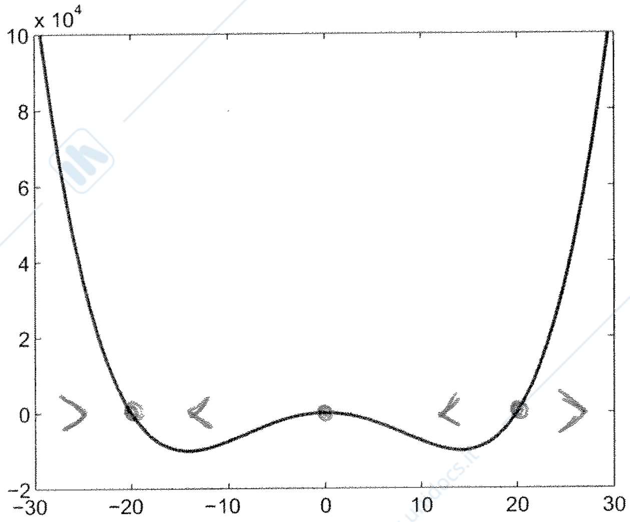
FONDAMENTI DI AUTOMATICA I - Ingegneria Elettrica **Prof.ssa Mara Tanelli**
Appello del 28 giugno 2010



1. Si consideri il sistema dinamico non lineare e tempo invariante descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = x(t),$$

dove $f(x(t), u(t)) = [0.25x(t)^4 - 100x(t)^2]u(t)$.
In figura è tracciato il grafico di $f(x(t)) = [0.25x(t)^4 - 100x(t)^2]$.
1.1 Si determinino gli stati di equilibrio associati all'ingresso $u(t) = \overline{u} = 1$, $t \geq 0$ e se ne studino le proprietà di stabilità.

Si noti che la figura mostra la funzione $f(x, \bar{u})$, con $\bar{u} = 1$
I punti di eq. sono le soluzioni di $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$
Dal grafico quindi si vede che $\bar{x} = \begin{cases} 0 \\ \pm 20 \end{cases}$

Sempre dal grafico, considerando che dove $f(x, \bar{u}) > 0$ si ha x crescente e viceversa, si possono orientare delle frecce nel senso delle x crescenti e decrescenti come in figura.

Da ciò si evince che:

$$\begin{cases} x = -20 \text{ è punto di equilibrio AS. STABILE} \\ x = 0 \text{ e } x = 20 \text{ sono equilibri INSTABILI} \end{cases}$$

1.2 Per gli eventuali stati di equilibrio asintoticamente stabili determinati al punto precedente si indichi la regione di attrazione.

La regione di attrazione di un punto di eq. stabile $\bar{x}$ è definita come $R_{\bar{x}} = \left\{ \{x_0\} : \lim_{t \to +\infty} x_{x_0}(t) \to \bar{x} \right\}$, dove $x_{x_0}(t)$ è il movimento generato dalle condiz. iniziali $x(0) = x_0$

Quindi $R_{\bar{x}=-20} = (-\infty, 0)$

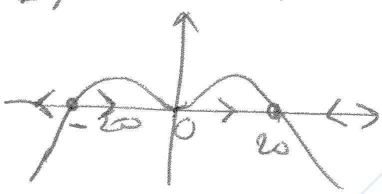
1.4 Si dica, motivando la risposta, come cambiano le risposte ai punti precedenti considerando come ingresso

a) $u(t) = \overline{u} = 5$, $t \geq 0$

b) $u(t) = \overline{u} = -1$, $t \geq 0$.

- Gli stati di equilibrio NON cambiano in nessun caso, perché sono soluzioni di $f(\bar{x}, \bar{u}) = (0{,}25\,x^4 - 100x^2)\,\bar{u} = 0$ e $u \neq 0$ in entrambi i casi a) e b)
- STABILITÀ: nel caso a) non cambia nulla, in quanto $f(\bar{x}, 5) = 5\, f(\bar{x}, 1)$ quindi ha lo stesso segno di $f(\bar{x}, 1)$

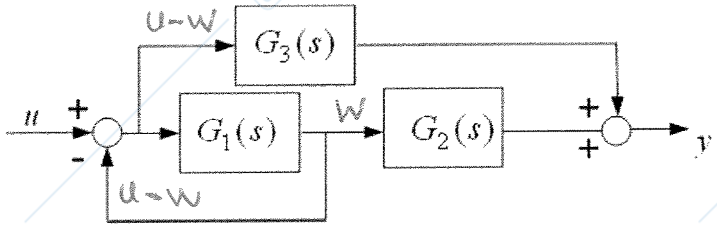
  Nel caso b) si ha $f(\bar{x}, -1) = -f(\bar{x}, 1)$, che ha grafico



  Quindi $\begin{cases} \bar{x} = 0 \text{ e } \bar{x} = -20 & \text{INSTABILI} \\ \bar{x} = +20 & \text{AS. STABILE} \end{cases}$

- La regione di attrazione di $\bar{x} = +20$ è $R_{\bar{x}=20} = (0, +\infty)$

2. Si consideri lo schema a blocchi in figura



dove $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$ sono funzioni di trasferimento di sistemi di ordine uno.

