_2(s) = K, \quad K \in \mathbb{R}$ ORDINE 0 (SISTEMA ALGEBRICO)

$\boxed{G(s)} = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{1/s+1}{1+K\frac{1}{s+1}} =$

(1)

$= \frac{1/\cancel{s+1}}{\frac{(s+1)+K}{\cancel{s+1}}} = \boxed{\frac{1}{s+(1+K)}}$ (1)

FdT di ordine 1

NON è una cancellaz. zero/polo ma solo il den. comune dell calcolo che stiamo facendo

Polo di G

$s = -(1+K) = \lambda$

SIST. INTERCONN. AS. STABILE $\Updownarrow$

$1+K>0 \quad K>-1$

$1+K=0 \quad K=-1$

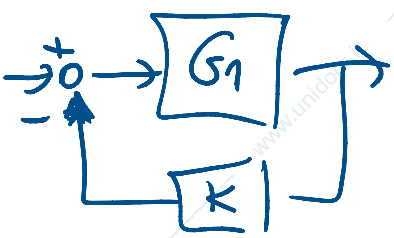
$\lambda = 0$ SEMPL. STABILE

$1+K<0 \quad K<-1$

$\lambda>0$ SIST. INSTABILE

$G(s) = \frac{N}{D} = \frac{N_1/D_1}{1+\frac{N_1}{D_1}\frac{N_2}{D_2}} =$

$= \frac{N_1/D_1}{\frac{D_1D_2+N_1N_2}{D_1D_2}} = \frac{N_1D_2}{\underbrace{D_1D_2+N_1N_2}_{\text{POLIN. di grado } n_1+n_2}}$



$G_1(s)$ AS. ST. $\frac{1}{s+1}$

$K > 0$ SIST. INSTABILE

$\forall\, K > -1$ SIST. NSTNSTAZ. AS. STABILE

CONVOLUZ.

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau = f_2 * f_1$$

$f_i = 0,\ t < 0$

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2] = F_1(s) F_2(s)$$

$$\boxed{Y(s) = G(s)U(s)}$$