Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{cases} x(k+1) = Fx(k) + Gu(k) \\ y(k) = Hx(k) \end{cases}$$

dove $F = \begin{bmatrix} 2\alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $H = [1 \quad 0 \quad 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(1) Discutere per quali valori di α il sistema è asintoticamente stabile
(2) Ponendo $\alpha = \frac{1}{4}$ determinare la fdt del sistema
(3) con $\alpha = \frac{1}{4}$, esprimere il legame ingresso-uscita nel dominio del tempo
(4) Calcolare i primi 5 valori $(y(0), \dots, y(4))$ della risposta del sistema all'impulso unitario a partire da stato iniziale nullo.

(1)

$$\det(\lambda I - F) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 2\alpha & -1 & -\alpha \\ 0 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 2\alpha)(\lambda^2 + \lambda) + 2\alpha\lambda = \lambda^3 + (1-2\alpha)\lambda^2 - \cancel{2\alpha\lambda} + \cancel{2\alpha\lambda}$$

$\rightarrow \lambda^3 + (1-2\alpha)\lambda^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2(\lambda + 1 - 2\alpha) = 0$

La matrice F ha un autovalore doppio in 0 ed uno in $\lambda = -1 + 2\alpha$. Affinché il sistema sia asintoticamente stabile:

$$|-1+2\alpha| < 1$$

$\rightarrow -1 < -1 + 2\alpha < 1$

$\rightarrow 0 < 2\alpha < 2$

$\rightarrow \boxed{0 < \alpha < 1}$

Il sistema è semplicemente stabile quando: $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$
Altrimenti è instabile.

(2)

Esplicito le equazioni di stato:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2\alpha x_1(k) + x_2(k) + \alpha x_3(k) \\ x_2(k+1) = u(k) \\ x_3(k+1) = -2x_1(k) - x_3(k) \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

Passando nel dominio della trasformata Z:

$$\begin{cases} z X_1(z) = 2\alpha X_1(z) + X_2(z) + \alpha X_3(z) & (1) \\ z X_2(z) = U(z) & (2) \\ z X_3(z) = -2X_1(z) - X_3(z) & (3) \\ y(z) = X_1(z) + X_2(z) \end{cases}$$

(2) $X_2(z) = \frac{U(z)}{z}$

(3) $(z+1) X_3(z) = -2X_1(z) \rightarrow X_3(z) = \frac{-2\alpha}{z+1} X_1(z)$

(1) $z X_1(z) = 2\alpha X_1(z) + \frac{U(z)}{z} - \frac{2\alpha}{z+1} X_1(z)$

$z(z+1) X_1(z) = 2\alpha(z+1) X_1(z) + \frac{z+1}{z} U(z) - 2\alpha X_1(z)$

$(z^2 + (1-2\alpha) z - \cancel{2\alpha} + \cancel{2\alpha}) X_1(z) = \frac{z+1}{z} U(z)$

$\rightarrow X_1(z) = \frac{z+1}{z(z^2+(1-2\alpha)z)} U(z)$

$y(z) = \left[\frac{z+1}{z^2(z+1-2\alpha)} - \frac{2}{z^2(z+1-2\alpha)} \right] U(z)$

Per $\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow y(z) = \left[\frac{z+1}{z^2(z+0.5)} - \frac{2}{z^2(z+0.5)} \right] U(z) = \frac{z-1}{z^2(z+0.5)} U(z)$

(3) $y(z) = \frac{z-1}{z^2(z+0.5)} U(z) = \frac{z^{-2}(z-1)}{(z+0.5)} U(z) = \frac{z^{-3}(z-1)}{1+0.5z^{-1}} = \frac{z^{-2} - z^{-3}}{1+0.5z^{-1}}$

$\rightarrow y(k) = -0.5y(k-1) + u(k-2) - u(k-3)$

(4)

k	$u(k)$	$y(k)$
0	1	0
1	0	0
2	0	1
3	0	-1.5
4	0	0.75

Esercizio 2

Si consideri il sistema LTI a TD del secondo ordine senza autovalori nascosti descritto dalla fdt

$$W(z) = \frac{z - 0.5}{(z+0.1)(z+0.5)}$$

(1) Studiare la stabilità del sistema
(2) Calcolare i primi 3 campioni della risposta all'impulso con il metodo della lunga divisione.

