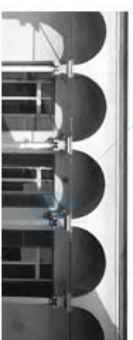
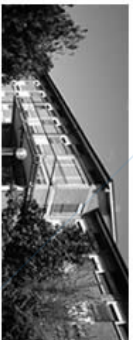




POLITECNICO DI MILANO



**Dipartimento di
Elettronica,
Informazione e
Bioingegneria**



Analisi del teorema della risposta in frequenza e scomposizione armonica

Fondamenti di Automatica per Ing. dell'Automazione a.a. 2019/2020
Prof.ssa Mara Tanelli

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it



Sommario

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

- Teorema della risposta in frequenza
- Segnali e scomposizione armonica

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it



Teorema della risposta in frequenza: enunciato

Teorema della risposta in frequenza

Dato un sistema LTI asintoticamente stabile con f.d.T. $G(s)$ e ingresso

$$u(t) = U \sin(\bar{\omega}t), \quad t \geq 0$$

L'uscita di regime di tale sistema (in pratica dopo $t_a \cong 5\tau_{\text{dominante}}$) sarà

$$y(t) \cong Y \sin(\bar{\omega}t + \varphi)$$

$$\begin{cases} Y = U |G(j\bar{\omega})| \\ \varphi = \arg G(j\bar{\omega}) \end{cases}$$

indipendentemente da $x(0)$.

cost. di tempo
associata al polo
più lento

Teorema della risposta in frequenza: esempio

- Esempio:

$$G(s) = \frac{5}{s + 4}, \quad u(t) = \sin(5t)$$

- Utilizzando Heaviside:

$$y(t) = \frac{25}{41} e^{-4t} - \frac{5\sqrt{41}}{41} \sin\left(5t - \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right)$$

$$\Downarrow t \rightarrow \infty$$

$$y_{\infty}(t) = \frac{5\sqrt{41}}{41} \sin\left(5t - \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right)$$

- Utilizzando il teorema della risposta in frequenza si ottiene lo stesso risultato asintotico:

$$y_{\infty}(t) = |G(5j)| \sin\left(5t + \angle G(5j)\right)$$

modo del sistema

a regime

$$|G(5j)| = \frac{5\sqrt{41}}{41}$$

$$\angle G(5j) = -\tan^{-1} \frac{5}{4}$$

Teorema della risposta in frequenza

- Osservazioni:
 - Il metodo di Heaviside permette di calcolare l'espressione analitica dell'uscita valida per ogni $t \geq 0$. Comprende SIA il transitorio SIA il valore di regime.
 - La soluzione calcolata con il teorema della risposta in frequenza converge a quella calcolata con Heaviside quando i transienti del sistema (che deve essere a.s. perché valga il teorema) si esauriscono.
 - La durata del transitorio è regolata dalla **dinamica dominante** del sistema, in questo caso:

$$G(s) = \frac{5}{s + 4},$$

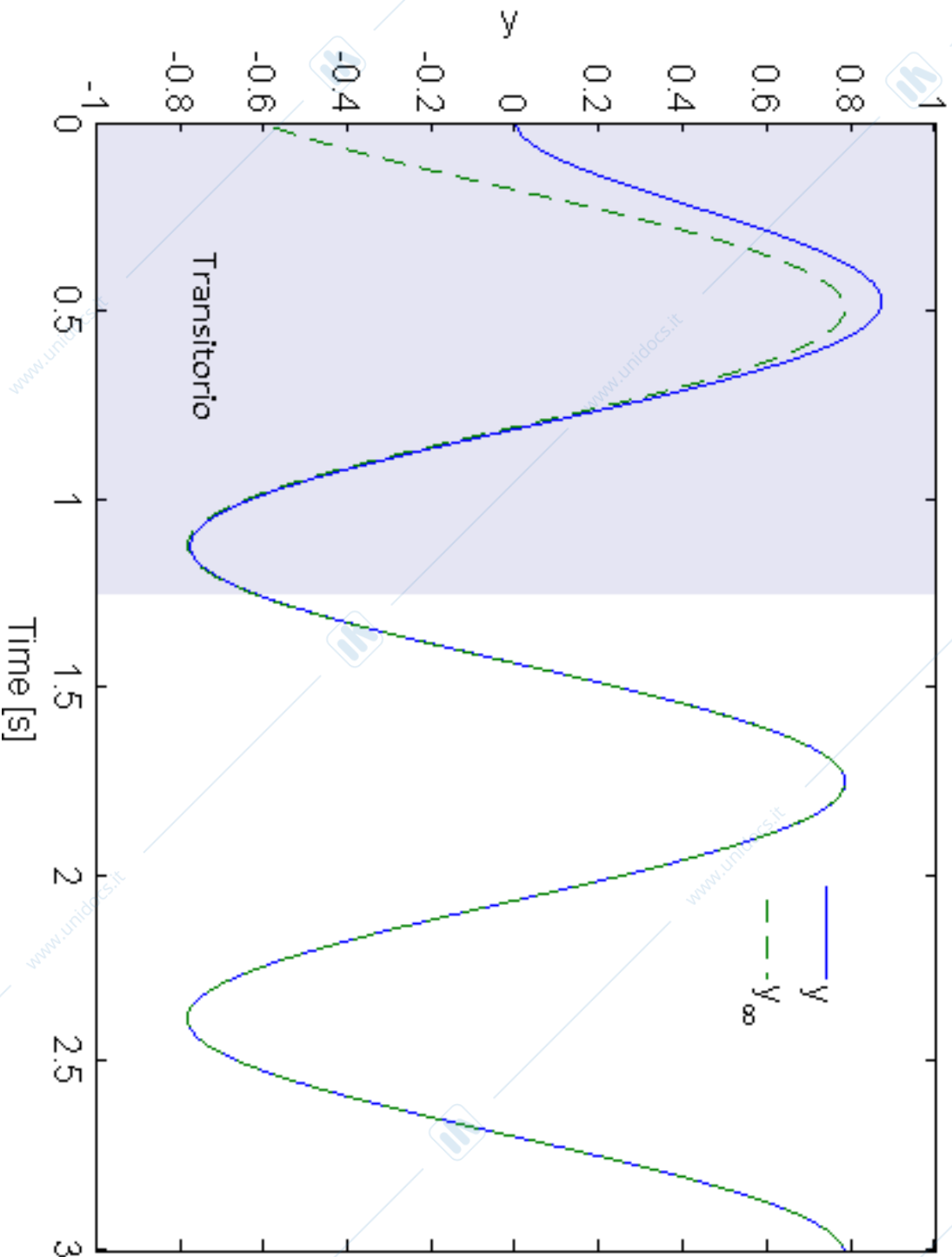
$$\tau = \frac{1}{4} \rightarrow T_s = 5\tau = 1.25$$





Teorema della risposta in frequenza

si vede come più ci si avvicina al tempo di assestamento l'uscita del sistema coincide con quella a regime