2.1 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema in funzione di $G_1(s)$,

$G_2(s)$, $G_3(s)$.

Dando delle etichette ai segnali come in figura, si ha

$$y = G_3(u - w) + G_2 w \quad e \quad w = \frac{G_1}{1+G_1} u$$

Da cui:

$$y = G_3\left(u - \frac{G_1}{1+G_1}u\right) + G_2 \frac{G_1}{1+G_1} u = \left[G_3 \frac{1}{1+G_1} + \frac{G_2 G_1}{1+G_1}\right] u$$

Quindi $\boxed{H(s) = G_3(s) \frac{1}{1+G_1(s)} + G_2(s) \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)}}$

2.2 Posto $G_1(s) = \frac{1}{s+3}$, $G_2(s) = \frac{s+4}{s+0.1}$, $G_3(s) = -\frac{1}{s+3}$, calcolare $H(s)$ e studiare la stabilità del sistema con ingresso u e uscita y.

Si ha: $H(s) = -\frac{1}{s+3} \frac{1}{1+\frac{1}{s+3}} + \frac{s+0,4}{s+0,1} \frac{1/s+3}{1+1/s+3} = -\frac{1}{s+3} \frac{s+3}{s+0,4} + \frac{s+4}{s+0,1} \frac{1}{s+4}$

$$H(s) = -\frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+0,1} = \boxed{\frac{3,9}{(s+0,1)(s+4)}}$$

$H(s)$ ha 2 poli mentre il sistema originale ha 3 AUTOVALORI

$\Rightarrow$ c'è un AUTOVALORE NASCOSTO

poli $\begin{cases} -0,1 & \leftarrow \text{polo di } G_2 \\ -4 & \leftarrow \text{polo della retroaz. di } G_1 \end{cases}$

Poiché G_3 è NON RETROAZIONATA (come del resto G_2), il suo polo è autovalore del sistema complessivo $\Rightarrow$ l'autov. nascosto è $\lambda_3 = -3$

$\lambda_i = \{-0,1, -3, -4\}$ Poiché $Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i \iff$ Sistema AS. STABILE

2.3 Calcolare la risposta di regime del sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ all'ingresso $u(t) = e^{-2t} + 2 + 10\sin(0.1\,t)$.

Si ha $y(t) = 0 + 2H(0) + 10 \times 7 \sin\left(0,1t - \frac{\pi}{4}\right)$

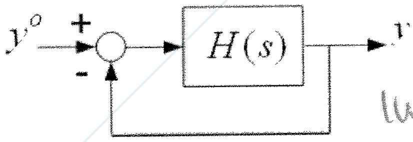
Si evince dal fatto che abbiamo un sistema LTI AS. STABILE alimentato da un ingresso che $\to 0$ per $t \to +\infty$

dal TVF che è applicabile poiché i poli di $Y(s) = H(s)\,U(s)$ sono tutti con Re < 0 o nulli

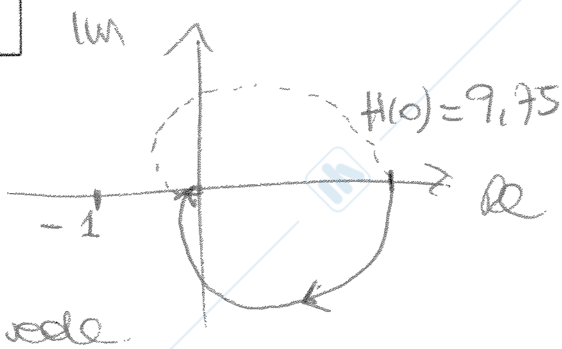
dal teorema della risp. in freq., applicabile perché sistema è AS. ST.

NB. $\omega = 0,1$ è pulsazione del primo polo di $H(s)$ e il secondo polo dista dal primo di più di una decade

2.4 Tracciare il diagramma polare di $H(s)$ e, considerando il sistema retroazionato in figura,



studiarne la stabilità mediante il criterio di Nyquist.



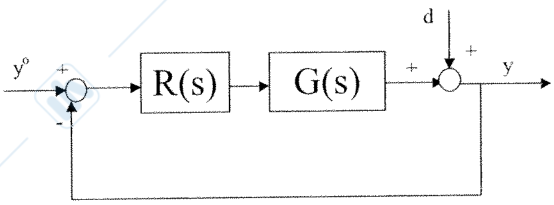
Dal diagramma polare si può ricavare il diagramma di Nyquist

Si ha $P=0$ e dal diagramma si vede che $N=0$

P: # poli di $L(s) = H(s)$ a parte reale positiva

N: # giri del diagr. di Nyquist attorno a $(-1,0)$ (positivi in senso antiorario). Si ha dunque $N=P$ $\Leftrightarrow$ sistema in anello chiuso AS. STABILE

3. Si consideri il sistema di controllo in figura



dove $G(s) = \frac{20}{(s+1)}e^{-0.1s}$.