(1) $p_1 = -0.1$, $p_2 = -0.5$ } entrambi interni al cerchio unitario

→ il sistema è asintoticamente stabile

(2)

$$y(z) = W(z)\underbrace{U(z)}_{1} = W(z)$$

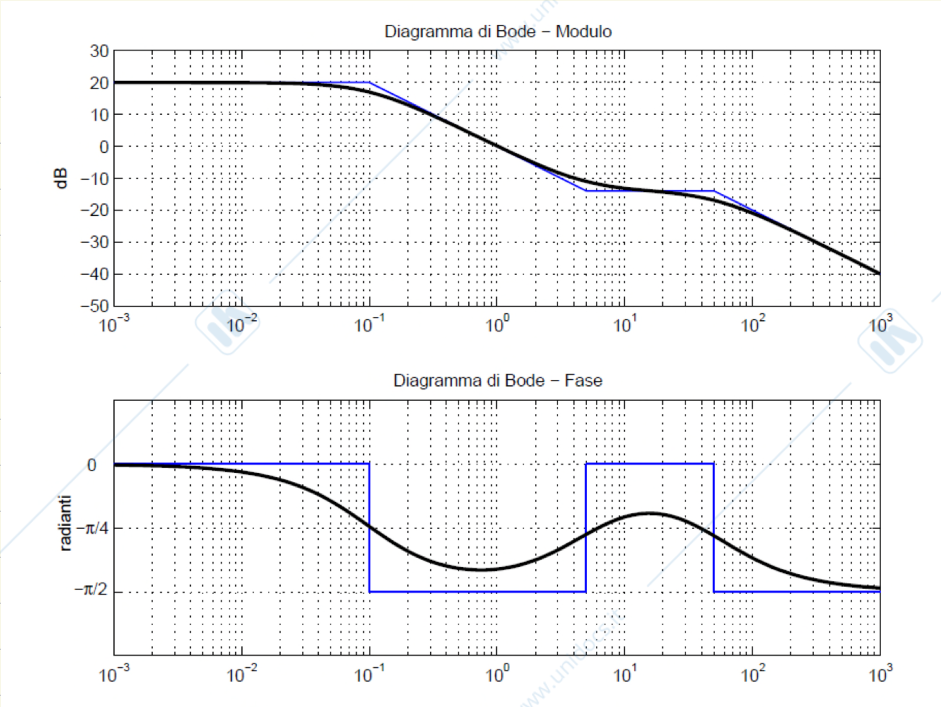
$$\begin{array}{l|l}
z - 0.5 & z^2 + 0.6z + 0.05 \\
\underline{z + 0.6 + 0.05z^{-1}} & z^{-1} - 1.1z^{-2} + 0.61z^{-3} + \dots \\
-1.1 - 0.05z^{-1} & \\
\underline{-1.1 - 0.66z^{-1} - 0.055z^{-2}} & \\
0.61z^{-1} + 0.055z^{-2} & \\
\underline{0.61z^{-1} + 0.366z^{-2} + 0.0305z^{-3}} & \\
-0.311z^{-2} - 0.0305z^{-3} &
\end{array}$$