Teorema della risposta in frequenza

- Cosa succede se si cambiano i parametri dell'ingresso (mantenendo invariata la sua pulsazione)?
- Non è necessario ricalcolare la risposta ASINTOTICA (quella completa, sì).

$$G(s) = \frac{5}{s + 4}$$

$$u(t) = A \sin(5t + \theta)$$

$$y_{\infty}(t) = A |G(5j)| \sin(5t + \angle G(5j) + \theta)$$

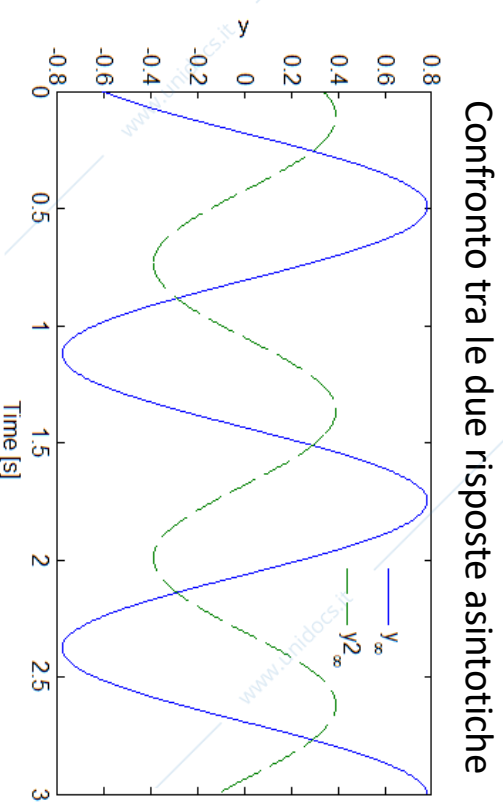
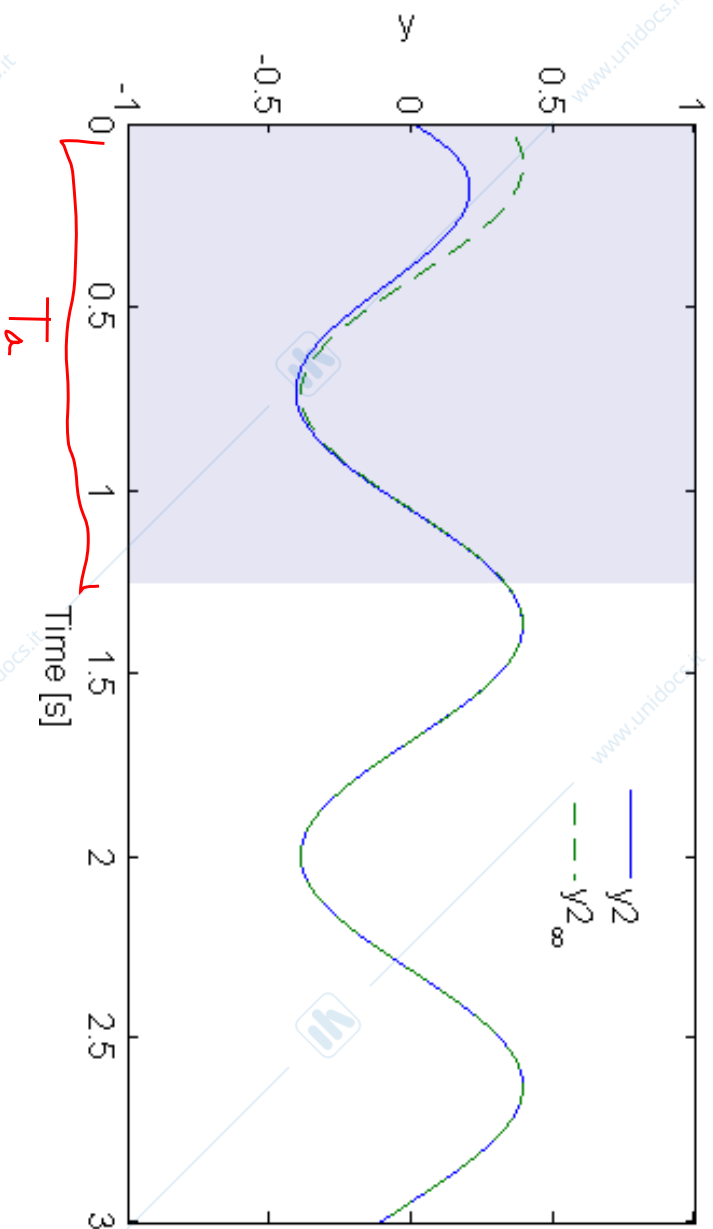
Teorema della risposta in frequenza

- Esempio:

$$\omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$u(t) = 0.5 \sin(5t + -4.36)$$

$$y_{\infty}(t) = 0.5 \frac{5\sqrt{41}}{41} \sin\left(5t - \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) - 4.36\right)$$





Esempio

G(s) con poli complessi

pulsazione di risonanza, il sistema viene particolarmente sollecitato a questa pulsazione e presenta un picco

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + 2j\xi\omega_n\omega + \omega_n^2}$$