3.1 Progettare un regolatore $R(s)$ tale che: 1) il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di $y^o(t) = \pm\,\text{sca}(t)$ e $d(t) = \pm\,2\text{sca}(t)$ sia $|e_\infty| \leq 0.4$; 2) la pulsazione critica del sistema in anello chiuso sia $\omega_c \geq 0.5\,\text{rad/s}$ e il margine di fase sia $\varphi_m \geq 60°$.

$$e_\infty = e_{\infty y^o} + e_{\infty d}$$

$$e_{\infty y^o} = \lim_{s\to 0} s\,S(s) \pm \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \pm \frac{1}{1+L}$$

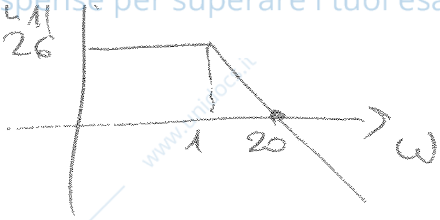
$$|e_{\infty y^o}| = \frac{1}{1+\frac{\mu_G\mu_R}{s^{g_R}}} \quad \begin{cases} \frac{1}{1+20\mu_R} & g_R = 0 \\ 0 & g_R \geq 1 \end{cases}$$

$$e_{\infty d} = \lim_{s\to 0} s\,(-S(s)) \pm \frac{2}{s} \Rightarrow |e_{\infty d}| = \frac{2}{1+\frac{\mu_G\mu_R}{s^{g_R}}} \quad \begin{cases} \frac{2}{1+20\mu_R} & g_R = 0 \\ 0 & g_R \geq 1 \end{cases}$$

Pongo $g_R = 0 \Rightarrow |e_\infty| = \frac{3}{1+20\mu_R} \leq 0,4 \Leftrightarrow \boxed{\mu_R \geq \frac{2,6}{8} \simeq 0,325}$

Fisso $\mu_R = 1$

$L_1(s) = \frac{20}{s+1} e^{-0,1s}$

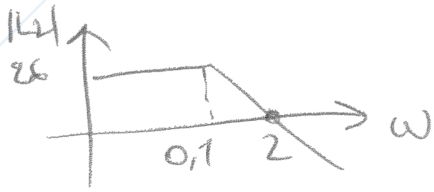


$\varphi_c = -\operatorname{atan}(20) - 20 \cdot 0,1 \frac{180°}{\pi} \simeq -201°$

$\varphi_m < 0° \Rightarrow$ NO !

Il ritardo mi fa perdere troppa fase $\Rightarrow$ cancello il polo di $L_1(s)$ e metto un polo a più bassa frequenza, dove il ritardo causa minor sfasamento

$R_2(s) = \frac{s+1}{10s+1} \rightarrow L_2(s) = L_1(s) R_2(s) = \frac{20}{10s+1} e^{-0,1s}$



$\omega_c = 2 > 0,5$ OK

$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 180° - \left| -\operatorname{atan}(20) - 2 \cdot 0,1 \frac{180°}{\pi} \right| \simeq 91° \checkmark$

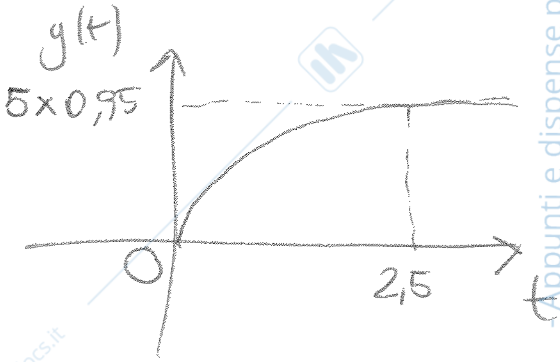
3.2 Si tracci il grafico dell'andamento qualitativo della risposta di $y(t)$ del sistema in anello chiuso a fronte di un riferimento $y^o(t) = 5\,\mathrm{sca}(t)$ e con $d(t) = 0$ (si specifichino, in particolare: valore iniziale, valore finale, tempo di assestamento e sovraelongazione percentuale massima[1]).

Ho $\varphi_m > 75° \Rightarrow F(s) = \frac{L}{1+L}$ si approssima con FdT con 1 solo polo reale, con $\omega = \omega_c = 2 \frac{rad}{s}$

Quindi $T_{ass} \simeq 5 \frac{1}{\omega_c} = 2,5$ s

$S\% = 0$ perché $\xi = 1$

$F(0) = \frac{L(0)}{1+L(0)} = \frac{20}{21} \simeq 0,95$



4. Si consideri il sistema lineare e tempo invariante a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

4.1 Si scrivano le espressioni del movimento libero e del movimento forzato di stato e uscita del sistema con condizioni iniziali $x(0) = x_0$ ed ingresso $u(t) = \bar{u}$, $\forall t \geq 0$.

Vedi LIBRO / APPUNTI

[1] $S\% = 100\, e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$.

4.2 Per la classe di sistemi in esame, si dia la definizione di stato e uscita di equilibrio associati ad un ingresso costante $u = \bar{u}$, e si mostri sotto quali condizioni questi esistono e sono unici.

VEDI LIBRO/APPUNTI

5. Si enunci con precisione il criterio di Bode.

VEDI LIBRO/APPUNTI