www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

venerdì 29 maggio 2020 10:00

IMPULSO e tipl

$$imp(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ \boxed{1 \quad k = 0} \end{cases}$$

$$V(z) = \mathcal{Z}[v(k)] = \stackrel{!}{=} \sum_{0}^{\infty} {}_k \, v(k) z^{-k}$$

Se $v(k) = imp(k)$

$$V(z) = v(0) + \cancel{v(1) z^{-1}} + \cancel{v(2) z^{-2}} \cancel{\dots} \stackrel{!}{=} 1$$

$\boxed{x_k = A^k x_0}$

ESPONENZIALE $v(k) = a^k, \; a \in \mathbb{R}$

$$V(z) = \mathcal{Z}[a^k] = 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \stackrel{!}{=} \sum_{0}^{\infty} {}_k \underbrace{(a z^{-1})^k}_{\text{SERIE GEOMETRICA DI "RAGIONE" } a z^{-1}}$$

La serie converge a

$$\boxed{V(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}}$$

SERIE GEOMETRICA di ragione q converge a $\frac{1}{1-q}$ se $|q|<1$

$$V(z) = \boxed{\frac{1}{1 \ldots}} \frac{z}{z} =$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

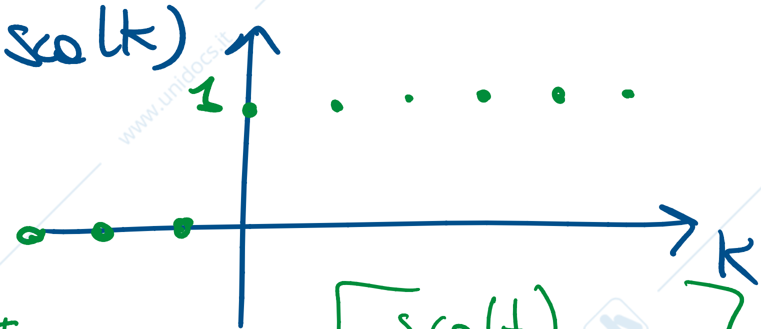
$$V(z) = \boxed{\frac{1}{1-az^{-1}}}\,\frac{z}{z} = \boxed{\frac{z}{z-a}} \leftarrow \text{polo } z=a$$

$1-q \quad |q|<1$

e^{at}

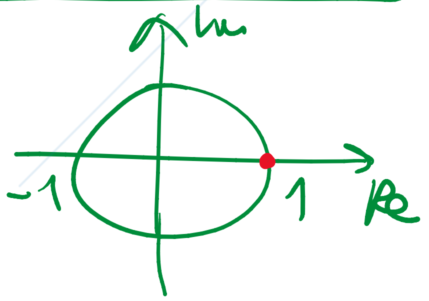
$\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$

$$v(k) = a^k, \quad a = 1 \Rightarrow sca(k)$$



$$V(z) = \frac{z}{z-1}$$

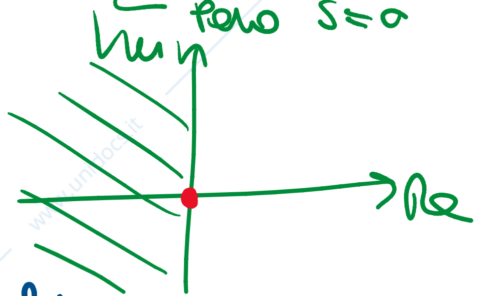
$\boxed{\text{Polo } z = 1}$



sca(t)

$\mathcal{L}[\cdot] = \dfrac{1}{s}$

polo $s=0$



PROPRIETÀ della trasf. $\mathcal{Z}$

① **LINEARITÀ** $\quad v(k) = \alpha v_1(k) + \beta v_2(k)$

$$\mathcal{Z}[v(k)] = V(z) = \alpha_1 V_1(z) + \beta V_2(z)$$

② **ANTICIPO** $\quad v_2(k) = v_1(k+1)$

v_2 è v_1 ANTICIPATO DI 1 1 PASSO

$$V_2(z) = z[V_1(z) - v_1(0)]$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

1 PASSO

$$V_2(z) = z\left[V_1(z) - v_1(0)\right]$$

se $v_1(0) = 0$ $\Rightarrow$ MOLTIPLICARE per $z \equiv$ ANTICIPARE DI UN PASSO

(3) $\boxed{\text{RITARDO}}$ $v_2(k) = v_1(k-1)$

v_2 è v_1 RITARDATO DI 1 PASSO

$$V_2(z) = \frac{1}{z} V_1(z)$$

DIVIDERE per $z \equiv$ RITARDARE DI 1 PASSO

$$\Rightarrow V_2(z) = z^{-1} V_1(z)$$

SE HO UN RITARDO di N passi:

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} V_2(z) &= z^{-N} V_1(z) \\ v_2(k) &= v_1(k-N) \end{aligned}}$$