⇒

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\omega_n^2}}$$

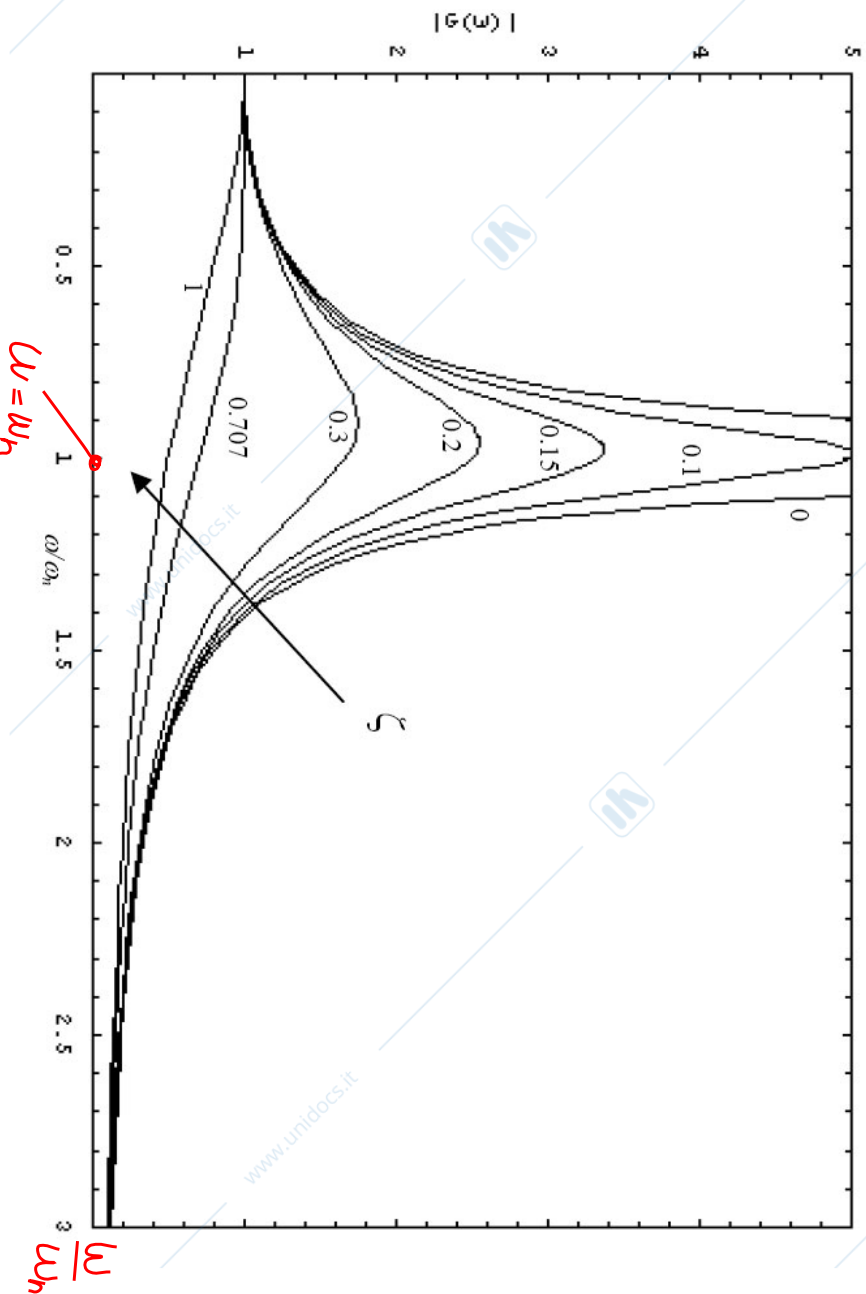
In $\omega = \omega_n$

$$|G(j\omega_n)| = \frac{\omega_n^2}{2\xi\omega_n^2} = \frac{1}{2\xi}$$

più piccolo è lo smorzamento maggiore è il modulo della risposta in frequenza per $\omega = \omega_n$
→ RISONANZA

$\% (h) = 25 / (\xi \cdot \omega_n)$

$\omega_n = \omega_n$
 $\omega_n \approx \omega_n$



Proprietà bloccante degli zeri

Visto che

$$u(t) = U \sin(\omega_0 t), t \geq 0 \Rightarrow t \rightarrow +\infty \quad y(t) = |G(j\omega_0)| U \sin(\omega_0 t + \arg G(j\omega_0))$$

risulta

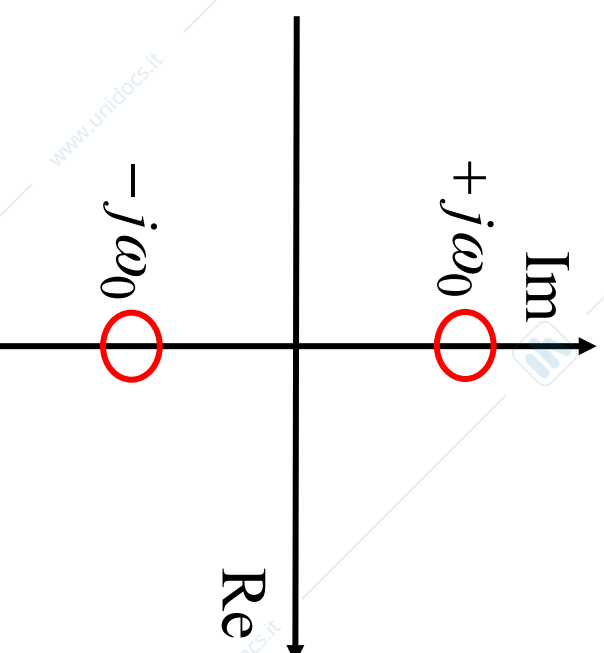
$$t \rightarrow +\infty \quad y(t) = 0$$

se e solo se

$$G(j\omega_0) = 0$$

cioè se e solo se $G(s)$ ha zeri in $s = \pm j\omega_0$

La proprietà degli zeri bloccanti può essere utile se vogliamo eliminare dei disturbi con pulsazione nota



