POLITECNICO DI MILANO

vers. 2

FONDAMENTI DI AUTOMATICA
(Ingegneria dell'Automazione)
Prof.ssa Mara Tanelli

Anno Accademico 2015/16

Prima prova in itinere 02/05/2016

COGNOME ....

NOME ....

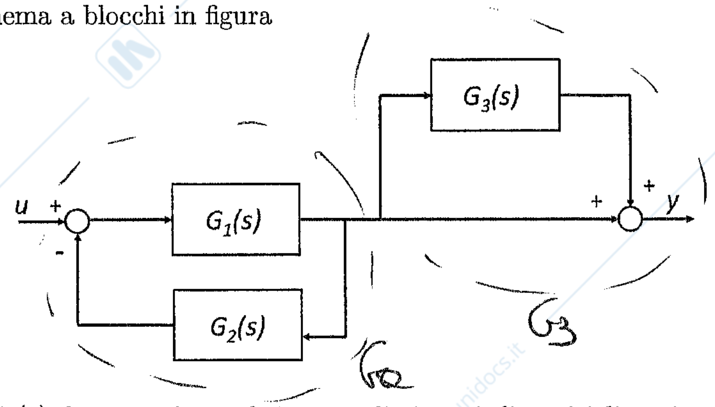
MATRICOLA ....

FIRMA ....

- Consegnare esclusivamente il presente fascicolo.
- Utilizzare, per la minuta, i fogli bianchi forniti in aggiunta a questo fascicolo.
- Non si possono consultare libri, appunti, dispense, ecc.
- Si raccomandano chiarezza, precisione e concisione nelle risposte.

FONDAMENTI DI AUTOMATICA - Ingegneria dell'Automazione
Prof.ssa Mara Tanelli
Prima prova in itinere del 2 maggio 2016

1. Si consideri lo schema a blocchi in figura



con $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ funzioni di trasferimento di sistemi dinamici lineari e tempo invarianti di ordine 1.

1.1 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ tra l'ingresso u e l'uscita y in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$. **(1 punto)**

$$H(s) = G_a(s) \cdot G_b(s) \quad \text{(conn. in serie)}$$

$$H(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\left(1+G_3(s)\right)$$

1.2 Posto $G_1(s) = \frac{1}{s+6}$, $G_2(s) = \frac{s+6}{s+3}$, $G_3(s) = \frac{1}{s+3}$, verificare che $H(s) = \frac{1}{s+6}$ e studiare la stabilità del sistema complessivo. **(3 punti)**

$$G_a(s) = \frac{1/s+6}{1+\frac{1}{\cancel{s+6}}\frac{\cancel{s+6}}{s+3}} = \frac{s+3}{(s+4)(s+6)}$$

$$G_b(s) = 1+\frac{1}{s+3} = \frac{s+4}{s+3}$$

$$H(s) = \frac{\cancel{s+3}}{(\cancel{s+4})(s+6)} \cdot \frac{\cancel{s+4}}{\cancel{s+3}} = \frac{1}{s+6} \quad \boxed{1 \text{ POLO}} \quad s=-6$$

Ci sono 2 λ_i NASCOSTI (Σ è di ordine 3 = ordine G_1 + ordine G_2 + ordine G_3) che derivano dalle semplificazioni nella serie da G_a e G_b $\Rightarrow \lambda_{i\,NASC.} = \{-3, -4\}$

Dunque $Re(\lambda_i(\Sigma)) < 0 \; \forall i \iff$ sistema complessivo AS. ST.

1.3 Calcolare il valore di regime dell'uscita forzata $y(t)$ del sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ all'ingresso $u(t) = \underbrace{2\text{sca}(t)}_{u_1} \underbrace{- 5\sin(0.01t)}_{u_2} + \underbrace{\sin(6t)}_{u_3}$. **(3 punti)**

$H(s) = \dfrac{1}{s+6}$ Uso sovrapp. degli effetti

$\boxed{y_{1\infty} = 2H(0) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}}$ Sist. AS. STABILE e di tipo zero con $u(t) = 2\text{sca}(t)$

$y_{2\infty}, y_{3\infty}$: Sist. AS. STABILE → uso th. della risp. in freq.

$\boxed{y_{2\infty} \simeq -5\sin(0{,}01t)}$, perché la ω dell'ingresso è $\ll \dfrac{1}{T} = 6$ e quindi $|H(j0{,}01)| \simeq 1$ e $\measuredangle H(j0{,}01) \simeq 0$

$$\boxed{y_{3\infty} = \underbrace{|H(j6)|}_{\frac{1}{\sqrt{6^2+6^2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}} \sin(6t + \underbrace{\measuredangle H(j6)}_{-\text{atan}\left(\frac{6}{6}\right) = -\frac{\pi}{4}})}$$

$\boxed{y_\infty = y_{1\infty} + y_{2\infty} + y_{3\infty}}$

2. Si consideri il sistema dinamico lineare e tempo invariante a tempo continuo con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + \gamma u(t) \\ y(t) &= \delta x_1(t) + \delta x_2, \end{aligned}$$

con α, β, γ e δ parametri reali.

