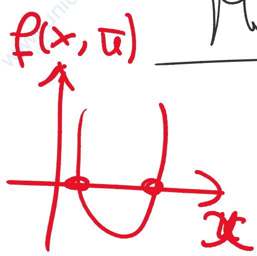
giovedì 12 marzo 2020 13:39

MOVIM. di EQUIL. SISTEMI (LTI)



$$\dot x = f(x,u) \qquad y = g(x,u)$$

NON LIN T.I

$\dot x = 0$

$$\begin{cases} 0 = f(\bar x, \bar u) \\ \bar y = g(\bar x, \bar u) \end{cases}$$

$u(t) = \bar u$ COST.

$\exists\ \bar x, \bar y$ COSTANTI MOVIM. del sistema

LTI

$\bar u =$ cost. $\forall t \geq 0$

$\downarrow$

$\dot x = 0$

$$\dot x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

STAT di EQ

$$0 = A\bar x + B\bar u$$

LO STATO e L'USC. di EQ $\bar x$, e $\bar y$

$\exists !$ SSE

$\exists A^{-1}$

$\det(A) \neq 0$

(*) $A\bar x = -B\bar u \Rightarrow \bar x = -A^{-1}B\bar u$

USCITA di EQ.

$$\bar y = C\bar x + D\bar u = [-CA^{-1}B + D]\bar u$$

Se A NON è INVERTIBILE (*) PUÒ AMMETTERE

$\exists !$

- NESSUNA SOLUZ.
- ∞ SOLUZIONI

$\exists !$ | ∞ SOLUZIONI

> 1 AMPLIFICA

< 1 ATTENUA

$$\bar{y} = \underbrace{\boxed{\left[-CA^{-1}B + D\right]}}_{\text{GUADAGNO STATICO}} \bar{u} \quad \neq 1$$

GUADAGNO STATICO ← EQUILIBRIO

$$\left[-CA^{-1}B + D\right] = \bar{y}/\bar{u}$$

ESEMPIO

PIANO SENZA ATTRITO $\boxed{M = 1} \longrightarrow F$ MOTO RETTILINEO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\cancel{\frac{k}{M}x_1} - \cancel{\frac{h}{M}x_2} + \frac{1}{M=1}u \end{cases} \qquad h = k = 0$$

$M = 1\ kg$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

LTI

$u(t) = \bar{u}$ cost.

EQ

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \boxed{0 = \bar{u}} \end{cases}$$

$y = x_1$ $\nexists A^{-1}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $y = x_1$

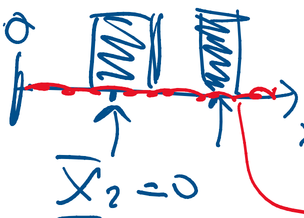
$\rightarrow \bar{u} \neq 0$ NESSUNA SOLUZ.

$\rightarrow \boxed{\bar{u} = 0}$

$$\begin{cases} \boxed{\bar{x}_2 = 0} & \text{VEL. NULLA} \\ 0 = 0 \leftarrow \text{BANALE} \end{cases}$$

$\bar{x}_1$ QUALSIASI

∞ STATI EQ.



$$\rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\alpha, 0) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

MOVIMENTO per sistemi LTI

MOVIMENTO per sistemi LTI

NOTI $u(t),\ t \geq 0$ e C.I. $x(0) = x_0$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x(t),\ y(t)\quad t \geq 0}$$

EQ. DIFFERENZIALI

es SCALARE, $\underbrace{\text{SENZA FORZANTE}}_{\text{LIBERO}} \Rightarrow u(t) = 0$

$a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = a\,x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Longrightarrow x(t) = e^{at} x_0,\ t \geq 0$$

es 2 SCALARE, FORZATO $\rightarrow u(t) \neq 0$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t) \\ x(0) = x_0,\ u(t),\ t \geq 0 \text{ NOTA} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{at} x_0}_{\substack{\text{LIBERO} \\ \text{(NON FORZATO)}}} + \underbrace{\int_0^t e^{a(t-\tau)}\, b\,u(\tau)\,d\tau}_{\text{FORZATO}}}$$

MOVIM. DELLO STATO

STATO (NON FORZATO) FORZATO

MOVIMENTO nel CASO VETTORIALE

$\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx + Du$

$$\begin{cases} x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \\ y(t) = C e^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau + D u(t) \end{cases}$$

FORMULA DI LAGRANGE

NOTI la funz. di ingr. $u(t)$ e le C.I. $x(0) = x_0$

e^{At} ESPONENZIALE di MATRICE

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I_{m \times m} + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$$

$$e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$I = \begin{array}{c} \\ m \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}_{m}$$

