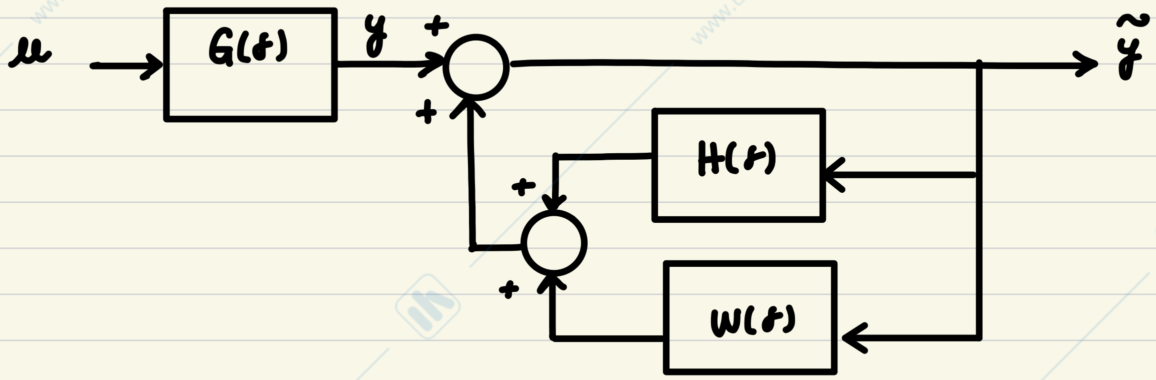
Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + 3u(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

(1) Determinare (ed analizzare) la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema

(2) Dato il seguente sistema, con $H(s) = -\frac{1}{s+2}$ e $W(s) = -\frac{1}{s+4}$, determinare la fdt da u a $\tilde{y}$ e valutare (se possibile) la stabilità del sistema interconnesso.



(1) Utilizziamo le proprietà della trasformata di Laplace e, dato che le condizioni iniziali non sono specificate, assumiamo $x(0) = 0$.

$$\begin{cases} sX_1(s) = -2X_1(s) + X_2(s) + U(s) & \text{(a)} \\ sX_2(s) = -3X_2(s) + 3U(s) & \text{(b)} \\ Y(s) = X_2(s) & \text{(c)} \end{cases}$$

(b) è indipendente da $X_1(s)$ e, quindi, permette di calcolare la funzione di trasferimento tra $X_2(s)$ e l'ingresso $U(s)$:

$$(s+3)X_2(s) = 3U(s) \rightarrow X_2(s) = \frac{3}{s+3} U(s)$$

Guardando l'equazione di uscita si nota che l'output dipende solo da $x_2(t)$. Quindi dalla relazione precedente si ottiene:

$$\boxed{Y(s) = \frac{3}{s+3} U(s)}$$

Si noti che il sistema è:
- strettamente proprio → la funzione di trasferimento è strettamente propria
- del 2° ordine → la funzione di trasferimento è del 1° ordine

→ Questo implica che da $G(s) = \frac{3}{s+3}$ non siamo in grado di vedere entrambi gli autovalori del sistema. Un modo del sistema è nascosto.

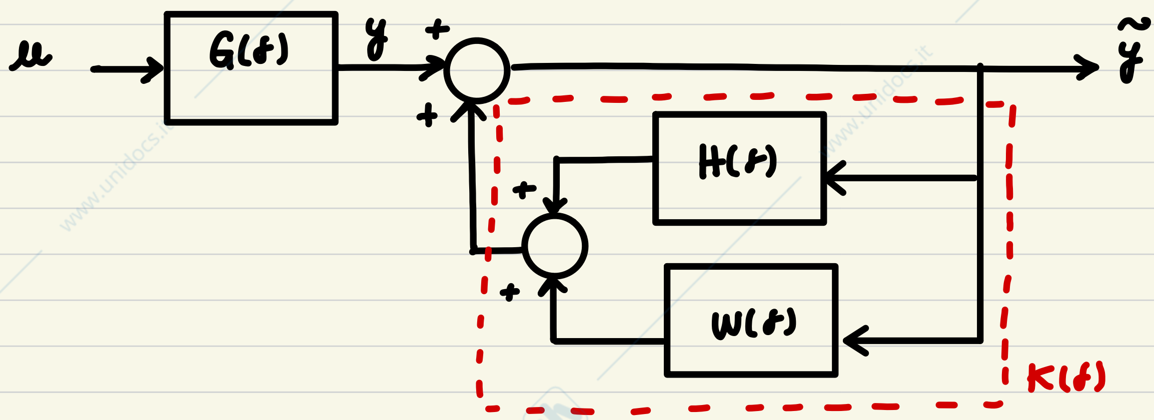
In particolare, il sistema originario è triangolare (potevo risolverlo a cascata) e la sua matrice A associata è:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$ λ_2 è un polo di $G(s)$
→ l'autovalore nascosto è λ_1

Entrambi gli autovalori sono asintoticamente stabili.
Non potrei trarre conclusioni sulla stabilità del sistema guardando solo la funzione di trasferimento G(s) ma, dato che conosciamo il modello del sistema in forma di stato, possiamo dire che il sistema è asintoticamente stabile.