→ $y(0) = 0$
$y(1) = 1$
$y(2) = -1.1$
$y(3) = 0.61$

Esercizio 3

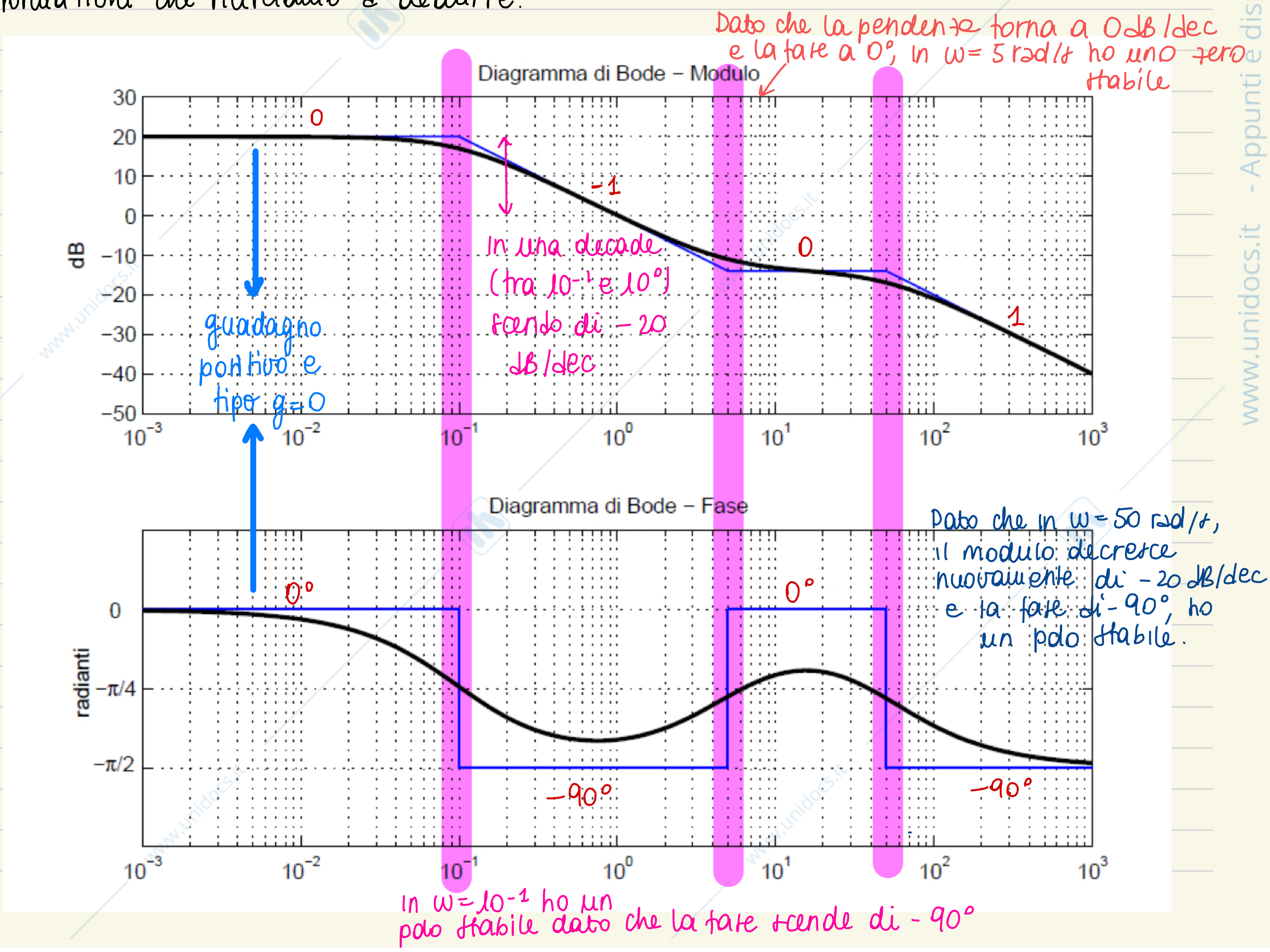
In figura sono riportati i diagrammi di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare, tempo invariante, di ordine 2, con ingresso u ed uscita y.

(1) Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(a) il sistema è strettamente proprio
(b) il sistema è asintoticamente stabile
(c) il sistema è a fase minima



(a) Dato che $|G(j\omega)|_{dB} \to -\infty$ quando $\omega \to \infty$, allora la $G(s)$ ha necessariamente più poli che zeri, e quindi il sistema è strettamente proprio. → VERO

Per rispondere a (b)-(c) cerchiamo esplicitamente la $G(s)$, riportando sui diagrammi tutte le informazioni che riusciamo a dedurre.



Dato che $g=0$ → allora fino a $\omega = 10^{-1}$ rad/s (quando fase e modulo cambiano):

$$|G(j\omega)|_{dB} \cong 20 \log |\mu|$$

Dal diagramma di Bode si nota che $|G(j\omega)|_{dB} \cong 20\ dB \quad \omega \leq 10^{-1} \frac{rad}{s}$

$$\rightarrow 20 \log |\mu| = 20 \log \mu = 20\ dB$$

$\mu > 0$ dato che $\angle G(j\omega) = 0°$, $\omega \leq 10^{-1}$ rad/s

→ $\mu = 10$

Come riportato sul diagramma:
- $G(s)$ ha un polo stabile $p = -0.1$.
- $G(s)$ ha uno zero stabile $z = -5$
- $G(s)$ ha un polo stabile in $p = -50$