FdT di un sistema LTI a TEMPO DISCRETO

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$\mathcal{Y}$

ANTICIPO

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

↳ $\mathcal{Z}$

ANTICIPO

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = z[X(z) - x(0)]$$

EQ. STATO

$$z[X(z) - x(0)] = AX(z) + BU(z)$$

$$[zI - A]X(z) = zx(0) + BU(z)$$

$$\begin{cases} X(z) = [zI-A]^{-1} z x(0) + [zI-A]^{-1} B U(z) \\ Y(z) = C\{[zI-A]^{-1} z x(0) + [zI-A]^{-1} B U(z)\} + DU(z) \end{cases}$$

Per C.I. NULLE $x(0)=0$, si ottiene

$$\boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C[zI-A]^{-1}B + D}$$

GUADAGNO $\mu = G(1)$

↓ È UNA FUNZ. RAZIONALE di z

<u>TIPO</u> di $G(z)$: # POLI − # ZERI in $z=1$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

GUADAGNO STATICO

$$\bar{y} = \left(C(I-A)^{-1}B + D\right)\bar{u}$$

$$\parallel$$

$$G(z)\big|_{z=1}$$

USCITA FORZATA

$$(*)\quad Y(z) = G(z)U(z) = \frac{N(z)}{D(z)}U(z) =$$

$$= \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

NUM di grado m

DEN di grado n

GRADO RELATIVO
$r = n - m$

Dall' eq $(*)$ si ha

$$D(z)Y(z) = N(z)U(z)$$

$$(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)Y(z) = (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m)U(z)$$

USANDO la PROPRIETÀ di ANTICIPO

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) =$$

$$= b_0 u(k+m) + b_1 u(k+m-1) + \dots + b_m u(k)$$

TRASLO TUTTA L'EQUAZIONE INDIETRO DI

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

TRASLO TUTTA L'EQUAZIONE INDIETRO DI N PASSI (LTI)

$$a_0 \boxed{y(k)} + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) =$$
$$= b_0 u(k+m-n) + \dots + b_m u(k-n)$$

Da cui: EQUAZ. alle differenze

$$\boxed{y(k) = -\frac{a_1}{a_0} y(k-1) + \dots - \frac{a_n}{a_0} y(k-n) + \frac{b_0}{a_0} u(k+m-n) + \dots + \frac{b_m}{a_0} u(k-n)}$$

IMPLICAZIONI DI UN SISTEMA NON CAUSALE

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{z+a}{1} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

prodotto relativo $r<0$

1 zero
0 poli

$r = -1$

$zU(z) + aU(z)$

$v_2(k+1) = v_1(k)$
$V_2(z) = zV_1(z)$

$$Y(z) = (z+a)U(z)$$

$$\boxed{y(k) = u(k+1) + a\,u(k)}$$

Per conoscere y al passo k, mi serve conoscere u al passo k+1!

ANTITRASFORMATA per SISTEMI a T. D.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

ANTITRASFORMATA per SISTEMI a T.D.

$$v(k) = \mathcal{Z}^{-1}[V(z)]$$

TEO VALOR INIZIALE

Date $V(z)$ RAZIONALE FRATTA

$$V(z) = \mathcal{Z}[v(k)]$$

$$\boxed{v(0)} = \lim_{z \to \infty} V(z)$$

$$\boxed{V(z) = \boxed{v(0)} + \cancel{v(1) z^{-1}} + \cancel{v(2) z^{-2}} + \dots}$$

TVI T.C.

$F(s)$ avente $\boxed{r \geq 1}$

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} s F(s)$$

TVF

Sia $V(z)$ una RAZIONALE FRATTA

$V(z)$ ABBIA POLI TUTTI con $|\cdot| < 1$ o in $z = 1$

$$v_\infty = \lim_{z \to 1} (z-1) V(z)$$

T.C.
Poli $F(s)$ con $Re < 0$ o NULLI

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$z \to 1$

$$f_{\infty} = \lim_{s \to 0} s F(s)$$

ANTITRASFORMATA MEDIANTE LUNGA DIVISIONE DI POLINOMI

$$V(z) = \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 + 2z + 2} \leftarrow$$

ANTITRASF?