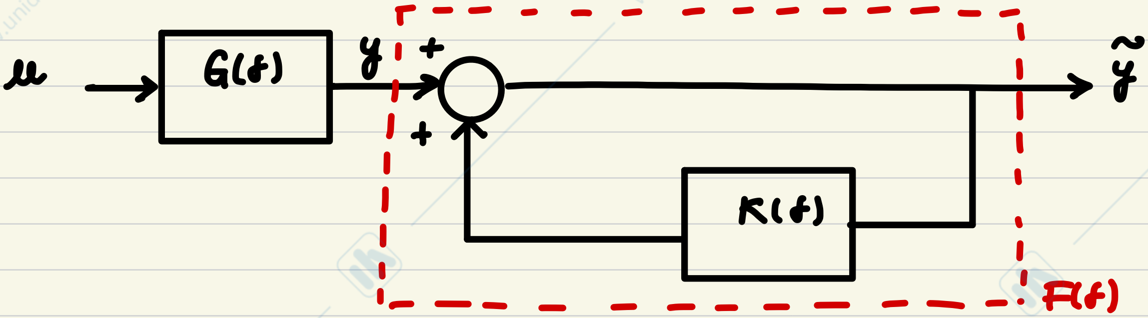
(2)



I blocchi H(s) e W(s) hanno lo stesso ingresso e la loro uscita è sommata → H(s) e W(s) sono in parallelo. I due blocchi possono essere semplificati e ridotti in un unico blocco K(s) con funzione di trasferimento:

$$K(s) = H(s) + W(s)$$

Possiamo quindi riscrivere il sistema in forma semplificata come segue

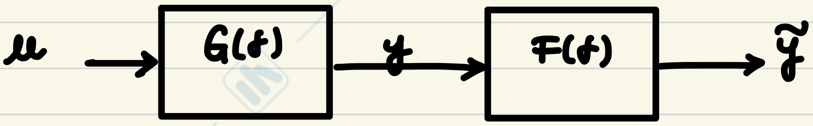


Il blocco K(s) è in retroazione. In particolare abbiamo una retroazione positiva con un blocco a guadagno unitario in catena diretta e K(s) in retroazione. Possiamo quindi semplificare la parte dello schema evidenziata in rosso. Per definizione F(s) è data da:

$$F(s) = \frac{1}{1-K(s)} = \frac{1}{1-(H(s)+W(s))}$$ → f.d.t. catena diretta

sulla base della definizione di K(s)

Lo schema precedente può quindi essere nuovamente semplificato come:



G(s) e F(s) sono in serie. Quindi la funzione di trasferimento tra $\tilde{y}$ ed u è:

$$\tilde{y}(s) = G(s)\cdot F(s)\, U(s)$$

$$G(s)\cdot \frac{1}{1-(H(s)+W(s))}$$

$$\rightarrow H(s)+W(s) = -\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4} = -\frac{s+4+s+2}{(s+2)(s+4)} = -\frac{2s+6}{(s+2)(s+4)} = -\frac{2(s+3)}{(s+2)(s+4)}$$