PRINCIPIO di SOVRAPP. EFFETTI PER SISTEMI DINAMICI L.T.I

SISTEMI STATICI $y = f(u)$

$u^{I} \to y^{I}$
$u^{II} \to y^{II}$

$u^{III} = \alpha u^{I} + \beta u^{II}$
$y^{III} = \alpha y^{I} + \beta y^{II}$

SIST. DINAMICI

SIST. DINAMICI

Se consid.

$$\begin{cases} u(t) = u^{I}(t) \\ x(0) = x_0^{I} \end{cases} \Rightarrow x^{I}(t),\ y^{I}(t)$$

$$\begin{cases} u(t) = u^{II}(t) \\ x(0) = x_0^{II} \end{cases} \Rightarrow x^{II}(t),\ y^{II}(t)$$

$$\begin{cases} u^{III}(t) = \alpha u^{I}(t) + \beta u^{II}(t) \\ x_0^{III} = \alpha x_0^{I} + \beta x_0^{II} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{III}(t) = \alpha x^{I}(t) + \beta x^{II}(t) \\ y^{III}(t) = \alpha y^{I}(t) + \beta y^{II}(t) \end{cases}$$

Il MOV. di STATO e USCITA associato ad una COMB. LIN. di INGRESSI e C.I. è dato dalla COMB. LIN. dei movimenti parziali, CON I MEDESIMI coefficienti

Se scegliamo

PSE

$$\begin{cases} u^{I}(t) = 0 \\ x^{I}(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{I}(t) = x_L(t) \\ y^{I}(t) = y_L(t) \end{cases}$$

NON FORZATO ⇓ MOV. LIBERO

$$\Rightarrow \begin{cases} u^{II}(t) = u(t) \\ x^{II}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{II}(t) = x_F(t) \\ y^{II}(t) = y_F(t) \end{cases}$$

MOV. FORZATO

$$y(t) = y_F(T)$$

$$\begin{cases} u^{III}(t) = u^{I}(t) + u^{II}(t) \\ x(0)^{III} = x(0)^{I} + x(0)^{II} \end{cases} \qquad \boxed{\alpha = \beta = 1}$$

$$\equiv$$

$$\begin{cases} u^{III}(t) = 0 + u(t) = u(t) \\ x(0)^{III} = x_0 + 0 = x_0 \end{cases}$$

$$x^{III}(t) = x^{I}(t) + x^{II}(t)$$

MOV. COMPLESSIVO $\rightarrow$ $x(t) \overset{!}{=} \boxed{x_L(t) + x_F(t)}$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$

$$y^{III}(t) = y^{I}(t) + y^{II}(t)$$

$$y(t) = \boxed{y_L(t) + y_F(t)}$$

FORM. LAGRANGE

$u(t)$, x_0 $\rightarrow$ $x(t) = \underbrace{e^{At} x_0}_{\text{MOV. LIBERO}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau}_{\text{MOV. FORZATO}}$

$\dot{x} = Ax + \cancel{Bu}$, $x(0) = x_0$ $\leftarrow$ $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ u(t) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} u(t) \text{ generico} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $\quad e^{At} x_0 = 0$

$\dot{x} = Ax + Bu$

ESEMPIO

$x, u, y \in \mathbb{R}$

$$\dot{x} = 3x + 4u \qquad x(0) = 2$$

$$y = 5x + 3u \qquad u(t) = e^{-t}, \ t \geq 0$$

$y \quad y = 5x + 3u \qquad u(t) = e^{-t}, \; t \geq 0$

MOVIMENTO DI STATO E USCITA

$$x(t) = \underbrace{e^{At} x_0}_{\text{LIBERA}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau}_{\text{FORZATA}}$$

$a=3$ I° ORDINE
$b=4$ LTI
$c=5$
$d=3$

$$= e^{3t} \times 2 + \int_0^t e^{3(t-\tau)} 4 e^{-\tau}\, d\tau =$$

$$= \overbrace{2e^{3t}}^{\text{LIB.}} + \overbrace{\int_0^t 4 e^{3(t-\tau)} e^{-\tau}\, d\tau}^{\text{FORZATA}} =$$

$$= 2e^{3t} + 4e^{3t} \int_0^t e^{-4\tau}\, d\tau =$$

$$= 2e^{3t} + 4e^{3t} \left[\frac{e^{-4\tau}}{-4} \right]_0^t =$$

$$= 2e^{3t} - e^{3t} \left[e^{-4t} - 1 \right] = 2e^{3t} - e^{-t} + e^{3t}$$

$$= \boxed{3e^{+3t} - e^{-t}} \quad t \geq 0$$

MOV. STATO

$$y = 5x + 3u = 5\left(3e^{3t} - e^{-t}\right) + 3e^{-t} =$$

$$= \ldots = \boxed{15e^{3t} - 2e^{-t}} \quad t \geq 0$$

MOV. USCITA

$$\overset{!}{=} \dots = \boxed{15e^{-3t} - 2e^{-t}}, \quad t \geq 0$$

MOV. USCITA