1.1 Classificare il sistema e dire per quali valori di α, β, γ e δ il sistema è asintoticamente stabile. **(2 punti)**

Vedi soluz. versione 1

2.2 Posto $\alpha = 0$, $\beta = -30$, $\gamma = 1$ e $\delta = 100$ determinare il movimento dello stato e dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x(0) = [2, 1]^T$ e all'ingresso $u(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$. **(2 punti)**

EQUAZ: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -30x_2 + u \end{cases}$

II eq: $x_2(t) = e^{-30t} + \int_0^t e^{-30(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau$

$= e^{-30t} + e^{-30t} \int_0^t e^{-29\tau} d\tau =$

$= e^{-30t} + \frac{1}{29} e^{-30t} \left(e^{-29t} - 1\right) =$

$= e^{-30t} + \frac{1}{29} e^{-t} - \frac{1}{29} e^{-30t} = \frac{28}{29} e^{-30t} + \frac{1}{29} e^{-t}$, $t \geq 0$

I eq: $x_1(t) = e^{0t} x_2 + \int_0^t \left(\frac{28}{29} e^{-30\tau} + \frac{1}{29} e^{-\tau} \right) d\tau$

$= 2 - \frac{28}{(29 \times 30)} \left(e^{-30t} - 1\right) - \frac{1}{29} \left(e^{-t} - 1\right) =$

$= 2 - 0{,}03 e^{-30t} + 0{,}03 - 0{,}03 \left(e^{-t} - 1\right) =$

$= 2{,}06 - 0{,}03 e^{-30t} - 0{,}03 e^{-t}$

$y = 100 x_1 + 100 x_2 = 206 - \cancel{3 e^{-30t}} - \cancel{3 e^{-t}} + 96 e^{-30t} + \cancel{3} e^{-t} = \boxed{206 + 93 e^{-30t}, \ t \geq 0}$

2.3 Posto $\alpha = -200$ e con i valori degli altri parametri introdotti al punto 2.2, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema, precisandone tipo, guadagno, poli e zeri. Si mostrino graficamente le posizioni di zeri e poli nel piano complesso. **(3 punti)**

Vedi sett. versione 1

2.4 Coi valori dei parametri introdotti al punto 2.3, tracciare il grafico qualitativo della risposta del sistema ad uno scalino unitario, precisando valore iniziale della risposta e della sua derivata prima ($y(0)$ e $\dot{y}(0)$), valore di regime (y_∞) e tempo di assestamento (T_a). **(2 punti)**

Vedi soluz. versione 1

3. Si consideri il sistema dinamico non lineare e tempo invariante con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -10x_1(t) + 20u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + \alpha^3 x_2^3(t)\\ y(t) &= x_1(t)u^2(t),\end{aligned}$$

con α parametro reale.

3.1 Determinare stati e uscite di equilibrio associati all'ingresso costante $u(t) = 4$, $t \geq 0$ in funzione di α. **(1 punto)**

Vedi soluz. versione 1 per $\bar{x}_1 = 8$

$\bar{x}_2 = -2/\alpha$

$\bar{y} = 8 \times 16 = 128$

3.2 Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno agli stati di equilibrio determinati al punto precedente. **(2 punti)**

Vedi sol. versione 1 per $\delta \dot{x}_1$ e $\delta \dot{x}_2$

$$\delta y = \bar{u}^2\Big|_{ep} \delta x_1 + 2\bar{x}_1 \bar{u}\Big|_{ep} \delta u$$

$$\Big\downarrow \text{All'ep}$$

$$\delta y = 16\,\delta x_1 + 64\,\delta u$$

3.3 Al variare di α, con $\alpha \neq 0$, studiare la stabilità del sistema linearizzato e, se possibile, la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare di partenza. **(3 punti)**

Vedi sol. versione 1

4. Con riferimento alla classe dei sistemi dinamici lineari e tempo invarianti a tempo continuo, si dica, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false. **(5 punti)**

a) se interconnettiamo in modo arbitrario due sistemi, la stabilità dei singoli sottosistemi è condizione necessaria per la stabilità del sistema complessivo;

b) se il sistema è asintoticamente stabile, allora la sua risposta all'impulso tende al valore del guadagno;

c) condizione necessaria affinchè un sistema sia asintoticamente stabile è che i poli della sua funzione di trasferimento siano a parte reale negativa;

d) se il sistema è strettamente proprio, allora il suo grado relativo è maggiore di zero;

e) per uno dei punti precedenti a scelta si fornisca un esempio numerico a supporto della risposta data.

Vedi soluz. Versione 1

5. Con riferimento alla classe dei sistemi dinamici lineari e tempo invarianti a tempo continuo, si illustri cosa si intende per approssimazione a poli dominanti e quale sia il suo impiego nell'analisi di tali sistemi. **(5 punti)**

Vedi libro / appunti