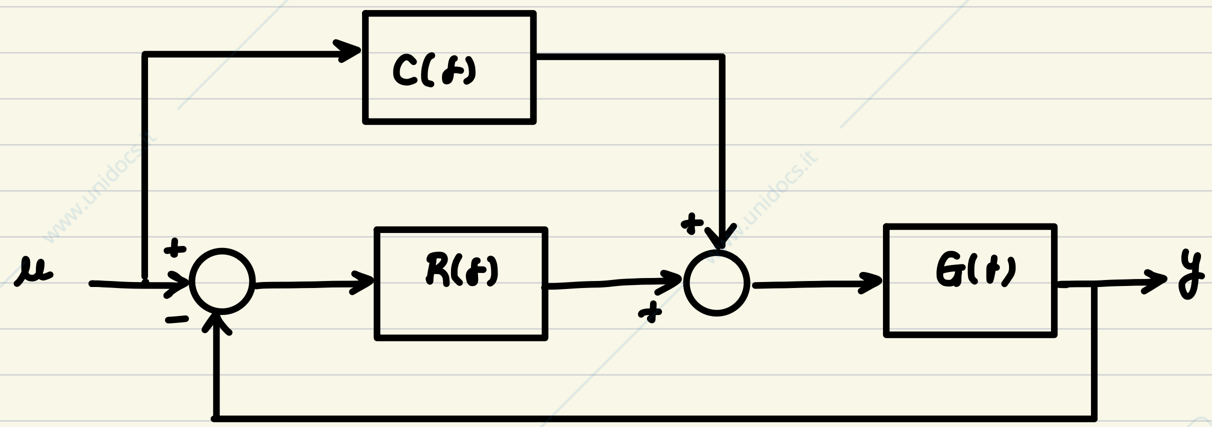
$$\rightarrow F(s) = \frac{1}{1+\frac{2(s+3)}{(s+2)(s+4)}} = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+2)(s+4)+2(s+3)}$$

$$D_F(s) = (s+2)(s+4)+2(s+3) = s^2+6s+8+2s+6 =$$
$$= s^2+8s+14 = (s+4-\sqrt{2})(s+4+\sqrt{2})$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+4-\sqrt{2})(s+4+\sqrt{2})} \rightarrow \tilde{y}(s) = \underbrace{\frac{(s+2)(s+4)}{(s+4-\sqrt{2})(s+4+\sqrt{2})}\cdot\frac{3}{s+3}}_{\text{f.d.t. del sistema interconnesso}} U(s)$$

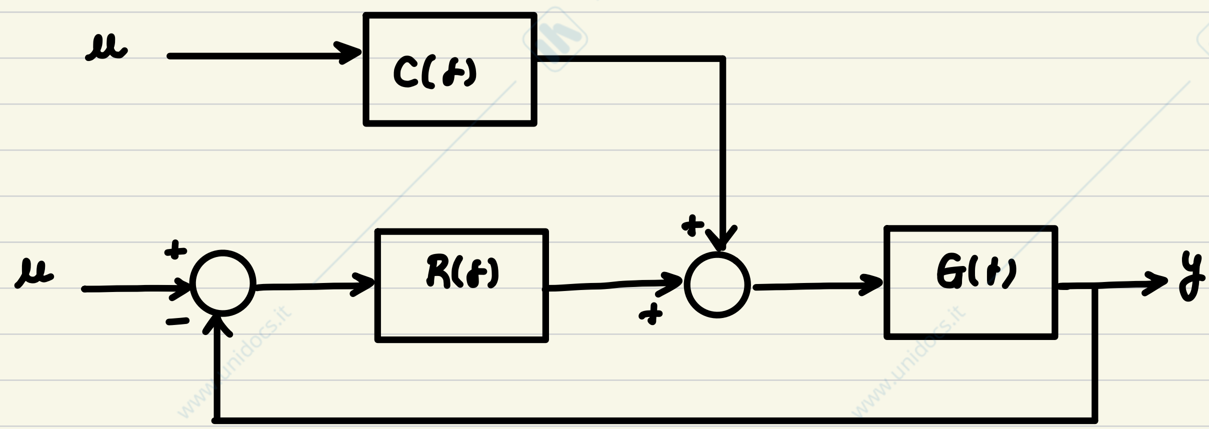
F(s) e G(s) sono entrambi asintoticamente stabili ($s_1 = -4+\sqrt{2} < 0$).
G(s), H(s) e W(s) sono 3 blocchi del 1° ordine e la f.d.t. finale è del 3° ordine ⟶ non ci sono state cancellazioni tra le f.d.t. dovute alla connessione in serie.
→ il sistema interconnesso è asintoticamente stabile

