Modello di trasferimento risorse

$$x_i(t+1) - x_i(t) = f_i^{\text{in}}(t) - f_i^{\text{out}}(t)$$

$$\dot{x}_i(t) = f_i^{\text{in}}(t) - f_i^{\text{out}}(t)$$

Modelli di transizione tra stati

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} x_j(t)$$

Modelli di influenza

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} f_{ji}(x_j(t), x_i(t)) + \sum_{j=1}^{m} g_{ji}(u_j(t), x_i(t))$$

$$x_i(t+1) = f_i(x_i(t)) + \sum_{j \neq i} f_{ji}(x_j(t), x_i(t)) + \sum_{j=1}^{m} g_{ji}(u_j(t), x_i(t))$$

regressore TD $x(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-n) \\ u(t-1) \\ \vdots \\ u(t-m) \end{bmatrix}$ regressore TC $x(t) = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) \qquad \text{Adj}(M) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\varphi(s)}$$

Traslazione in frequenza $\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\} = F(s - \lambda)$

Derivata in frequenza $\mathcal{L}\{t\, f(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s)$

Derivata nel tempo $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$

Integrazione nel tempo $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$

Convoluzione nel tempo: $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$

f(t)	F(s)
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$1/s$
$t\, 1(t)$	$1/s^2$
$(t^2/2) 1(t)$	$1/s^3$
$e^{at}\, 1(t)$	$1/(s-a)$
$\sin(\omega_0 t)\, 1(t)$	$\omega_0/(s^2 + \omega_0^2)$
$\cos(\omega_0 t)\, 1(t)$	$s/(s^2 + \omega_0^2)$
$(t^\ell/\ell!)\, e^{at}\, 1(t)$	$1/(s-a)^{\ell+1}$

	Evoluzione libera nello stato x_ℓ	Risposta libera nell'uscita y_ℓ	Evoluzione forzata nello stato x_f	Risposta forzata nell'uscita y_f
Tempo	$e^{At} x(0)$	$Ce^{At} x(0)$	$\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$	$C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + Du(t)$
Laplace	$(sI - A)^{-1} x(0)$	$C(sI - A)^{-1} x(0)$	$(sI - A)^{-1} BU(s)$	$[C(sI - A)^{-1} B + D]\, U(s)$

z_i zero di $F(s) \Leftrightarrow b(z_i) = 0$

p_i polo di $F(s) \Leftrightarrow a(p_i) = 0$

polinomi coprimi = se non hanno radici comuni

$$K_i = \lim_{s \to p_i} (s - p_i) F(s) \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{p_i t}$$

$$\left(K_i e^{p_i t} + \overline{K}_i e^{\overline{p}_i t}\right) 1(t) = [2\alpha_i e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) - 2\beta_i e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t)]\, 1(t) \qquad F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s - p_i}$$

modi	$\sigma_i < 0$	$\sigma_i = 0$	$\sigma_i > 0$
$\omega = 0$	convergente non oscillante	limitato non oscillante l > 0 => divergente	divergente non oscillante
$\omega_i \neq 0$	convergente oscillante	limitato oscillante	divergente oscillante

$$\varphi(s) = \prod_{i=1}^{k} (s - \lambda_i)^{\mu_i} \qquad 1 \le m_i \le \mu_i$$

$$F(s) = K_0 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(s - p_i)^\ell} \qquad K_{i\ell} = \lim_{s \to p_i} \frac{1}{(m_i - \ell)!} \frac{d^{(m_i - \ell)}}{ds^{m_i - \ell}} [(s - p_i)^{m_i} F(s)]$$

$$f(t) = K_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{K_{i\ell}}{(\ell - 1)!} t^{\ell - 1} e^{p_i t}$$

z-z* = 2j Im[z]

k/j = -jk

Teorema valore finale: Se tutti i poli di F(s) hanno Re < 0 tranne al più un polo in 0 con m=1, allora: lim f(t) = lim(s->0) sF(s)

μi = molteplicità φ(s) = molteplicità algebrica

mi = molteplicità m(s) (m(s) = minimo comune multiplo denominatori di $(sI-A)^{-1}$)

