Esercizio 1

Si consideri il sistema a tempo discreto:

$$\begin{cases} v(k+1) = -0.8v(k) + w(k) \\ w(k+1) = -0.25v(k) + 5u(k) \\ y(k) = v(k) - w(k) \end{cases}$$

(1) Scrivere il sistema in forma di stato

(2) Studiare la stabilità del sistema

(3) Determinare il valore di $\bar{u}$ tale per cui $\bar{y}=8$ sia l'uscita di equilibrio

(4) Determinare il movimento dell'uscita quando $u(k)=10$, $\forall k>0$ (stato iniziale nullo)

(1)

Una scelta ragionevole dello stato è $x(k) = \begin{bmatrix} v(k) \\ w(k) \end{bmatrix}$ (sono gli unici segnali di cui ho sia il valore in k che in $k+1$).

$$\rightarrow \begin{cases} x(k+1) = Fx(k) + Gu(k) \\ y(k) = Hx(k) + Iu(k) \end{cases}$$

Nota che il sistema è SISO, del 2° ordine $\rightarrow F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $G \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, $H \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, $I \in \mathbb{R}$

- il sistema è strettamente proprio $\rightarrow I=0$
- solo la seconda equazione dipende dall'input $\rightarrow G = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

Inoltre: $F = \begin{bmatrix} -0.8 & 1 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$

Nota che $v(k+1)$ e $w(k+1)$ hanno intuitivamente lo stesso significato di $\dot{v}(t)$ e $\dot{w}(t)$ in un sistema TC. Quindi, se vedo segnali in cui considero step successivi a k, quelli dovranno essere inglobati nello stato.

(2)

Per studiare la stabilità del sistema posso calcolare gli autovalori di F. Quindi:

$$\det(\lambda I - F) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda+0.8 & -1 \\ 0.25 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda(\lambda+0.8) + 0.25 = \lambda^2 + 0.8\lambda + 0.25$$

Sappiamo che le due radici hanno parte reale negativa ma dobbiamo capire se gli autovalori sono interni al cerchio unitario.

$$\lambda_{1,2} = -0.4 \pm \frac{1}{2}\sqrt{0.64-1} = -0.4 \pm \frac{j}{2}\sqrt{0.36} = -0.4 \pm j0.3$$

Devo quindi capire se $|\lambda_i| < 1 \rightarrow$ Dato che λ_1 e λ_2 sono complessi coniugati $|\lambda_1| = |\lambda_2|$

$\rightarrow$ calcoliamo $|\lambda_1| = \sqrt{0.16+0.09} = \sqrt{0.25} = 0.5 < 1$

Il sistema è quindi asintoticamente stabile.

(3)

A tempo discreto l'equilibrio è dato da $\bar{x}$ tale che $x(k+1)=\bar{x}$ e $x(k)=\bar{x}$. Dobbiamo quindi imporre:

$$\begin{cases} \bar{x} = F\bar{x} + G\bar{u} \\ \bar{y} = H\bar{x} \end{cases}$$

Dalla prima equazione $(I-F)\bar{x} = G\bar{u} \rightarrow \bar{x} = (I-F)^{-1}G\bar{u}$

$\Rightarrow \bar{y} = H(I-F)^{-1}G\bar{u}$

$$H(I-F)^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1.8 & -1 \\ 0.25 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2.05}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & 1.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2.05}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} = -\frac{4}{2.05}$$

$$\rightarrow \bar{y} = -\frac{4}{2.05}\bar{u} \Rightarrow 8 = -\frac{4}{2.05}\bar{u} \Rightarrow \bar{u} = -\frac{16.4}{4} = -4.1$$

Alternativamente:
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -0.8\bar{x}_1 + \bar{x}_2 & (1) \\ \bar{x}_2 = -0.25\bar{x}_1 + 5\bar{u} & (2) \\ \bar{y} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \end{cases}$$

Da (1) $\bar{x}_2 = 1.8\bar{x}_1$. Quindi, sostituendo nella equazione (2) ed in quella di uscita:

$$\begin{cases} 1.8\bar{x}_1 = -0.25\bar{x}_1 + 5\bar{u} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 - 1.8\bar{x}_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{u} = \frac{2.05}{5}\bar{x}_1 \\ \bar{y} = -0.8\bar{x}_1 \end{cases}$$

Dato che $\bar{y} = 8 \rightarrow \bar{x}_1 = -\frac{8}{0.8} = -10$

Quindi $\bar{u} = 0.41 \cdot \bar{x}_1 = -4.1$

(4)

Dalle equazioni della dinamica possiamo determinare il valore dello stato e dell'uscita.

k	$u(k)$	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$y(k)$
0	0	0	0	0
1	10	0	0	0
2	10	0	50	-50
3	10	50	50	0
4	10	10	-37.5	-27.5
5	10	-45.5	47.5	-93

Esercizio 2

Si consideri il sistema a tempo discreto:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + (1-\alpha) x_2(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}$$

(1) Studiare la stabilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

(2) Calcolare la fdt del sistema

(3) Calcolare i primi 4 valori della risposta allo scalino per $\alpha = 1$, utilizzando il metodo della lunga divisione

(4) Dire per quali valori di α è applicabile il teorema del valore finale e trovare il valore della corrispondente risposta a gradino a regime.

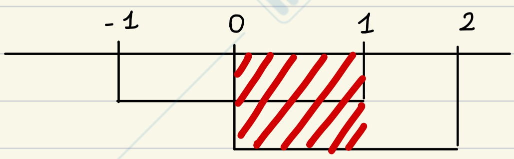
(1)

La matrice F del sistema è: $F = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & (1-\alpha) \end{bmatrix}$

Dato che la matrice è triangolare i suoi autovalori sono: $\begin{cases} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = 1-\alpha \end{cases}$

Visto che α è reale, affinché il sistema sia stabile asintoticamente entrambi gli autovalori devono essere interni al cerchio unitario:

$$\begin{cases} |\alpha| < 1 & \rightarrow \quad -1 < \alpha < 1 \\ |1-\alpha| < 1 & \rightarrow \quad -1 < 1-\alpha < 1 \Rightarrow \quad -2 < -\alpha < 0 \rightarrow \quad 0 < \alpha < 2 \end{cases}$$



Il sistema è asintoticamente stabile per $\boxed{0 < \alpha < 1}$

Nota che per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ il sistema è semplicemente stabile (ho 1 autovalore asintoticamen te stabile ed un autovalore semplicemente stabile). In tutti gli altri casi il sistema è instabile.

(2) Posso antitrasformare direttamente le equazioni di stato ed uscita, sfruttando il fatto che:

$$\mathcal{Z}[x(k+1)] = z X(z)$$

$$\begin{cases} z X_1(z) = \alpha X_1(z) + U(z) \\ z X_2(z) = X_1(z) + (1-\alpha) X_2(z) \\ y(z) = X_2(z) \end{cases}$$

$$(z-\alpha) X_1(z) = U(z) \rightarrow X_1(z) = \frac{1}{z-\alpha} U(z)$$

Dalla seconda equazione: $(z-1+\alpha) X_2(z) = X_1(z) \rightarrow X_2(z) = \frac{1}{z-1+\alpha} X_1(z)$

Notando che $y(k) = x_2(k)$ e sfruttando la f.d.t. che lega $X_1(z)$ all'ingresso, otteniamo quindi:

$$y(z) = \frac{1}{\underbrace{(z-\alpha)(z-1+\alpha)}_{\text{la funzione di trasferimento } G(z)}} U(z)$$

(3) Per $\alpha = 1$ si nota che il sistema è SEMPLICEMENTE STABILE e la funzione di trasferimento diventa:

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)z}$$

$$\rightarrow y(z) = G(z)U(z) = \frac{1}{\cancel{z}(z-1)} \frac{\cancel{z}}{z-1} = \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{z^2-2z+1}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & z^2 - 2z + 1 \\ \hline 1 - 2z^{-1} + z^{-2} & z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + \dots \\ \quad 2z^{-1} - z^{-2} & \\ \quad 2z^{-1} - 4z^{-2} + 2z^{-3} & \\ \qquad 3z^{-2} - 2z^{-3} & \\ \qquad 3z^{-2} - 6z^{-3} + 3z^{-4} & \\ \qquad\quad 4z^{-3} - 3z^{-4} & \end{array}$$

Sono arrivata al punto che mi serve per il calcolo dei campioni. In particolare, dato che non si hanno i termini in z^0 e z^{-1} allora:

$$y(0) = y(1) = 0$$

mentre: $y(2) = 1$, $y(3) = 2$, $y(4) = 3$ (coefficienti del polinomio risultante dalla lunga divisione)

(4) Il teorema del valore finale è applicabile quando i poli della $y(z)$ hanno modulo strettamente minore di 1 o pari a 1. In questo caso:

$$y(z) = G(z)U(z) = \frac{1}{(z-\alpha)(z-1+\alpha)} \frac{z}{z-1}$$

Quindi le condizioni di applicabilità sono soddisfatte se.

$\boxed{0 \leq \alpha \leq 1}$ ossia quando il sistema è asintoticamente o semplicemente stabile

$$y_\infty = \lim_{z \to 1} \cancel{(z-1)} \frac{1}{(z-\alpha)(z-1+\alpha)} \frac{z}{\cancel{z-1}} = \lim_{z \to 1} \frac{z}{(z-\alpha)(z-1+\alpha)} = \begin{cases} \text{se } 0<\alpha<1 & \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} = G(1) \\ \text{se } \alpha=0 \text{ o } \alpha=1 & \infty \end{cases}$$

Quindi nel caso precedente ($\alpha = 1$) la risposta a gradino diverge)

Esercizio 3

Si consideri il sistema LTI a TD del secondo ordine senza autovalori nascosti descritto dalla fdt

$$W(z) = \frac{z-0.1}{z(z+0.25)}$$

(1) studiare la stabilità del sistema
(2) scrivere l'equazione ricorsiva che descrive il legame ingresso uscita nel dominio del tempo
(3) calcolare i primi 4 campioni della risposta allo scalino unitario

(1) Per studiare la stabilità possiamo valutare il modulo dei due poli della funzione di trasferimento.

$$p_1 = 0 \qquad\qquad p_2 = -0.25$$

→ Entrambi i poli sono reali e con modulo minore di 1, sono quindi interni al cerchio unitario

→ Il sistema in esame è quindi asintoticamente stabile.

(2)

$$y(z) = \frac{z-0.1}{z(z+0.25)} U(z)$$

Possiamo moltiplicare entrambi i termini dell'uguaglianza per il denominatore, ottenendo:

$$y(z)[z(z+0.25)] = (z-0.1)U(z) \rightarrow y(z)(z^2+0.25z) = (z-0.1)U(z)$$

Antitrasformando, sfruttando la proprietà $\mathcal{Z}[x(k+\tau)] = z^{\tau} X(z)$:

$$y(k+2) + 0.25\, y(k+1) = u(k+1) - 0.1\, u(k)$$

→ $y(k+2) = -0.25\, y(k+1) + u(k+1) - 0.1\, u(k)$

Questa equazione permette di predire l'uscita 2 passi in avanti, ma noi siamo interessati a trovare un'espressione che leghi $y(k)$ a uscite ed ingressi passati.

→ E' sufficiente traslare tutti i segnali di due passi indietro:

$$y(k+2-2) = -0.25\, y(k+1-2) + u(k+1-2) - 0.1\, u(k-2)$$

$$\rightarrow \quad y(k) = -0.25\, y(k-1) + u(k-1) - 0.1\, u(k-2)$$

Alternativamente potevo riscrivere $W(z)$ come funzione di potenze negative di z e quindi trovare direttamente l'espressione precedente.

$$W(z) = \frac{z-0.1}{z^2+0.25z} = \frac{z-0.1}{z^2(1+0.25z^{-1})} = \frac{z^{-2}(z-0.1)}{(1+0.25z^{-1})} = \frac{z^{-1}-0.1z^{-2}}{1+0.25z^{-1}}$$

→ $(1+0.25z^{-1})\, Y(z) = (z^{-1} - 0.1\, z^{-2})\, U(z)$

Sfruttando quindi la proprietà $\mathcal{Z}[x(k-\tau)] = z^{-\tau} X(z)$ otteniamo:

$$y(k) + 0.25\, y(k-1) = u(k-1) - 0.1\, u(k-2)$$

→ $y(k) = -0.25\, y(k-1) + u(k-1) - 0.1\, u(k-2)$

(3) Per sostituzione, assumendo $y(k) = u(k) = 0,\ \forall k<0$:

$y(0) = -0.25\, y(-1) + u(-1) - 0.1\, u(-2) = 0$

$y(1) = -0.25\, y(0) + u(0) - 0.1\, u(-1) = 1$ $\quad u(0)=1$

$y(2) = -0.25\, y(1) + u(1) - 0.1\, u(0) = 0.7375$ $\quad u(1)=1$

$y(3) = -0.25\, y(2) + u(2) - 0.1\, u(1) = 0.715625$ $\quad u(2)=1$