Esercizio 2
Si consideri il seguente sistema

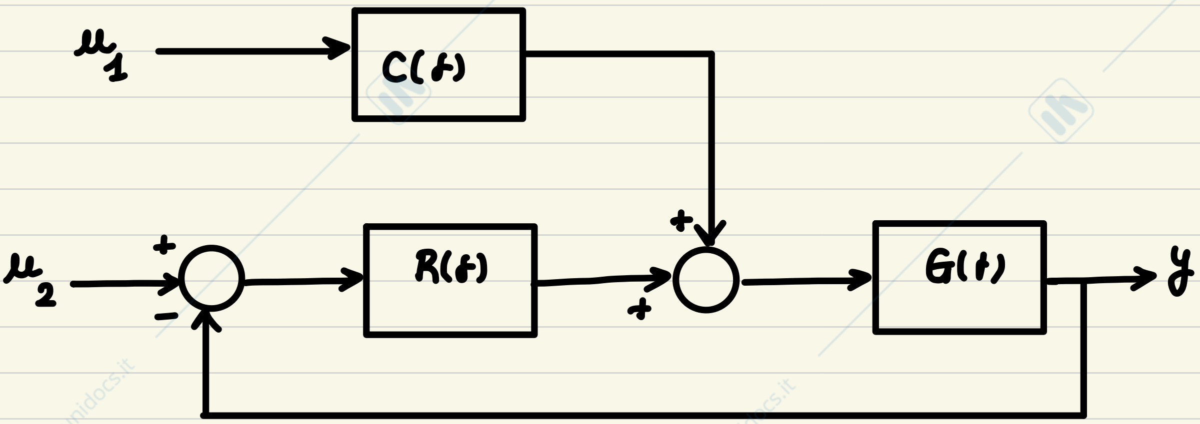


(1) Determinare (ed analizzare) la funzione di trasferimento tra u ed y (hint: principio di sovrapposizione degli effetti o nominare segnali)
(2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere e false
(2a) Il sistema è asintoticamente stabile solo se R, C e G sono asintoticamente stabili
(2b) Se C è instabile allora il sistema è instabile

(1) Applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti
Il blocco C(s) riceve in ingresso u(t) ma non è influenzato dalla restante parte dello schema (allo stesso modo non è in parallelo con gli altri insiemi di blocchi a causa delle varie interconnessioni). Quindi lo schema iniziale è equivalente al seguente:



Dato che u(t) ora entra nello schema in due punti possiamo pensare le due repliche di u(t) come due ingressi distinti e quindi possiamo riscrivere lo schema come:



$u_1(t) = u_2(t) = u(t) \ \forall u$.

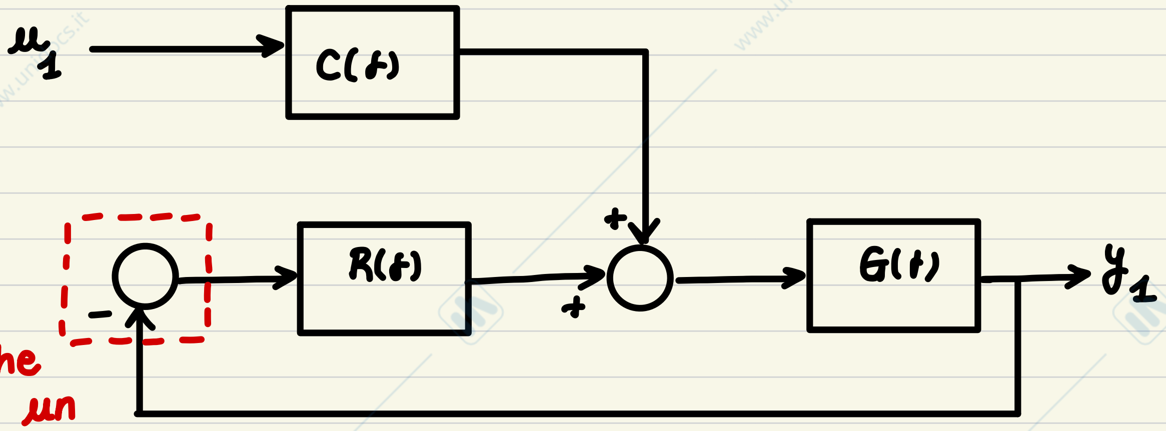
Il sistema è lineare e quindi possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

→ Possiamo scrivere la risposta del sistema come combinazione delle risposte ai due input, calcolate considerando un ingresso e annullando l'altro, ossia:

$$y(s) = y_1(s) + y_2(s)$$

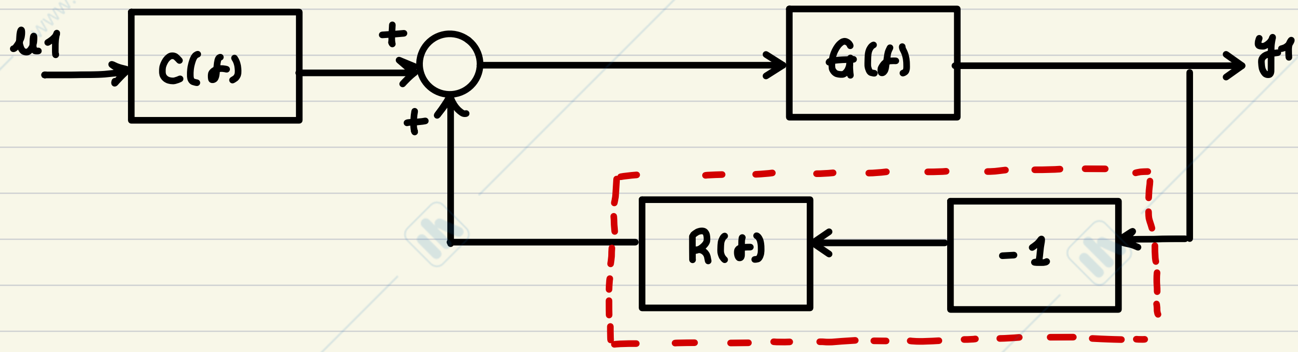
con $y_1(s) = K_1(s)U_1(s)$ e $y_2(s) = K_2(s)U_2(s)$.

(1) Cerchiamo $y_1(t)$ annullando $U_2(t)$, ossia cerchiamo di semplificare

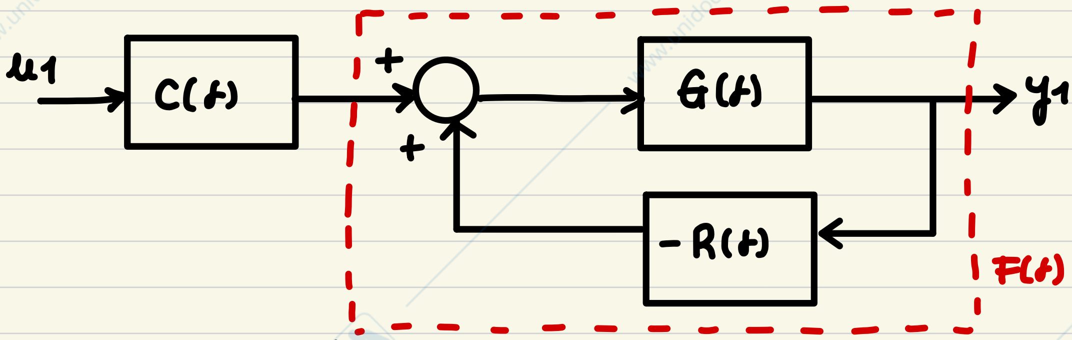


Dato che ha solo un ingresso il blocco sottrattore può essere visto come un blocco a guadagno −1

Lo schema precedente può essere riscritto in modo equivalente come segue:



I due blocchi in retroazione sono in serie tra di loro, quindi, la funzione di trasferimento del blocco equivalente in retroazione è $-R(s)$. Otteniamo così che lo schema precedente è equivalente a:



I blocchi con funzione di trasferimento $G(s)$ e $-R(s)$ sono in retroazione (positiva) e quindi la funzione di trasferimento equivalente all'insieme di blocchi evidenziati in rosso è:

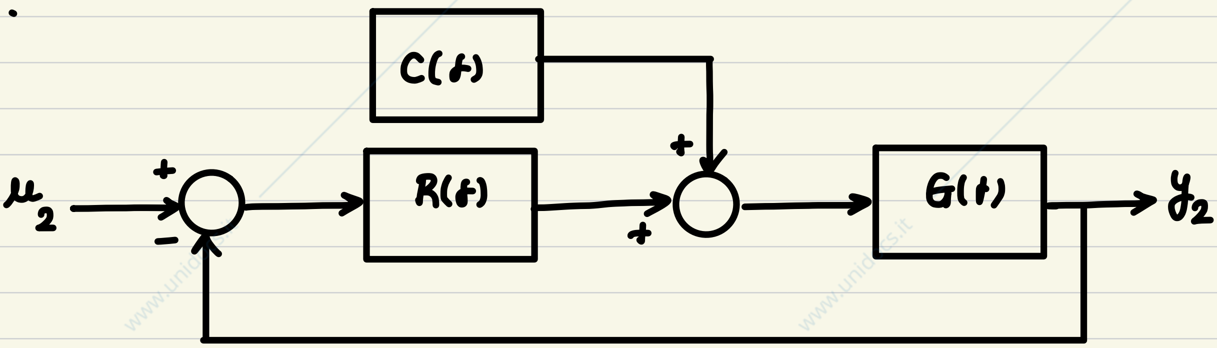
$$F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)R(s)}$$

Nota che il blocco a guadagno negativo rende la retroazione positiva, negativa.

