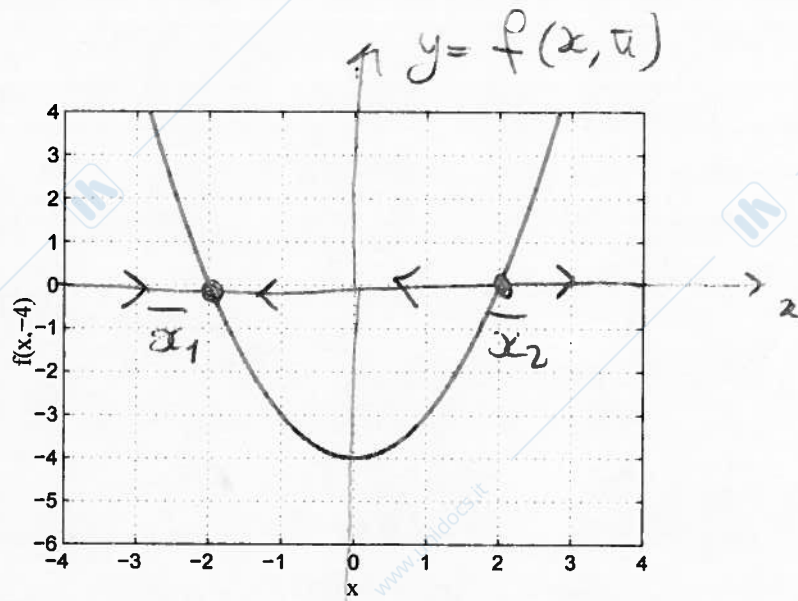


FONDAMENTI DI AUTOMATICA - Ingegneria Gestionale
Appello del 3 luglio 2014

Prof.ssa Mara Tanelli



1. Si consideri il sistema dinamico non lineare e tempo invariante descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = x(t).$$

In figura è tracciato il grafico di $f(x, -4)$ in funzione di x .

- 1.1 Si determinino gli stati di equilibrio associati all'ingresso $u(t) = \bar{u} = -4, t \geq 0$ e se ne studino le proprietà di stabilità.

Dall'analisi grafica si determinano gli stati di eq.

$$\bar{x}_1 = -2 \text{ e } \bar{x}_2 = 2$$

e le loro proprietà di stabilità:

\bar{x}_1 è AS. STABILE

\bar{x}_2 INSTABILE

1.2 Si definisca il concetto di regione di attrazione, e la si determini per gli eventuali stati di equilibrio asintoticamente stabili trovati al punto precedente.

La regione di attrazione è l'insieme delle condizioni iniziali a partire dalle quali si ottiene un movimento che converge al punto di equilibrio

$$R_{\bar{x}_{AS.ST}} = \left\{ x_0 : x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{x_0} \bar{x} \right\}$$

Nel caso in esame si ha

$$R_{\bar{x}_1} = (-\infty, \bar{x}_2)$$

1.3 Si dica, motivando la risposta, se e come cambiano le risposte ai punti precedenti considerando il sistema

$$\dot{x}(t) = 10 f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = x(t).$$

Gli equilibri sono soluzioni di $10 f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, quindi gli stessi del punto 1.1. Poiché lo è un semplice fattore di scala che non modifica qualitativamente le $f(x, u)$ anche le altre risposte non variano.

2. Si consideri il sistema dinamico lineare e tempo invariante con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 5x_2(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + 2u(t)$$

$$y(t) = x_2(t).$$

2.1 Studiare la stabilità del sistema.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \lambda_i(A) = \{-1, -2\}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0, \forall i \Leftrightarrow \text{SIST. AS. STABILE}$$

2.2 Calcolare il movimento dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ e all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 2$.

L'uscita y dipende solo da x_2 che, a sua volta, è indep. da x_1 .

$$\text{Quindi } y(t) = x_2(t) = e^{-2t} x_2(0) + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} 2u(\tau) d\tau =$$

$$= \boxed{2 - 3e^{-2t}, t \geq 0}$$

2.3 Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema e dire, motivando la risposta, se è possibile studiare la stabilità del sistema a partire dalla conoscenza della sola $G(s)$.

$$G(s) = \frac{2}{s+2}$$

$$Y(s) = X_2(s) = \frac{1}{s+2} U(s)$$

$G(s)$ ha 1 polo con $\text{Re} < 0$ mentre il sistema è di ordine 2. Quindi non è possibile studiare la stab. del sistema a partire dalle sole $G(s)$ perché l'autovettore non certo non è noto.