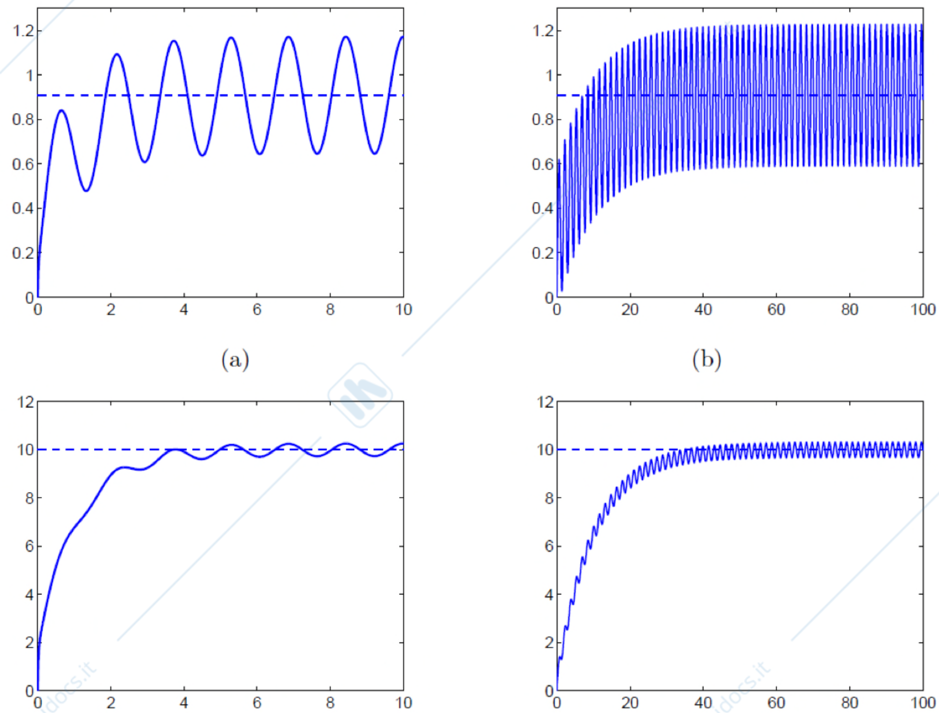
non ho autovalori nascosti (2 poli per un sistema del 2°ordine)

$$G(s) = 10 \frac{(1+0.2s)}{(1+10s)(1+0.02s)}$$

Visti i poli, il sistema è asintoticamente stabile → (b) VERO

Visto che poli e zeri sono stabili e il guadagno è positivo, il sistema è a fase minima.
→ (c) VERO

(2) Dire quale dei seguenti grafici rappresenta la risposta forzata del sistema all'ingresso $u(t) = sca(t) + \sin(\omega t)$.



(a) (b) (c) (d)

Per trovare la risposta posso applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Quindi:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

dove:
- $y_1(t)$ è la risposta dovuta a $u_1(t) = sca(t)$ (a)
- $y_2(t)$ è la risposta dovuta a $u_2(t) = sin(\omega t)$ (b)

(a) Dato che il sistema è asintoticamente stabile, posso trovare $y_{1\infty}$ con il TVF. Inoltre, dato che il sistema è di tipo $g=0$, allora $y_{1\infty} = G(0) = 10$ (lo scalino ha ampiezza unitaria)

→ Possiamo già scartare (a) e (b).

Inoltre, allo scalino, $T_a \simeq \frac{5}{|p_{dom}|}$ con il polo dominante $p_{dom} = -0.1$.

Il tempo di assestamento allo scalino è quindi $T_a \simeq 50\ s$.

Dato che la sinusoide lascia l'uscita in oscillazione ma non modifica T_a, allora la risposta corretta è (d).

Si noti che l'effetto a regime di u_2 poteva essere valutato tramite il teorema della risposta in frequenza, ossia:

$$y_{2\infty}(t) = \underbrace{|G(j\omega)|}\ sin(\omega t + \underbrace{\angle G(j\omega)})$$

potevano essere trovati con Bode.

→ Non serve per decidere.