$C(s)$ ed $F(s)$ sono in serie, quindi, la funzione di trasferimento tra $y_1(s)$ ed $U_1(s)$ è:

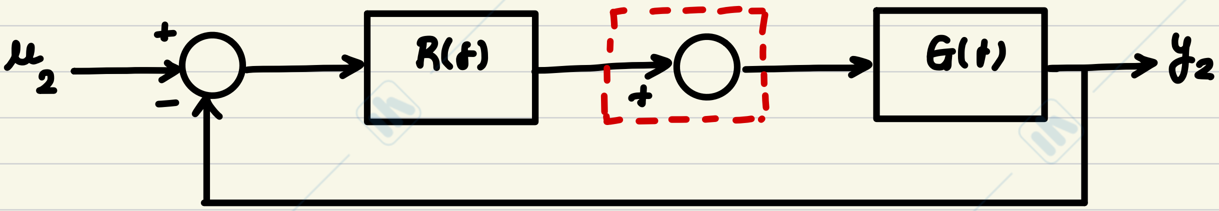
$$y_1(s) = C(s) \cdot \frac{G(s)}{1+G(s)R(s)} \, U_1(s)$$

(2) Cerchiamo la funzione di trasferimento tra $U_2(s)$ ed $y_2(s)$, annullando u_1.

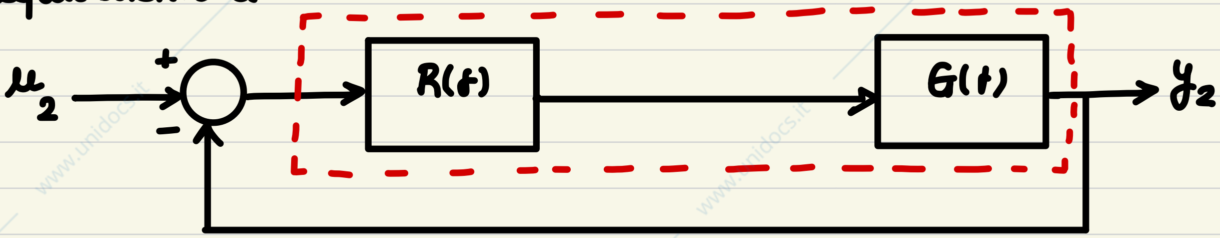


In questo caso $C(t)$ non ha ingressi e quindi lo schema equivalente al precedente è:

il sommatore con un solo ingresso corrisponde ad un blocco a guadagno unitario



Dato che il blocco sommatore non ha effetto lo schema precedente è equivalente a:



I blocchi in rosso sono in serie (quindi la funzione di trasferimento corrispondente è $G(t)R(t)$) e retroazionati, con retroazione negativa unitaria. Quindi:

$$y_2(t) = \frac{\overbrace{R(t)G(t)}^{\text{funzione di trasferimento in catena diretta}}}{1+R(t)G(t)} U_2(t)$$

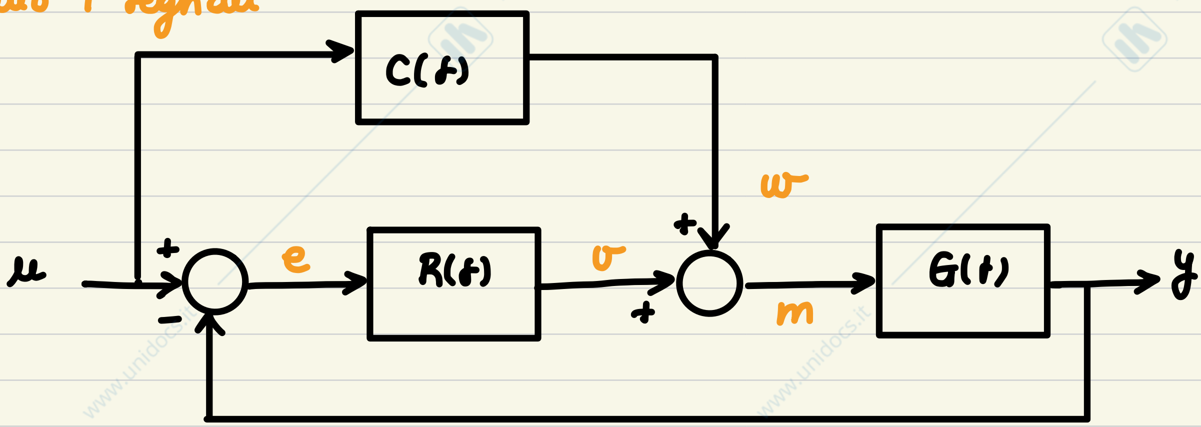
La funzione di trasferimento complessiva è quindi:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = C(t)\frac{G(t)}{1+G(t)R(t)}U_1(t) + \frac{R(t)G(t)}{1+R(t)G(t)}U_2(t) =$$