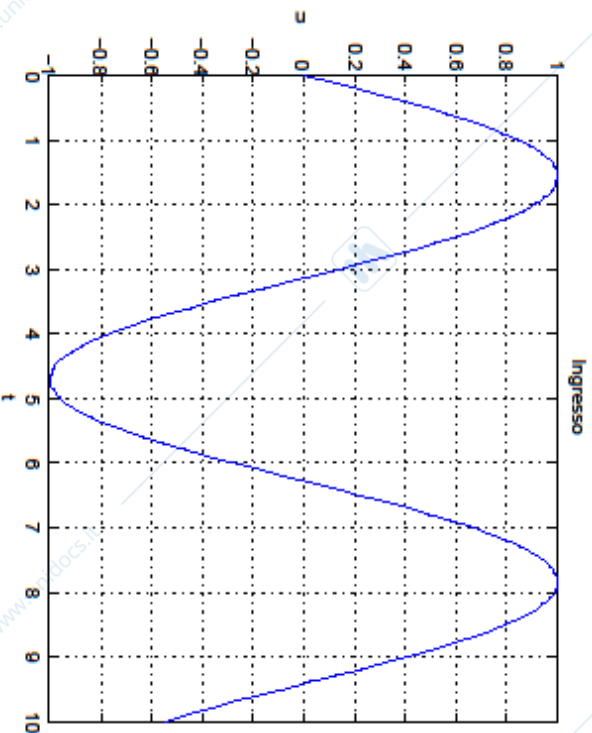


Esempio

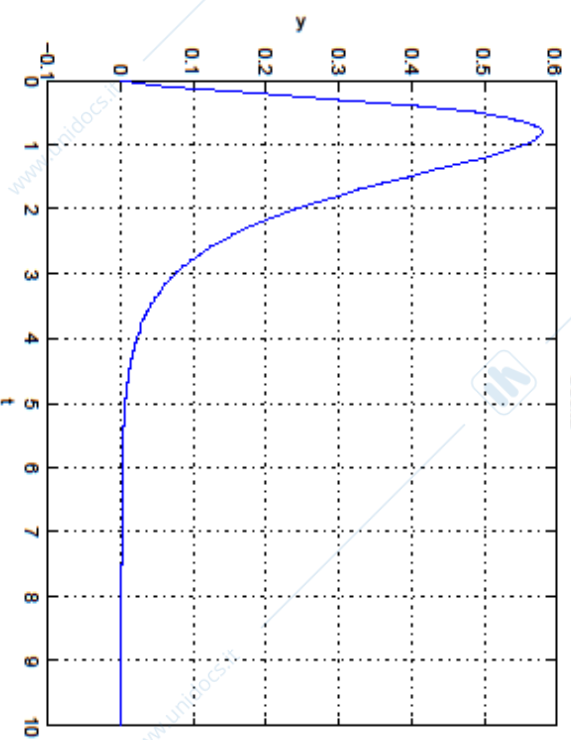
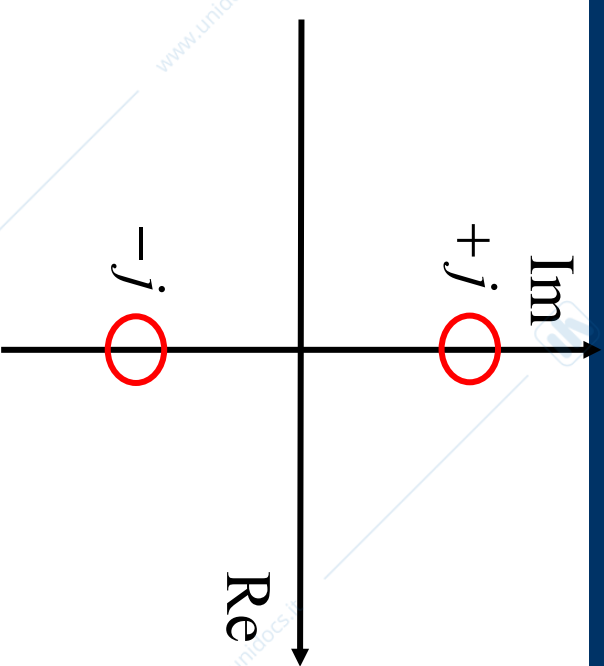
$$G(s) = \frac{1+s^2}{(1+0.2s)(1+0.4s)(1+0.8s)}$$

Handwritten notes: $\omega = 1$ (with arrow pointing to s^2), $\zeta = \pm 1$ (with arrow pointing to $1+s^2$)

$$u(t) = \sin(t), t \geq 0$$

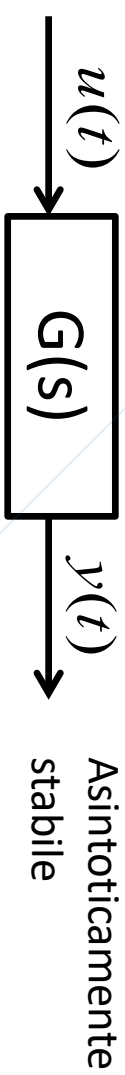


Ingresso



Uscita

➔ Dove siamo arrivati ...



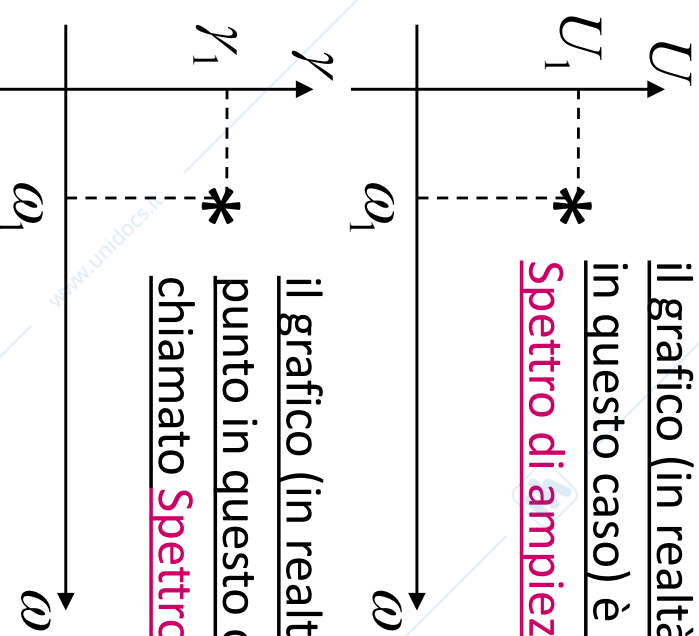
Teorema della r.i.f.

$$u(t) = U_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) \rightarrow y(t) \cong |G(j\omega_1)| U_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1 + \arg(G(j\omega_1)))$$

rappresenta il contunuto armonico della sinusoide ossia ampiezza e fase

Spettro di una sinusoide

$$u(t) = U_1 \text{sen}(\omega_1 t + \gamma_1)$$



il grafico (in realtà solo 1 punto in questo caso) è chiamato **Spettro di ampiezza**

il grafico (in realtà solo 1 punto in questo caso) è chiamato **Spettro di fase**

Segnali e scomposizione armonica

- L'idea della teoria di Fourier è quella di rappresentare un generico segnale come una combinazione lineare di funzioni sinusoidali.

$$y(t) = \sum_{\omega=0}^{\omega=\dots} M(\omega) \sin(\omega \cdot t + \phi(\omega))$$

- Con analisi armonica di un segnale si intende, in questo contesto, caratterizzare il segnale originario secondo la teoria di Fourier
 - In pratica, si tratta di trovare i valori di modulo e fase, funzioni della pulsazione considerata

$$y(t) = \sum_{\omega=0}^{\omega=\dots} M(\omega) \sin(\omega \cdot t + \phi(\omega))$$



Serie di Fourier

Introduzione

E' data una funzione complessa f della variabile reale t , definita su tutto l'asse t

$$f(t) \quad , \quad -\infty < t < +\infty$$

Si assume che essa sia *Periodica di Periodo T*

$$f(t+T) = f(t) \quad , \quad \forall t$$

Si definisce la *Pulsazione di f* come

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



Coefficienti di Fourier

Sotto ampie ipotesi

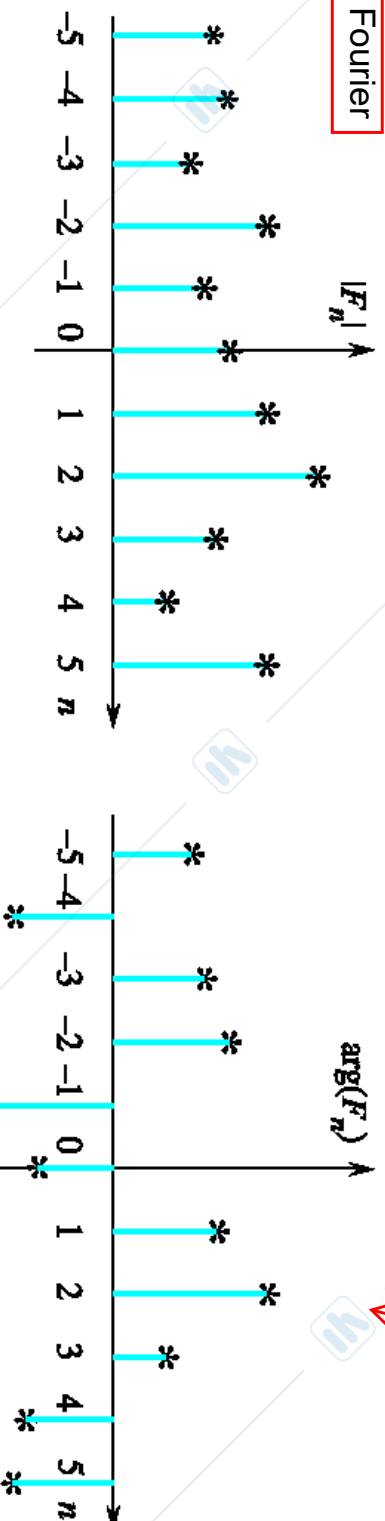
$$F_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n \text{ intero}$$

la singola sinusoida aveva un punto (sia in ampiezza che in fase) per un omega, mentre il segnale periodico (somma di sinusoidi, poichè vale il principio di sovrapp. degli effetti) è rapp. da uno spettro di ampiezze e fasi (viste le varie sinusoidi)