(c) Se il sistema $G(s)$ è retroazionato (retroazione negativa) dire quali delle figure precedenti rappresenta la risposta forzata del sistema per $y^o(t) = sca(t) + sin(\omega t)$

In base a questa scelta, $L(s) = G(s)$. Quindi:
- $P = 0$
- $\exists!\ \omega_c$

} vedi Bode

Riprendendo i diagrammi di Bode, si nota che $\omega_c = 1\ rad/s$, in corrispondenza della quale $\varphi_c > -90°$. Quindi $\varphi_m = 180° - |\varphi_c| > 90°$ ($\varphi_m > 75°$)

Dato che $\mu > 0$, il sistema retroazionato è stabile.
Dato che $L(s)$ è di tipo $g=0$, so che avrò un errore non nullo al gradino a regime. In particolare:

$$y_\infty = \lim_{s \to 0} \cancel{s} F(s) \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s \to 0} \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\mu_G}{1+\mu_G}$$

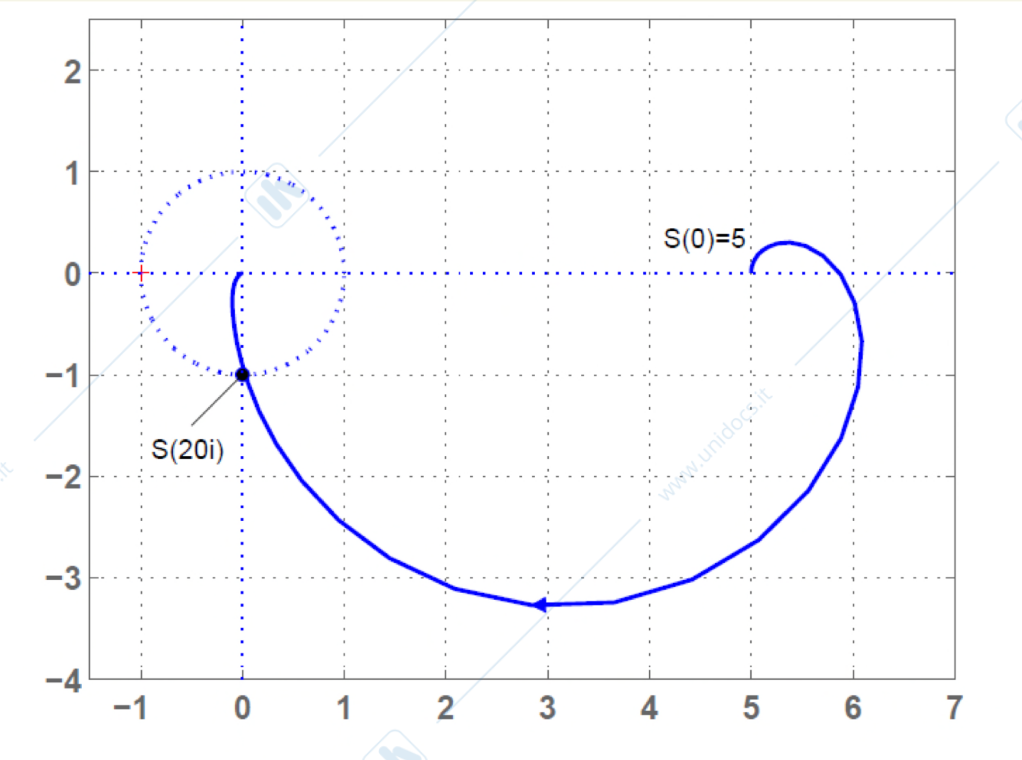
$\varphi_m > 75°$ → Approssimo $F(s)$ come:

$$F(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c} \cdot \frac{\mu_G}{1+\mu_G} = \frac{10/11}{s+1}$$

In questo caso:
- $y_{1\infty} = 10/11$ (con $y_1^o(t) = sca(t)$) } Da questo si nota che
- allo scalino, $t_a \simeq 5\,s$ } la risposta è la (a)
- $y_{2\infty}(t) = |F(j\omega)| \sin(\omega t + \angle F(j\omega))$

Esercizio 4

In figura è riportato il diagramma polare della funzione di trasferimento $S(s)$ di un sistema lineare tempo invariante asintoticamente stabile a poli reali ($S(s)$ non indica la funzione di sensitività. Si noti che $S(s)$ soddisfa la condizione $|S(j10)| = 1$ evidenziata in figura tramite il tracciamento della circonferenza di centro unitario con raggio nell'origine



Il sistema viene retroazionato (retroazione negativa).

(1) Verificare che il sistema retroazionato soddisfi il criterio di Bode per l'asintotica stabilità.

(2) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema retroazionato.