$$= \left[\frac{G(t)}{1+R(t)G(t)}\left(C(t)+R(t)\right)\right]U(t)$$

dato che $u_1(t) = u_2(t) = u(t)$

Nominiamo i segnali



$$V(t) = R(t)E(t) \longrightarrow V(t) = R(t)[U(t) - y(t)]$$
$$W(t) = C(t)U(t)$$

$$\longrightarrow H(t) = V(t) + W(t) = R(t)[U(t) - y(t)] + C(t)U(t)$$
$$\longrightarrow y(t) = G(t)H(t) = G(t)[R(t)(U(t) - y(t)) + C(t)U(t)] =$$
$$= G(t)R(t)U(t) - G(t)R(t)y(t) + C(t)G(t)U(t)$$

Isolando la $y(t)$: $\quad (1 + G(t)R(t))y(t) = [R(t) + C(t)]G(t)U(t)$

Ottenendo così la funzione di trasferimento precedentemente:

$$y(t) = \frac{[R(t) + C(t)]}{1 + R(t)G(t)} G(t)\ U(t)$$

(2)

(2a) Guardando la funzione di trasferimento si vede i poli di $R(t)$ e $G(t)$ sono modificati dalla retroazione. Quindi $R(t)$ o $G(t)$ potrebbero essere instabili, ma il sistema è comunque stabile.

$$R(t) \cdot G(t) = \frac{1}{s - 0.5}$$ si ottiene quando una tra $R(t)$ e $G(t)$ è instabile

$$\rightarrow \frac{R(t)G(t)}{1 + R(t)G(t)} = \frac{1}{s - 0.5} \quad \frac{s - 0.5}{s - 0.5 + 1} = \frac{1}{s + 0.5}$$ stabile (da questo dipende la f.d.t. tra y_2 e u_2)

$$\rightarrow \frac{1}{1 + R(t)G(t)} = \frac{s - 0.5}{s + 0.5}$$ stabile (da questo dipende in parte la f.d.t. tra y_1 ed u_1).

L'affermazione **(2a)** è falsa.

(2b) $C(t)$ influenza la relazione tra y_1 ed u_1. In particolare:

$$y_2(t) = \underbrace{C(t)}_{} \ \frac{G(t)}{1 + R(t)G(t)} \ U(t)$$

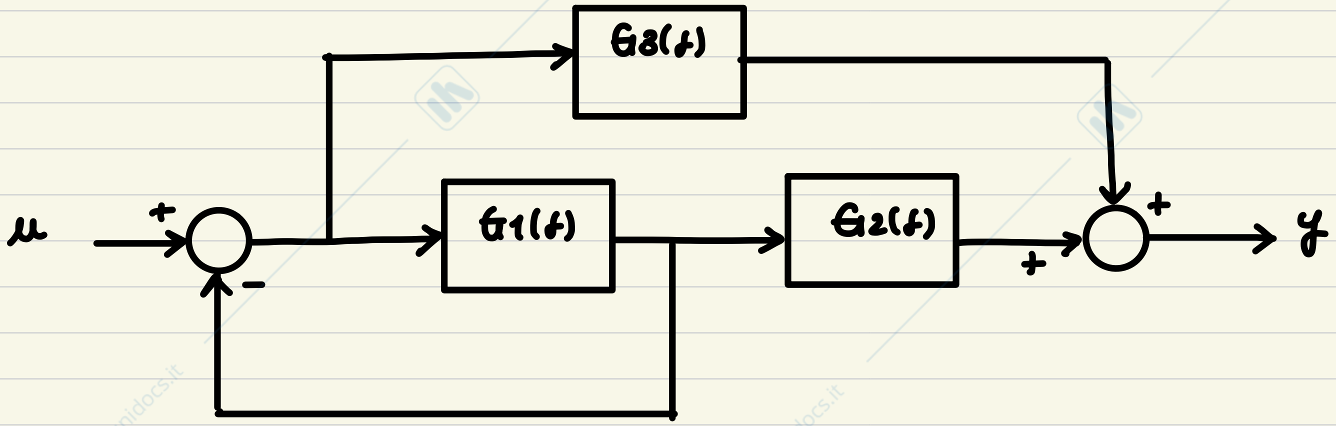
è connesso in serie al sistema retroazionato

Dato che i suoi poli non vengono modificati dalla retroazione allora, se $C(t)$ è instabile, la f.d.t. tra y_2 e U è instabile $\rightarrow$ tutto il sistema interconnesso è instabile.