LTI asintoticamente stabile
lim xl(t) = 0 ∀x(0)

f(t) è convergente ⇔ tutti i modi di F(s) sono convergenti
⇔ lim f(t) = 0 ⇔ tutti i poli di F(s) hanno Re < 0

f(t) è limitata ⇔ tutti i modi di F(s) sono limitati
⇔ ∃M t.c. |f(t)|≤M ⇔ tutti i poli di F(s) hanno Re ≤ 0 AND quelli con Re = 0 hanno μ=1

f(t) è divergente ⇔ esiste almeno un modo di F(s) divergente
⇔ lim |f(t)| = ∞ ⇔ F(s) ha almeno un polo con Re > 0 OR almeno un polo con Re = 0 e μ>1

funzione di trasferimento anello aperto:

$$G(s) = \frac{1}{\varphi(s)} C\text{Adj}(sI - A)B + D \qquad a(s) = \prod_{i=1}^{k} (s - \lambda_i)^{\nu_i} \quad 0 \le \nu_i \le \mu_i$$

asintoticamente stabile ⇔ tutti λ hanno Re < 0

marginalmente stabile ⇔ tutti λ hanno Re ≤ 0 AND quelli con Re = 0 hanno m=1 di m(s)

internamente instabile ⇔ esiste almeno un λ con Re > 0 OR con Re = 0 e m > 1 di m(s)

SISO:

$$G(s) = \frac{r(s) + D\varphi(s)}{\varphi(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} \qquad r(s) = C\text{Adj}(sI - A)B$$

λh=λ-p $\quad \varphi_h(s) = \frac{\varphi(s)}{a(s)}$

risposta impulsiva:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(sI - A)^{-1} B + D\} = Ce^{At} B + D\,\delta(t)$$

Stabilità esterna ⇔ tutte le radici di a(s) hanno Re < 0

stabilità interna ⇒ stabilità esterna

Sistema LTI TC SISO stabile esternamente ⇔ tutti i poli di G(s) hanno Re < 0

Regola di Cartesio(n≤2): tutte le radici hanno Re < 0 ⇔ tutti i coefficienti sono non nulli e hanno lo stesso segno

Tabella di Routh: tutte le radici hanno Re < 0 ⇔ la tabella regolare (tutti elem 1a colonna ≠ 0) AND tutti elem 1a colonna hanno lo stesso segno

3	a_3	a_1	0
2	a_2	a_0	0
1	$E_{1,1}$	0	
0	a_0	0	

$$E_{\ell,i} = -\frac{1}{E_{\ell+1,1}} \det \begin{bmatrix} E_{\ell+2,1} & E_{\ell+2,i+1} \\ E_{\ell+1,1} & E_{\ell+1,i+1} \end{bmatrix} \qquad E_{1,1} = -\frac{1}{a_2} \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(s) = s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \ldots - \alpha_1 s - \alpha_0$$

$$m(s) = \varphi(s) \qquad \text{LTI TC in rappresentazione i/o}$$

$$G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \ldots - \alpha_1 s - \alpha_0}$$

$$Y_f(s) = \underbrace{\frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n - \alpha_{n-1} s^{n-1} - \ldots - \alpha_1 s - \alpha_0}}_{G(s)} U(s)$$

Stabilità alla Lyapunov ⇔ perturbazioni sufficientemente piccole delle condizioni iniziali danno luogo a perturbazioni arbitrariamente piccole delle traiettorie

Attrattività ⇔ a fronte di perturbazioni delle condizioni iniziali le traiettorie tendono a ritornare nello stato di equilibrio

pt di equilibrio = (xe,ue) t.c. f(xe,ue) = 0

Localmente asintoticamente stabile ⇔ stab Lyapunov AND loc attrattivo

Globalmente asintoticamente stabile ⇔ stab Lyapunov AND glob attrattivo

Marginalmente stabile ⇔ stab Lyapunov AND NOT attrattivo

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \frac{\partial f_1}{\partial v_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial v_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_1} & \frac{\partial f_2}{\partial v_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial v_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial v_m} & \frac{\partial f_n}{\partial v_m} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial v_m} \end{bmatrix}$$

$$A_e = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} \quad C_e = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} \quad B_e = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)} \quad D_e = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(x,u)=(x_e,u_e)}$$

Metodo linearizzazione Lyapunov:

tutti λ di Ae hanno Re < 0 ⇒ equilibrio (localmente) asintoticamente stabile

almeno tutti λ di Ae ha Re > 0 ⇒ equilibrio internamente instabile

Stabilità esterna ⇒ $\lim\, [y_f(t) - y_f^U(t)] = 0$

Stabilità asintotica ⇒ $\lim\, [y(t) - y_f^U(t)] = 0$

$$Y_f(s) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s - p_i}}_{Y_f^G(s)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\tilde{K}_i}{s - \tilde{p}_i}}_{Y_f^U(s)} = \underset{\text{regime transitorio}}{Y_f^G(s)} + \underset{\text{regime permanente}}{Y_f^U(s)}$$

guadagno in continua: $G(0) = -CA^{-1}B + D$

$$y_f^U(t) = G(0)\, U_0\, 1(t) \qquad Y_f^U(s) = \frac{\overline{K}}{s} = \frac{G(0)\, U_0}{s}$$