(3) Si supponga che sia presente un ritardo τ nell'anello di retroazione. Dire se il sistema retroazionato è asintoticamente stabile quando $\tau = 0.1\,s$.

(1) Dato che non ci sono asintoti nel diagramma polare e che $F(0) \neq 0 \to g = 0$.
Comunque nella base del testo: $P = 0$.
Si nota quindi che $|F(j\omega)| = |L(j\omega)| = 1$ in $\omega = 20$. Quindi $\exists!\ \omega_c = 20$ rad/s.
→ Sono verificate le condizioni di applicabilità del criterio.

Si nota quindi che: $\mu = F(0) = 5 > 0$

$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| \simeq 90° > 0°$

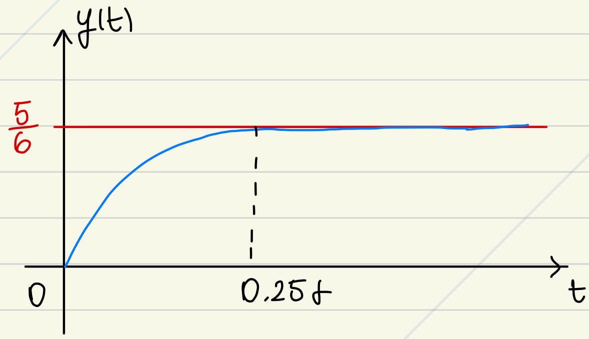
dal diagramma polare $\simeq -90°$

→ Abbiamo verificato l'asintotica stabilità.

(2)
Dato che $g_L = 0$ e $\varphi_m > 75°$ allora:

$$F(s) \simeq \frac{\omega_c}{s+\omega_c} \cdot \frac{\mu_F}{1+\mu_F} = \frac{\overset{10}{\cancel{20}}}{s+20} \cdot \frac{5}{\cancel{6}\,3} = \frac{50/3}{s+20}$$

- $y(0) = 0$
- $y_\infty = \lim_{s \to 0} \frac{50/3}{s+20} = \frac{5}{6}$
- $T_a \simeq \frac{5}{20} = 0.25$ s



(3)
Sappiamo che il ritardo modifica solo il margine di fase. Quindi:

$$\varphi_c = \underline{/F(j\omega_c)} - \omega_c \cdot 10 \cdot \frac{180°}{\pi} = -90°$$

Con l'aggiunta del ritardo il sistema retroazionato diventa instabile.

Esercizio 5

Dato un sistema dinamico a tempo continuo senza autovalori nascosti con funzione di trasferimento