Spettro di Fourier

$$\{F_n\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |F_n| \\ \arg F_n \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} \text{Spettro di ampiezza} \\ \text{Spettro di fase} \end{array}$$

Spettro di Fourier



Lo spettro è *Discreto*

spettro di segnale (comb. lin di sinusoidi) è il contenuto armonico del segnale

$n\omega_0$



Contenuto di un segnale: le "armoniche"

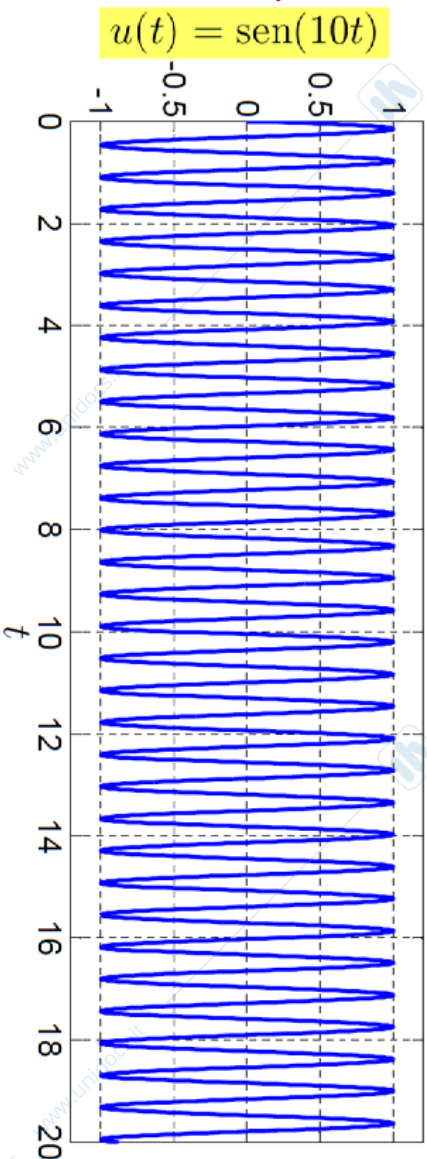
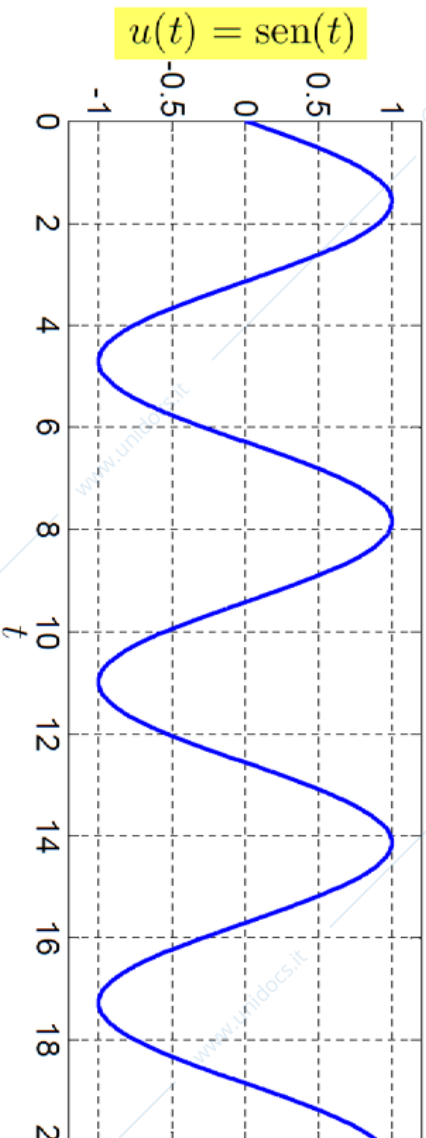
i segnali sinusoidali base come i sen e i cos si dicono anche armoniche



Premessa

$$\omega = 2\pi f \rightarrow [Hz] \cdot \frac{1}{s}$$

$$\omega = 1 \frac{rad}{s}$$



Terminologia 1:

$\text{sen}(\omega t)$ o $\text{cos}(\omega t)$ si dicono **armoniche** a pulsazione ω .

Oss: al crescere di ω diminuisce il periodo T dell'armonica, ossia aumenta la frequenza $1/T$.

Terminologia 2:

Armoniche a pulsazione "bassa" sono dette armoniche (o componenti) in **bassa frequenza**.

(Analogia definizione per le componenti in **alta frequenza**)

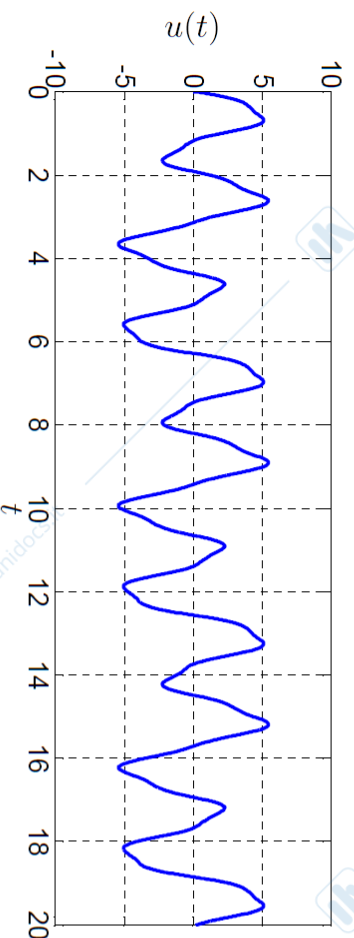
Spettro di un segnale: prima idea

Un segnale $u(t)$ può essere rappresentato:

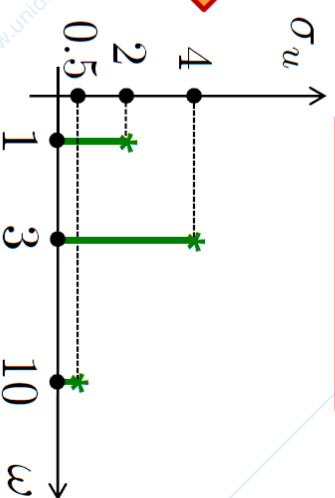
- nel dominio del tempo t
 - attraverso la sua trasformata di Laplace $U(s)$.
- Lo **spettro** è una terza rappresentazione di $u(t)$.

Idea

Scomporre un segnale $u(t)$ nella somma di differenti armoniche e quantificare il peso di ogni armonica che compone il segnale



↔ $U(s)$ ↔





Motivazioni: interazione tra segnali e sistemi

La strumento teorico per l'analisi spettrale è la **Trasformata di Fourier**: non tratteremo questo argomento (e.g., non impareremo a calcolare gli spettri dei segnali), ci limiteremo ad uno studio *qualitativo* volto a:

1. Comprendere la relazione tra le caratteristiche macroscopiche di un segnale e le caratteristiche del suo spettro;
2. Comprendere come lo spettro di un segnale si modifica “passando” attraverso un sistema lineare as. stabile (AS):



Noto lo spettro di $u(t)$ e nota $G(s)$, che caratteristiche ha lo spettro del corrispondente segnale di uscita $y_F(t)$?



Motivazioni: interazione tra segnali e sistemi (2)

1. Comprendere la relazione tra le caratteristiche macroscopiche di un segnale e le caratteristiche del suo spettro;
2. Noto lo spettro di $u(t)$ e nota $G(s)$, che caratteristiche ha lo spettro del corrispondente segnale di uscita $y_F(t)$?



La risposta a queste due domande permette di studiare il comportamento di regime per sistemi dinamici lineari AS in risposta a segnali d'ingresso "qualsiasi".



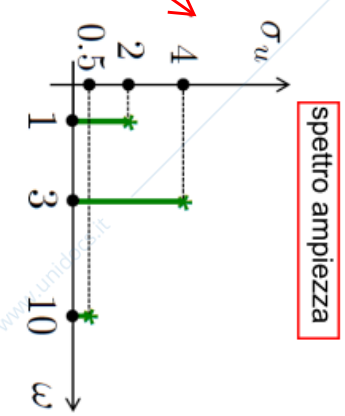
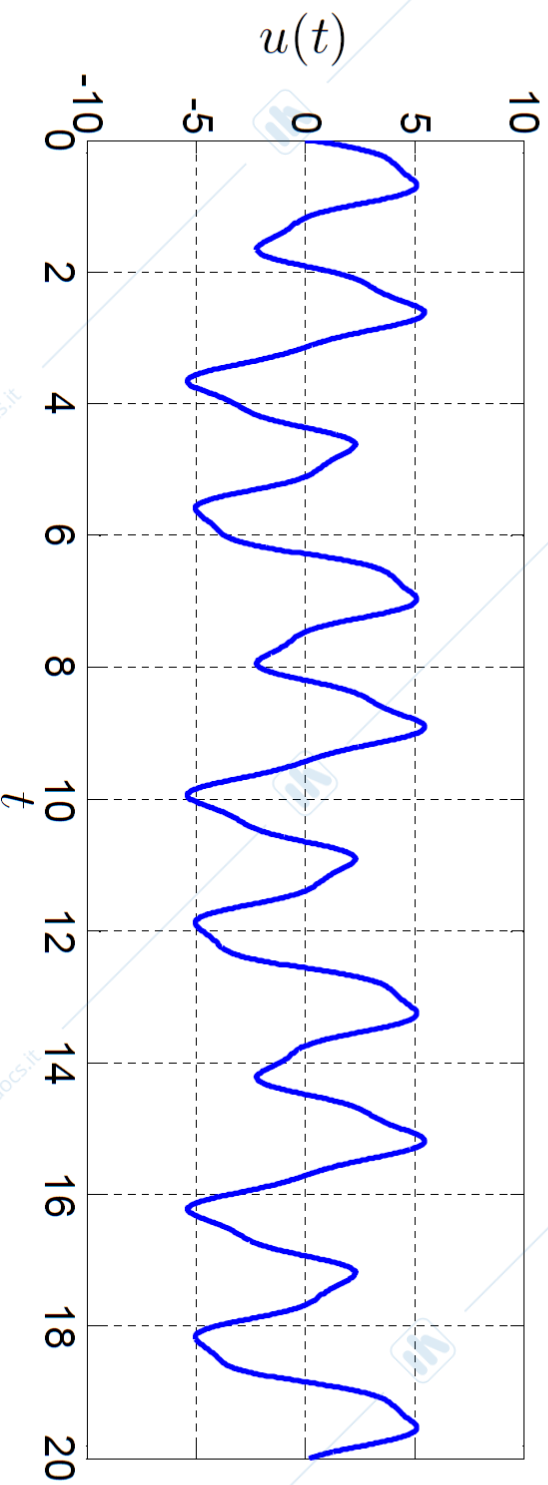
La rappresentazione dei segnali in termini del loro spettro permette dunque di allargare le nostre prospettive nello studio del comportamento dei sistemi dinamici.

Spettro di ampiezza: esempio 1

Supponiamo che un dato segnale $u(t)$ sia la somma di termini sinusoidali/cosinusoidali

Esempio 1:

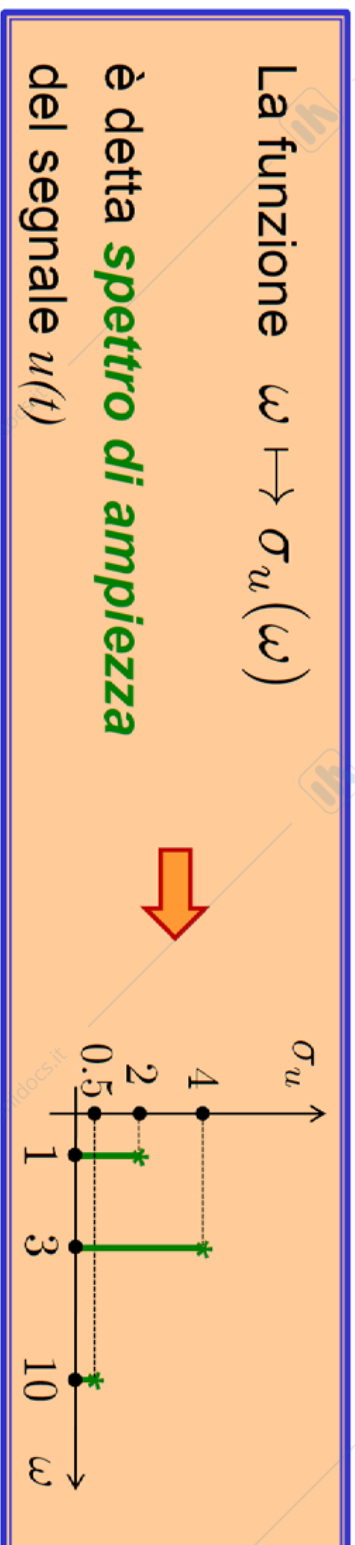
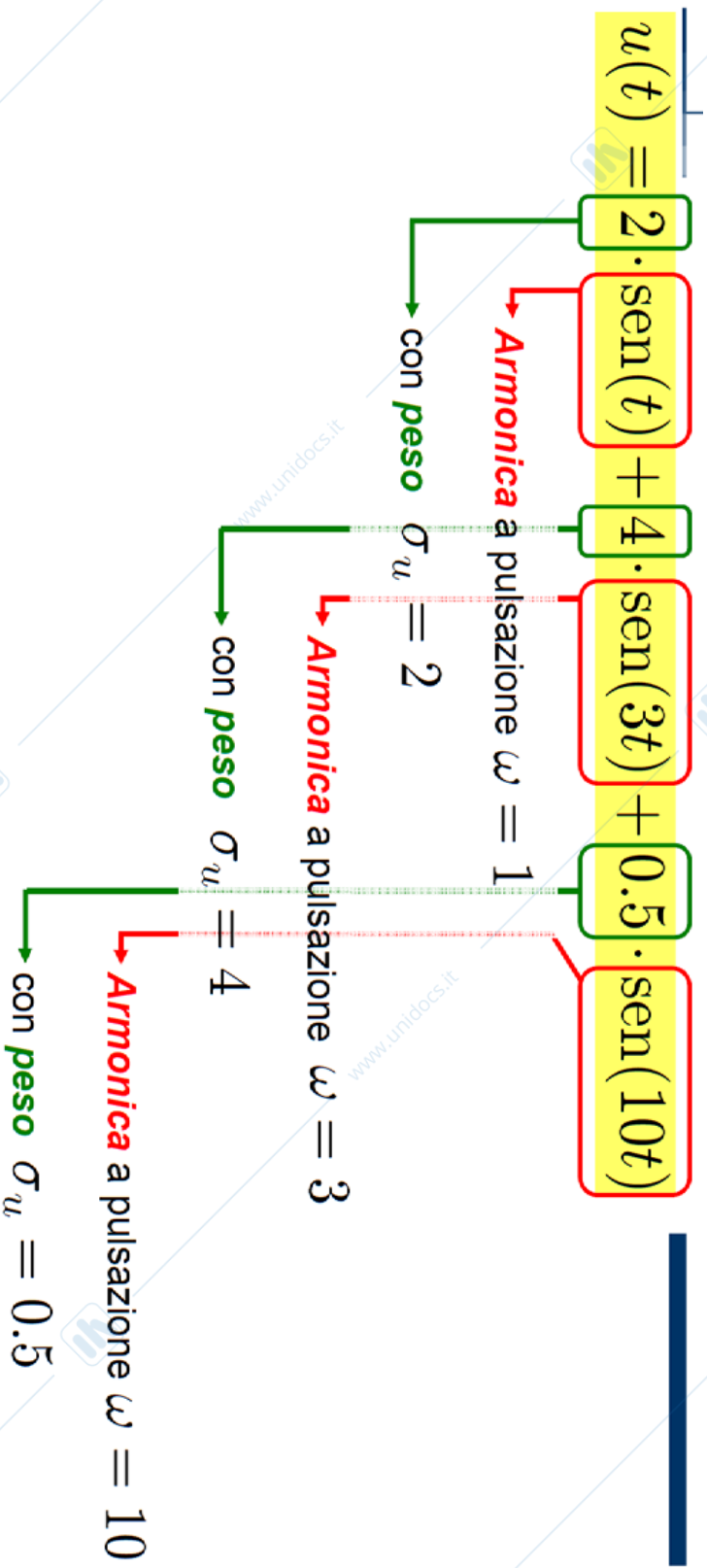
$$u(t) = 2 \cdot \text{sen}(t) + 4 \cdot \text{sen}(3t) + 0.5 \cdot \text{sen}(10t)$$



funzione di matlab \rightarrow fft
mi scompone il segnale nelle sue
componenti armoniche