2.4 Calcolare l'uscita di regime del sistema a fronte dell'ingresso $u(t) = 5 + e^{-2t} + \sin(2t)$

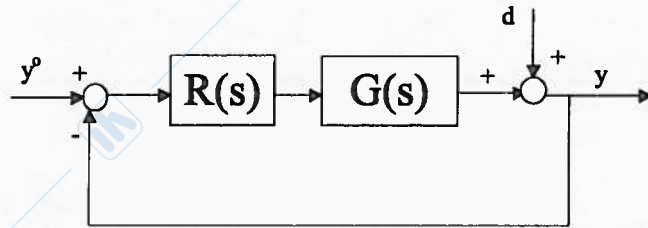
\downarrow \downarrow \downarrow
 u_1 u_2 u_3

$y_1(t)$: Sistema AS. STABILE di tipo 0 con ingresso a scalino $\Rightarrow y_{1\infty} = 5 G(0) = 5$

$y_2(t)$: uscita di regime di sist. AS. ST. con ingresso che $\rightarrow 0 \Rightarrow y_{2\infty} = 0$

$y_3(t)$: Sist. AS. ST. \Rightarrow APPROP. TH. delle RESP. in freq.

$$y_{3\infty} = |G(j2)| \sin(2t + \angle G(j2)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t - \pi/4)$$

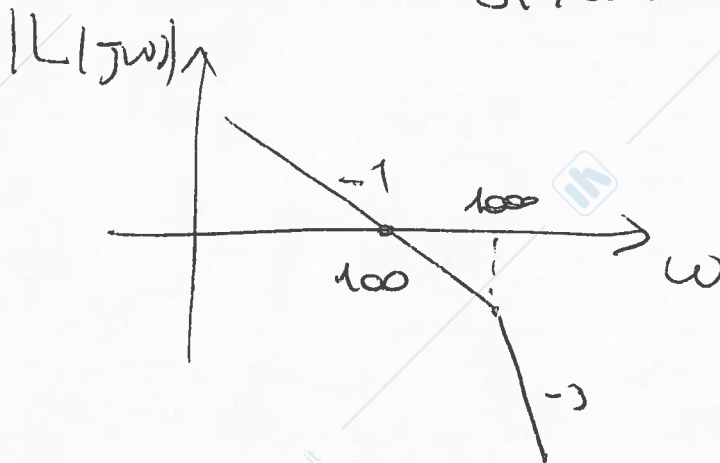


3. Si consideri il sistema di controllo in figura, con $G(s) = \frac{10}{(s+1)(0.001s+1)^2}$ ed $R(s) = 10 \frac{(s+1)}{s}$.

3.1 Studiare la stabilità del sistema in anello chiuso.

$$L(s) = \frac{100}{s(0.001s+1)^2}$$

Pole $S=0$
 $S=1000$
 $S=1000$



Si ha: $\left\{ \begin{array}{l} P=0 \\ \omega_c \text{ ben def.} \end{array} \right.$

\Downarrow

Posso applicare il criterio di Bode, da cui

$\mu_c = 100 > 0$; $\varphi_{cu} \approx 90^\circ \Rightarrow (L(s) \approx \frac{100}{s})$ firma \Rightarrow sist. in an. chiuso AS. ST. \Rightarrow una decade che

3.2 Verificare che il sistema di controllo introdotto al punto 3.1 soddisfa i seguenti requisiti: 1) se $y^o = 10 \text{sca}(t)$ e $d(t) = 0$, l'uscita di regime è $y = 10$. 2) un disturbo sinusoidale $d(t) = 0.1 \sin(\omega_d t)$, con $\omega_d < 10$, viene attenuato sull'uscita di almeno un fattore 10. 3) la pulsazione critica è $\omega_c > 1$ e il margine di fase è $\varphi_m > 50^\circ$.

1) $R(s)$ ha un polo in $s=0$, quindi $L(s)$ è di tipo 1. Questo implica inseguimento esatto, a regime, di riferimenti a scalari.

2) $\omega_d < \omega_c \Rightarrow$ Fatti fare da y , $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$
Occorre che $\left| \frac{1}{1+L(j\omega)} \right| \leq \frac{1}{10} \quad \forall \omega < \omega_d$

Che è verificato se $|1+L(j\omega)| \geq 10$, e da ~~verificare~~
verificare garantito se $|L(j\omega)| \geq 10 \quad \forall \omega < \omega_d$

Perché $|L(j\omega)| \geq 20 \text{ dB} \quad \forall \omega < 10$ la proprietà è verificata.

3) Dal punto 3.1 si ha $\omega_c \approx 100 \text{ rad/s}$ e $\varphi_m \approx 90^\circ$

4. Con riferimento alla classe dei sistemi dinamici lineari e tempo invarianti a tempo discreto

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k)$$

$$y(k) = Hx(k),$$

si definiscano stato e uscita di equilibrio associati ad un ingresso costante $u(k) = \bar{u}, \forall k$. Si mostri poi sotto quali condizioni stato e uscita di equilibrio esistono e sono unici.

Vedi libro/appunti

5. Si enunci con precisione il criterio di Bode.

Vedi libro/appunti