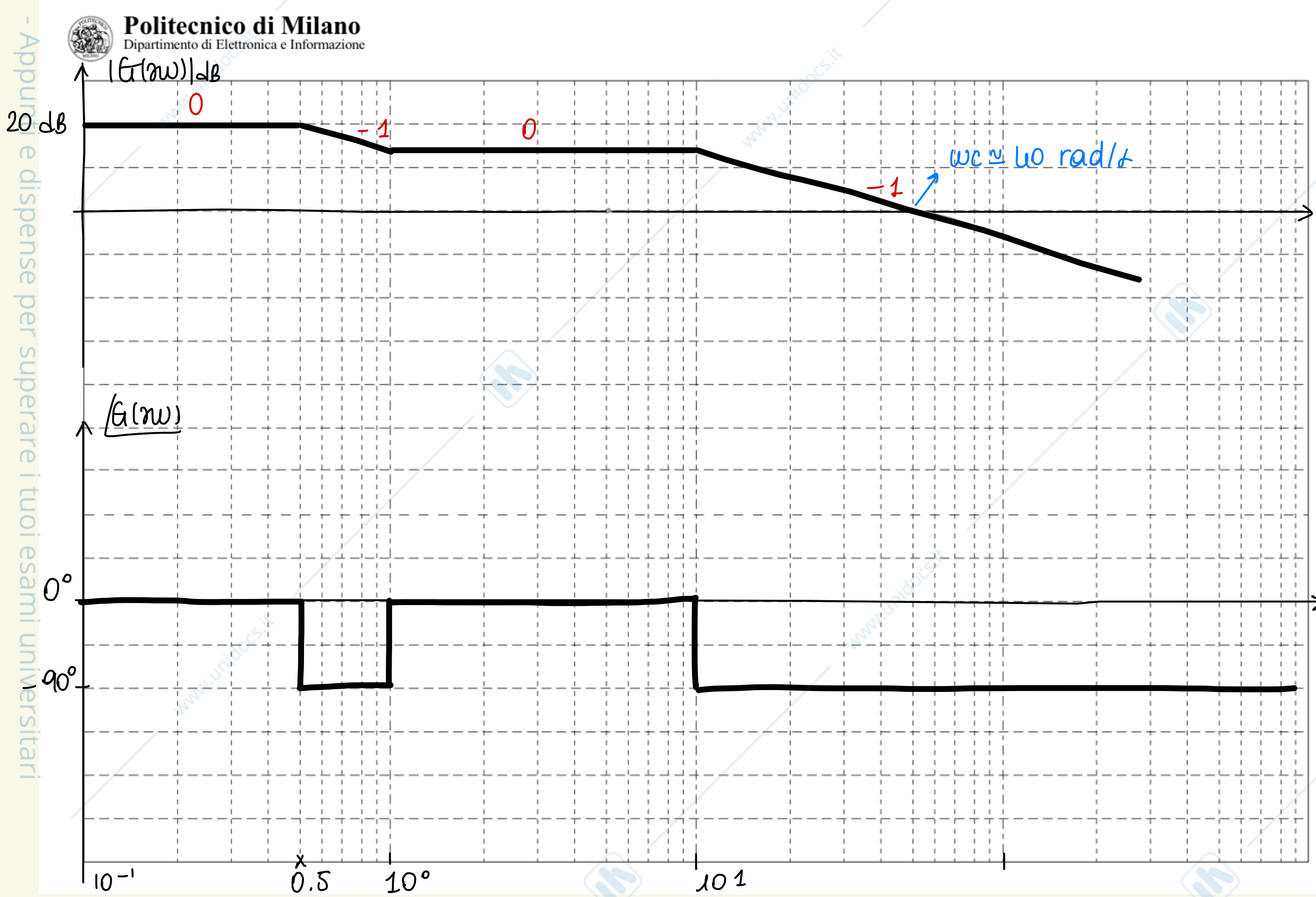
$$G(s) = 10 \frac{(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

(1) Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase di $G(j\omega)$ e dire se il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è asintoticamente stabile.

Si consideri adesso il sistema retroazionato, con $L(s) = R(s)\,G(s)$ ed $R(s) = 1$.

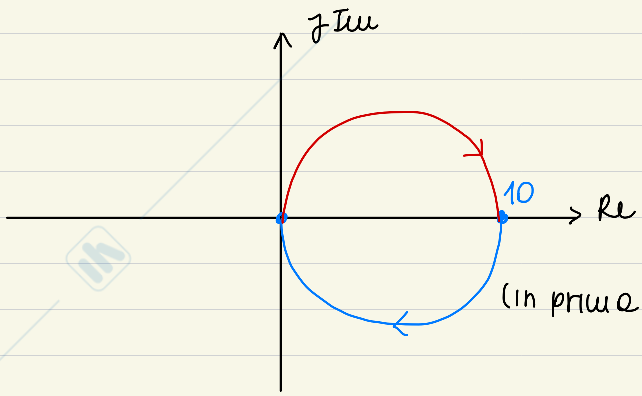
(2) Dire se il criterio di Bode è applicabile.
(3) Studiare la stabilità del sistema retroazionato
(4) Tracciare il diagramma di Nyquist (qualitativo) e determinare il margine di guadagno
(5) Dire quanto vale l'errore statico a regime per $y^o(t) = sca(t)$.

(1) Dato che $P=0$ $(p_1 = -10,\ p_2 = -0.5)$, il sistema è asintoticamente stabile.



(2) $P=0$ e ω_c esiste ed è unica $\rightarrow$ il criterio di Bode è applicabile.
(3) La fase di $L(j\omega) = G(j\omega)$ è sempre maggiore di $-90°$. Dato che $P=0$, per il criterio della piccola fase il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

(4) Dato che $\angle L(j\omega) \geq -90°$, allora ω_π non esiste e quindi il margine di fase è $K_m = \infty$.



(in prima approssimazione)

(5) Dato che $G(t)$ è di tipo $g=0$, allora:

$$e_\infty \neq 0$$

In particolare:

$$e_\infty = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{1+G(t)} = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11}.$$

Nota che posso applicare il TVF perché il sistema è asintoticamente stabile.