Con la lunga divisione possiamo calcolare SOLO i CAMPIONI DELL'ANTITR. NON la sua forma analitica

$\downarrow$ $v(0), v(1), v(2) \ldots$

$$\begin{array}{l|l}
4z^2 - z + 2 & z^2 + 2z + 2 \\
-4z^2 - 8z - 8 & \overline{4 - 9z^{-1} + 12z^{-2} \ldots} \\
\hline
\quad -9z - 6 & \\
\quad +9z + 18 + 18z^{-1} & \\
\hline
\quad\quad +12 + 18z^{-1} & \\
\quad\quad -12 - 24z^{-1} - 24z^{-2} & \\
\hline
\quad\quad\quad -6z^{-1} - 24z^{-2} &
\end{array}$$

$$\underbrace{4}_{v(0)}\ \underbrace{-9z^{-1}}_{v(1)}\ \underbrace{+12z^{-2}}_{v(2)}$$

$$V(z) = \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 + 2z + 2} = 4 - 9z^{-1} + 12z^{-2} + \frac{-6z^{-1} - 24z^{-2}}{\ldots}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$V(z) = \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 + 2z + 2} = 4 - 9z^{-1} + 12z^{-2} + \frac{-6z - 24z}{z^2 + 2z + 2}$$

PRIMI 3 CAMPIONI dell'ANTITRASF. ←
$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v(1) = -9 \\ v(2) = 12 \end{cases}$$

Se applico la LUNGA DIVISIONE all'uscita forzata del sistema

$$Y(z) = G(z)\,U(z)$$

posso calcolare i campioni della risposta nel dominio del tempo

RISPOSTA ALL'IMPULSO

$$u(k) \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow y(k)$$

$u(k) = imp(k)$

$U(z) = 1$

$$Y(z) = G(z)\,U(z)$$

$$Y(z) = G(z)$$

$$y_{IMP}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$$

SIST. AS. ST. ha RISP. IMPULSO CHE $\to 0$ $k \to +\infty$

RISP. a SCALINO

$u(k) = sca(k)$

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = G(z)\,U(z)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Sappiamo calcolare i CAMPIONI di $y(k)$ con la LUNGA DIVISIONE

Dal TVF sappiamo che (se APPLICABILE)

$$y_\infty = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z\to 1}\cancel{(z-1)}G(z)\frac{z}{\cancel{z-1}} = \lim_{z\to 1}G(z)$$

$G(z)$ AS. STABILE e di tipo 0

⟹ VALORE DI REGIME della RISP. a SCALINO è IL GUADAGNO μ

TVI $y(0)$?

(*) $$y(0) = \lim_{z\to\infty} Y(z) = \lim_{z\to\infty} G(z)\frac{z}{z-1} = \lim_{z\to\infty} G(z)$$

$\frac{z}{z-1} \to 1$

$G(z) = \frac{N}{D}$

N grado m

D " n

$\lim_{z\to\infty} G(z)$: 0 se $m<n$, $r>0$; $\neq 0$ se $m=n$, $r=0$

Posso (come a TC) ITERARE il TVI

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

PASSO (come a TC) ITERARE il TVI per calcolare i CAMPIONI SUCCESSIVI della RISPOSTA

$$y(0) = \lim_{z \to \infty} Y(z) = \lim_{z \to \infty} G(z)$$

PER ANTICIPO (c.i. nulle)

$$y(k) = \lim_{z \to \infty} z^k Y(z) = \lim_{z \to \infty} \underbrace{z^k G(z)}$$

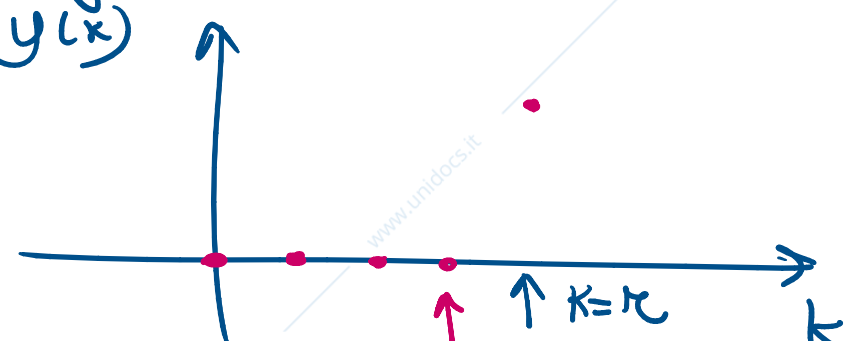
$\neq 0$ quando $k + m = n$

$$\boxed{\text{DOPO } \underline{k} = n - m = \underline{r} \text{ PASSI}}$$

<u>TEMPO DI LATENZA</u> $k_e = r - 1$

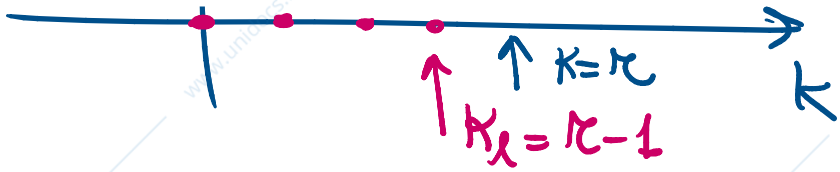
→ # CAMPIONI NULLI della RISPOSTA ALLO SCALINO DI UN SISTEMA A T.D.

<u>es</u> Sistema con grado rel r



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari