Stabilità: criterio di Routh

Si consideri il seguente polinomio caratteristico

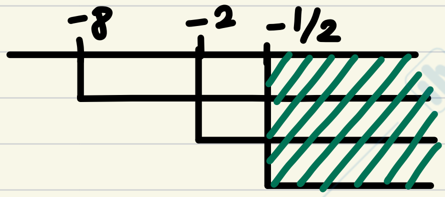
$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + (2+p)\lambda^2 + (1+2p)\lambda + p + 8$$

Dire per quali valori di p il sistema dinamico con matrice A è asintoticamente stabile.

Dato che il polinomio caratteristico è del 3° ordine sappiamo che condizione necessaria affinché il sistema sia stabile è che tutti i coefficienti del polinomio caratteristico siano non nulli e concordi. Dobbiamo quindi capire (dato che il coefficiente moltiplicativo del termine del 3° ordine è positivo) per quali valori di p vale:

$$\begin{cases} 2+p>0 & (a) \\ 1+2p>0 & (b) \\ p+8>0 & (c) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{lll} (a) & 2+p>0 \rightarrow & p>-2 \\ (b) & 1+2p>0 \rightarrow & p>-\frac{1}{2} \\ (c) & p+8>0 \rightarrow & p>-8 \end{array}\right\} p>-\frac{1}{2}$$



- Possiamo quindi dire che se $p \le -\frac{1}{2}$ allora non è verificata la condizione necessaria per la stabilità

→ il sistema non è asintoticamente stabile.

Per capire quando, per $p>-\frac{1}{2}$, il sistema è stabile, possiamo quindi usare il criterio di Routh.

(1)

Costruiamo la tabella per il polinomio caratteristico considerato

$$\begin{array}{|ll} 1 & 1+2p \\ 2+p & p+8 \\ a & \\ b & \end{array}$$

Cerchiamo a, che per definizione è dato da:

$$-\frac{1}{2+p}\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1+2p \\ 2+p & p+8 \end{bmatrix}\right) = -\frac{p+8-(1+2p)(2+p)}{2+p}$$

$$a = -\frac{p+8-(2+2p^2+5p)}{2+p} = \frac{2p^2+4p-6}{2+p} = \frac{2(p+3)(p-1)}{2+p}$$

Cerchiamo quindi b che per definizione è data da:

$$-\frac{1}{a}\det\left(\begin{bmatrix} 2+p & p+8 \\ a & 0 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{a}\left[-(p+8)a\right] = p+8$$

La tabella che si ottiene è quindi:

$$\begin{array}{|ll} 1 & 1+2p \\ 2+p & p+8 \\ \frac{2(p+3)(p-1)}{2+p} & \\ p+8 & \end{array}$$

Affinché il sistema sia asintoticamente stabile tutti i coefficienti nella prima colonna devono essere concordi e quindi:

$$\begin{cases} 2+p>0 & (a) \\ \frac{2(p+3)(p-1)}{2+p}>0 & (b) \\ p+8>0 & (c) \end{cases}$$

(a) $2+p>0 \rightarrow p>-2$
(c) $p+8>0 \rightarrow p>-8$

Risolviamo quindi la disequazione fratta in (b):

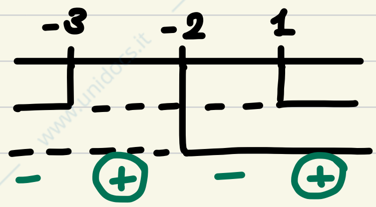
$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{2(p+8)(p-1)}{2+p}>0$$

Risolviamo • $N(p)>0 \rightarrow 2(p+3)(p-1)>0$ che è verificata per

$$\boxed{p<-3 \cup p>1}$$

• $D(p)>0 \rightarrow 2+p>0$ che è verificata per $p>-2$

Facciamo quindi il grafico dei segni



ottenendo così che (b) → $-3<p<-2 \cup p>1$.

Intersecando i risultati ottenuti per (a), (b) e (c) si ottiene quindi che la condizione del criterio di Routh è verificata per:

$$\boxed{p>1}$$ per la quale il sistema è asintoticamente stabile

Stabilità: sistema ordine 3, autovalori nulli

Studiare la stabilità di un sistema con matrice di stato

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Si noti che la matrice considerata è diagonale a blocchi, in quanto può essere scomposta come

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & -3 \end{bmatrix}$$

dove $A_{11}=\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Gli autovalori di questa matrice sono quindi dati dall'unione degli autovalori della matrice A_{11} e dallo scalare -3 (gli autovalori delle matrici sulla diagonale).

Si noti che -3 è un autovalore STABILE.
Per capire le caratteristiche del sistema dobbiamo quindi studiare gli autovalori di A_{11}.

Si noti che A_{11} è triangolare e quindi i suoi autovalori sono uguali agli elementi sulla diagonale. Di conseguenza:

$$\lambda_1=\lambda_2=0$$

A_{11} ha un autovalore nullo con molteplicità algebrica 2.

Al momento non possiamo però concludere niente sulla stabilità del sistema. Per farlo dobbiamo calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore, calcolando:

$$\operatorname{rank}(A-\lambda_1 I)=\operatorname{rank}(A)$$

Si noti che:

- $\alpha = 0$ allora $A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $rank(A) = 0$
- $\alpha \neq 0$ allora $A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $rank(A) = 1$

data la presenza della colonna nulla

La molteplicità algebrica dell'autovalore è:

$$mg = \underbrace{n}_{\substack{\text{ordine del sistema} \\ = ma \text{ (molteplicità algebrica)}}} - rank(A) \quad \begin{array}{ll} \nearrow \alpha = 0 & mg = 2 \\ \rightarrow \alpha \neq 0 & mg = 1 \end{array}$$

Per $\alpha = 0$, la molteplicità geometrica corrisponde a quella algebrica e quindi il sistema è **stabile**. Altrimenti, dato che la molteplicità geometrica è inferiore di quella algebrica, il sottosistema con matrice A_{11} è **instabile** e quindi l'intero sistema è **instabile**.

Stabilità: sistema di ordine 3

Studiare la stabilità del sistema con matrice di stato

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 5 & -2 & 4 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) Il primo approccio che possiamo sfruttare è quello di trovare il polinomio caratteristico di A e studiarne le radici.

Calcoliamo quindi:

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 6 \\ -5 & \lambda+2 & -4 \\ -6 & 3 & \lambda \end{bmatrix}\right) = (\lambda-3)[\lambda(\lambda+2)+12] + (-5\lambda) - 24 + 6[-15+6(\lambda+2)]$$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= (\lambda-3)[\lambda^2+2\lambda+12] - 5\lambda - 24 + 6[-3+6\lambda] = \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda - 36 - 5\lambda - 24 - 36 + 36\lambda = \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 + 37\lambda - 96 \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico **NON** verifica la condizione necessaria per l'asintotica stabilità, dato che i suoi coefficienti non sono concordi. Quindi il sistema è **instabile**.

(2) Si valuta la traccia della matrice A:

$$tr(A) = \sum_i A_{ii} = 3 - 2 = 1$$

Dato che condizione necessaria per l'asintotica stabilità è che $tr(A) < 0$, la condizione non è verificata e possiamo concludere che il sistema è instabile.

Stabilità: sistema non lineare

Si consideri il seguente sistema:

$$\ddot{y}(t) + y^2(t)\dot{y}(t) + k y(t) = u(t)$$

(1) Scrivere e classificare il sistema in forma di stato
(2) Determinare i punti di equilibrio associati a $u(t) = \bar{u}$, $t \geq 0$
(3) Linearizzare il sistema nell'intorno del punto di equilibrio
(4) Dire per quali valori di $\bar{u}$ e k il sistema linearizzato è asintoticamente stabile.

(1) Scegliamo come vettore di stato:

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

così che:
- $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$
- $\dot{x}_2(t) + x_1^2(t) x_2(t) + k x_1(t) = u(t)$ (vedi equazione iniziale)

$\rightarrow \dot{x}_2(t) = -(x_1(t) x_2(t) + k) x_1(t) + u(t)$

Il modello in forma di stato è quindi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -(x_1(t) x_2(t) + k) x_1(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Il sistema è:
- di ordine 2
- dinamico
- SISO
- nonlineare con $f(x,u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -(x_1 x_2 + k) x_1 + u \end{bmatrix}$
- tempo-invariante
- strettamente proprio

(2) Per trovare i punti di equilibrio per $u(t)=\bar{u}$, cerchiamo $\bar{x}$ tale che

$$f(\bar{x},\bar{u})=0 \rightarrow \begin{cases} \bar{x}_2=0 \\ -(\bar{x}_1\bar{x}_2+k)\bar{x}_1+\bar{u}=0 \quad (a) \end{cases}$$

$$(a) \quad -k\bar{x}_1=-\bar{u} \rightarrow \bar{x}_1=\frac{\bar{u}}{k}$$

Il solo punto di equilibrio del sistema è $\left(\begin{bmatrix} \bar{u}/k \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}\right)$.

(3) Si noti che il sistema è strettamente proprio, quindi $D=0$. Inoltre l'equazione di uscita è lineare e dipende solo da $x_1(t)$ e quindi $C=[1 \ 0]$.

Guardando le equazioni della dinamica dello stato si nota inoltre che queste sono lineari negli input e che B del sistema linearizzato è:

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cerchiamo infine A come:

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{(\bar{x},\bar{u})}$$

La prima riga della matrice A è uguale a $[0 \ \ 1]$ dato che l'equazione è lineare nello stato.
Infine:

$$\frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} = \frac{\partial(-(x_1x_2+k)x_1+u)}{\partial x_1} = -2x_1x_2-k$$

$$\frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} = \frac{\partial(-(x_1x_2+k)x_1+u)}{\partial x_2} = -x_1^2$$

$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\frac{\bar{u}^2}{k^2} \end{bmatrix}$ ed il sistema linearizzato è $\begin{cases} \delta\dot{x}(t)=A\delta x(t)+B\delta u(t) \\ \delta y(t)=C\delta x(t)+D\delta u(t) \end{cases}$

(4) Calcoliamo gli autovalori di A:

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ +k & \lambda + \frac{\bar{u}^2}{k^2} \end{bmatrix}\right) = \lambda\left(\lambda + \frac{\bar{u}^2}{k^2}\right) + k$$

$$\rightarrow \varphi(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\bar{u}^2}{k^2}\lambda + k$$

- se $k<0$ i coefficienti del polinomio caratteristico non sono concordi → non è verificata la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità e quindi il sistema linearizzato è instabile (così come l'equilibrio)
- se $k=0$ il polinomio caratteristico non è ben definito
- se $\bar{u}=0$
  - $k>0$ $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + k$ → gli autovalori sono complessi coniugati quindi il sistema linearizzato è semplicemente stabile (non si può concludere niente sull'equilibrio)
  - $k<0$ $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + k$ ha un autovalore instabile e quindi sistema linearizzato (e equilibrio) sono instabili
- se $k>0$ la condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità è verificata e quindi il sistema linearizzato è asintoticamente stabile, così come l'equilibrio.

Stabilità degli equilibri del pendolo

si noti che $k \geq 0$ mentre $M, \ell > 0$ e $g > 0$.

(1) Per $(\bar{x}, \bar{u}) = \left(\begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}, Mg\ell\right)$ $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k}{M\ell^2} \end{bmatrix}$

(2) Per $(\bar{x}, \bar{u}) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\right)$ $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{k}{M\ell^2} \end{bmatrix}$

(3) Per $(\bar{x}, \bar{u}) = \left(\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, 0\right)$ $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell & -\frac{k}{M\ell^2} \end{bmatrix}$

(1) la matrice A è triangolare e quindi gli autovalori della matrice sono gli elementi sulla sua diagonale, ossia:

$$\lambda_1 = 0 \quad e \quad \lambda_2 = -\frac{k}{M\ell^2}$$

- se $k \neq 0$ un autovalore è stabile, mentre l'altro è zero → il sistema linearizzato è semplicemente stabile (e non possiamo dedurre niente sul punto di equilibrio)
- se $k=0$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ho un autovalore doppio in 0.

ma=2 e dobbiamo calcolare

$$mg = ma - \text{rank}(A - \lambda I) = ma - \text{rank}(A)$$

$$\text{rank}(A) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

→ mg=1

Dato che ma > mg il sistema linearizzato è instabile (ma non posso dire niente nel punto di equilibrio)

(2) $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ g/l & \lambda + \frac{k}{Ml^2} \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \frac{k}{Ml^2}\lambda + \frac{g}{l}$

- se $k \neq 0$: coefficienti del polinomio caratteristico sono tutti concordi e non nulli
  → è verificata la condizione necessaria e sufficiente per la asintotica stabilità
  → il sistema linearizzato è asintoticamente stabile (così come l'equilibrio)
- se $k=0$ allora $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + g/l$ e $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{g/l}$
  → la matrice A del sistema linearizzato ha due autovalori complessi coniugati e quindi è semplicemente stabile (mentre non si può concludere niente sull'equilibrio)

(3) $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -g/l & \lambda + \frac{k}{Ml^2} \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \frac{k}{Ml^2}\lambda - \frac{g}{l}$

- se $k \neq 0$ non è verificata la condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità e quindi il sistema linearizzato è instabile (così come l'equilibrio)
- se $k=0$ allora $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - g/l \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{g/l}$. Il sistema linearizzato ha quindi un autovalore stabile ed uno instabile ed è quindi instabile (così come l'equilibrio).