← in continua
↓ in frequenza

Sistema LTI TD al posto di Re<0 (TC) si usa |λ| < 1 (TD)

$$y_f^U(t) = \left[\text{Re}\{G(j\omega_0)\}\, U_0 \sin(\omega_0 t) + \text{Im}\{G(j\omega_0)\}\, U_0 \cos(\omega_0 t)\right] 1(t)$$

	Tempo	Zeta
Evoluzione libera nello stato $x_\ell(t)$	$A^t x(0)$	$(zI - A)^{-1} z\, x(0)$
Evoluzione forzata nello stato $x_f(t)$	$\sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu(\tau)$	$(zI - A)^{-1} B\, U(z)$
Risposta libera $y_\ell(t)$	$C\, A^t x(0)$	$C(zI - A)^{-1} z\, x(0)$
Risposta forzata $y_f(t)$	$\sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1} Bu(\tau) + Du(t)$	$[C(zI - A)^{-1} B + D]\, U(z)$

	$\lvert\lambda_i\rvert < 1$	$\lvert\lambda_i\rvert = 1$	$\lvert\lambda_i\rvert > 1$
$\ell = 0$	convergente	limitato	divergente
$\ell > 0$	convergente	divergente	divergente

anticipo $\mathcal{Z}\{f(t+1)\} = zF(z) - zf(0)$ ritardo $\mathcal{Z}\{f(t-1)\} = \frac{F(z)}{z}$

Sistema in ciclo chiuso: A* =A-BF & B*=BH

$$G^*_{y^\circ y}(s) = C(sI - A^*)^{-1} B^* = C(sI - A + BF)^{-1} BH$$

Speciche di progetto:

1. stabilità asintotica in ciclo chiuso
2. G*y°y(0) = 1 (guadagno in continua in ciclo chiuso)
3. garantire un transitorio rapido e con escursioni dell'uscita il più possibile limitate

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A^*) = \det(sI - A + BF) \qquad G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{r(s)}{\varphi^*(s)} H \qquad H = \frac{\varphi^*(0)}{r(0)}$$

controllabile: se il λ dipende da F $\quad \varphi_{nc}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_c(s)}$

Controllore retroazione algebrica sullo stato: u(t)=-Fx(t)+Hy°(t)

Controllo in feedback = –Fx(t); guadagno in feedback = F (vet)

Controllo in feedforward = Hy°(t); guadagno in feedforward = H (scal)

completamente raggiungibile⇔det(R) ≠ 0 $\quad \mathcal{R} = [B|AB|\cdots|A^{n-1}B]$

$a^*(s)$ polinomio monico di grado $n - m = 1$

grado φ(s) - grado r(s)

$$\varphi^*(s) = \frac{r(s)}{r_m} a^*(s) \qquad a^*(s) = s + a_0^* \qquad G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{r_m}{a^*(s)} H = \frac{a_0^*}{a^*(s)} \qquad H = \frac{a_0^*}{r_m}$$

poli = λc ∩ λo	
λh = λnc U λno	

Controllore retroazione algebrica sull'uscita: u(t)=-Ky(t)+Hy°(t)=-KCx(t)+Hy°(t) A*=A-BKC & B*=BH

Controllo in feedback = –Ky(t); guadagno in feedback = K (vet)

Controllo in feedforward = Hy°(t); guadagno in feedforward = H (scal)

osservabile: polo di $C(sI - A)^{-1}$ $\quad \varphi_{no}(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_o(s)}$

φh(s) = 1 ⇒ problema ben posto

Controllore retroazione dinamica sull'uscita:

U(s) = –K(s)Y(s) + H(s)Y°(s)

H(s) = Hf(s)K(s) Hf(s)=prefiltro

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{K(s)\, G(s)}{1 + K(s)\, G(s)} H_f = \frac{q(s) b(s)}{p(s) a(s) + q(s) b(s)} H_f \qquad H_f = \frac{p(0) a(0) + q(0) b(0)}{q(0)\, b(0)}$$

osservatore

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\,\hat{x} + B\,u + L\,(y - C\,\hat{x})$$

Regolatore

$$u = -F\,\hat{x} + H\,y^\circ$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\,\hat{x} + B\,u + L\,(y - C\,\hat{x})$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A - BF & BF \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}$$

$$\varphi^*(s) = \det(sI - A + BF)\, \det(sI - A + LC)$$

$$G^*_{y^\circ y}(s) = \frac{r(s)}{\det(sI - A + BF)} H$$