L'affermazione **(2b)** è vera.

Esercizio 3

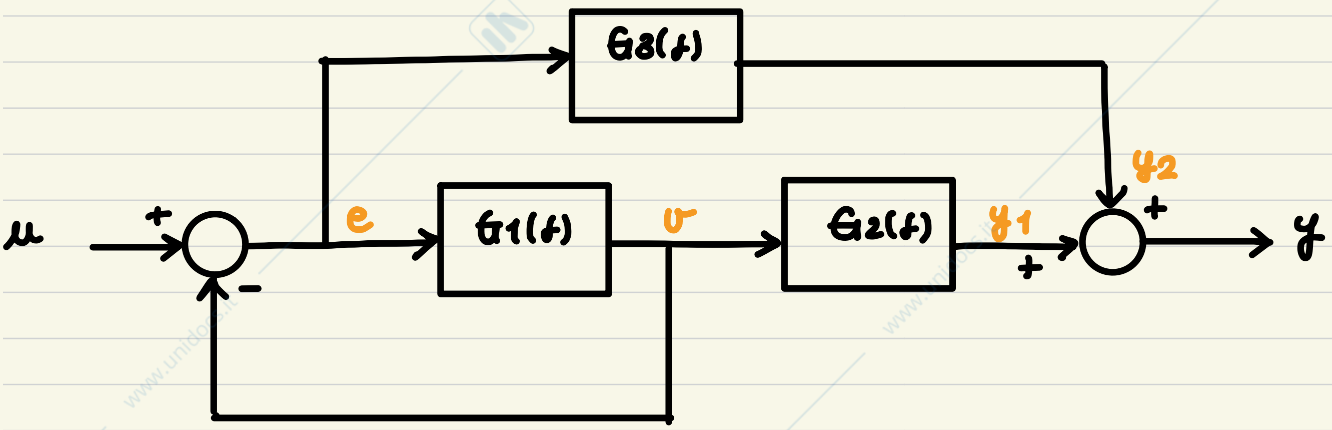
Si consideri il seguente schema ($G_i(s)$ sono funzioni di trasferimento di ordine 1)



(1) Determinare la funzione di trasferimento $H(s)=Y(s)/U(s)$

(2) Posto $G_1(s)=\frac{1}{s+3}$, $G_2(s)=\frac{s+4}{s+0.1}$ e $G_3(s)=-\frac{1}{s+3}$, valutare $H(s)$ e studiare la stabilità del sistema.

(1) Per determinare la f.d.t. si nominano i segni



$E(s)=U(s)-V(s)=U(s)-G_1(s)E(s)$ (a)

$y_1(s)=G_2(s)V(s)=G_2(s)G_1(s)E(s)$ (b)

$y_2(s)=G_3(s)E(s)$ (c)

$y(s)=y_1(s)+y_2(s)$ (d)

(a) $(1+G_1(s))E(s)=U(s)\rightarrow E(s)=\frac{1}{1+G_1(s)}U(s)$

(b) $y_1(s)=\frac{G_2(s)G_1(s)}{1+G_1(s)}U(s)$

(c) $y_2(s)=\frac{G_3(s)}{1+G_1(s)}U(s)$

(d) $\rightarrow y(s)=\left[\frac{G_2(s)G_1(s)}{1+G_1(s)}+\frac{G_3(s)}{1+G_1(s)}\right]U(s)$

Si ottiene così che $H(s) = \dfrac{G_3(s)+G_2(s)G_1(s)}{1+G_1(s)}$

(2)

$$\frac{-\frac{1}{s+3}+\frac{s+4}{s+0.1}\cdot\frac{1}{s+3}}{1+\frac{1}{s+3}} = \frac{-(s+0.1)+s+4}{(s+0.1)(s+3+1)} =$$

$$= \frac{3.9}{(s+0.1)(s+4)}$$

Dato che il sistema ha 3 blocchi del 1° ordine, H(s) in assenza di cancellazioni dovrei avere 3 poli.
Dato che H(s) ha 2 poli significa che c'è una cancellazione!

Si noti che G3(s) non è retroazionato ma il suo polo non è visibile!
Questo significa che il polo cancellato è proprio quello di G3(s).

Dato che il polo cancellato è stabile e quelli che invece vedo da H(s) sono comunque stabili → il sistema retroazionato è ASINTOTICAMENTE stabile.