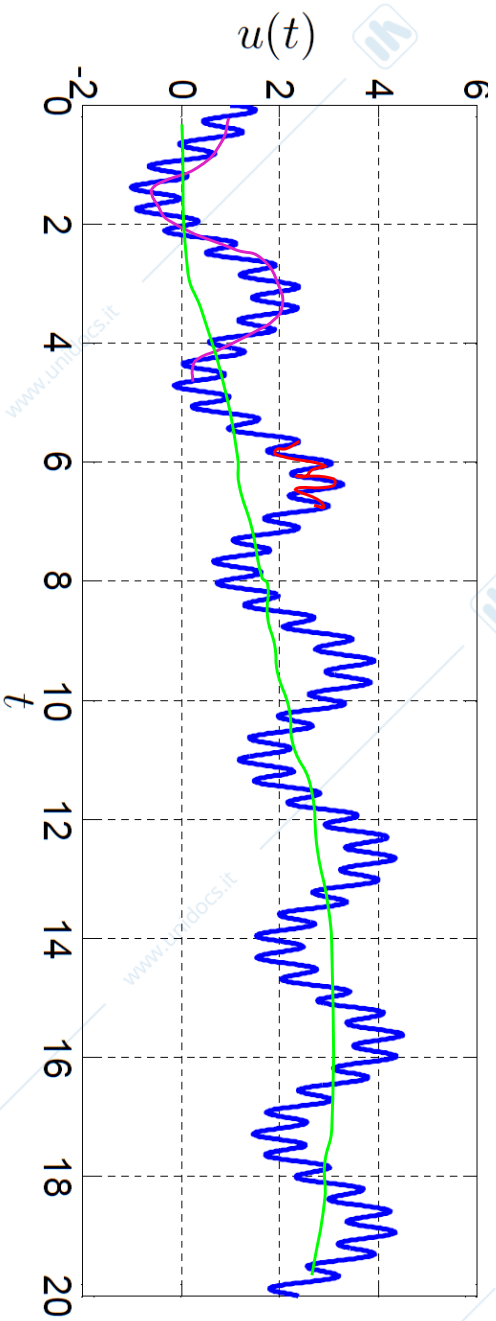


Spettro di ampiezza: esempio 1

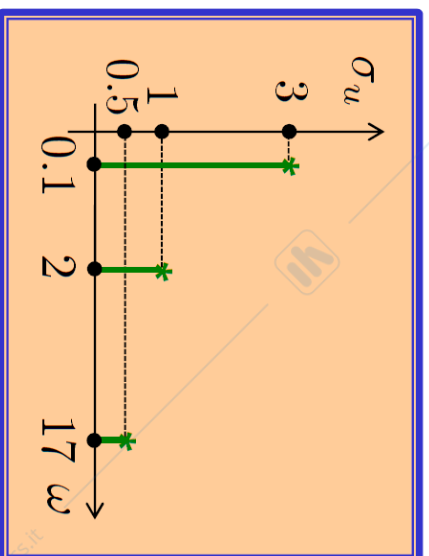




Spettro di ampiezza: esempio 2

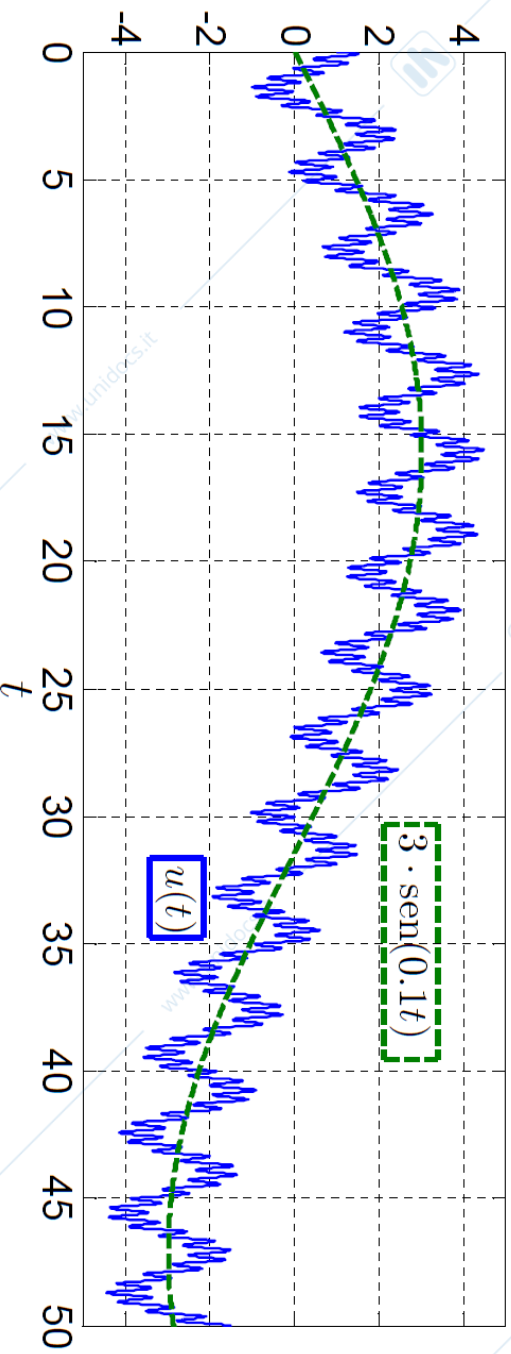


$$u(t) = 3 \cdot \text{sen}(0.1t) + \cos(2t) + 0.5 \cdot \text{sen}(17t)$$

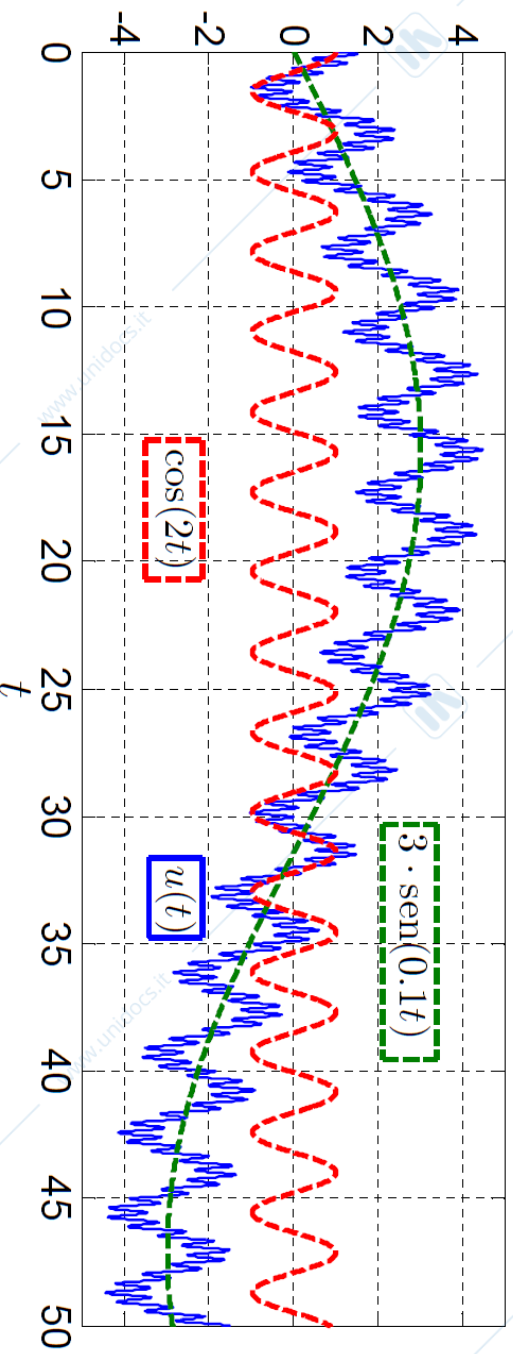




Spettro di ampiezza: esempio 2

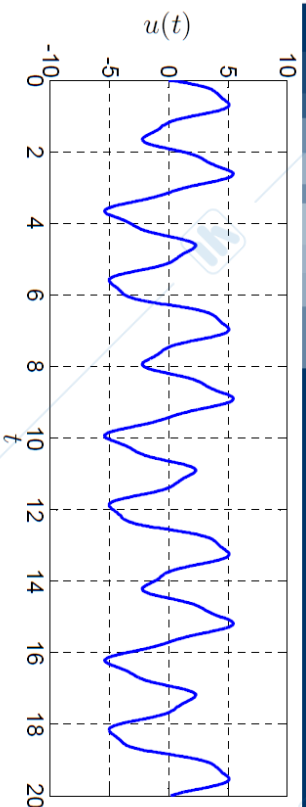


$$u(t) = 3 \cdot \text{sen}(0.1t) + \cos(2t) + 0.5 \cdot \text{sen}(17t)$$

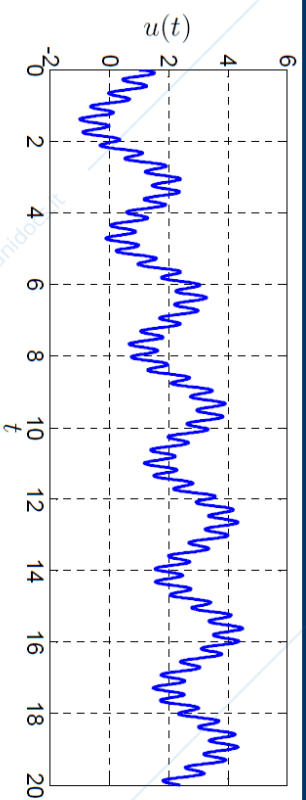




Spettro di ampiezza: confronto

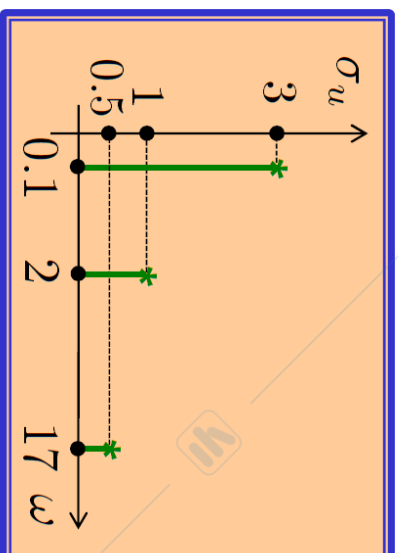
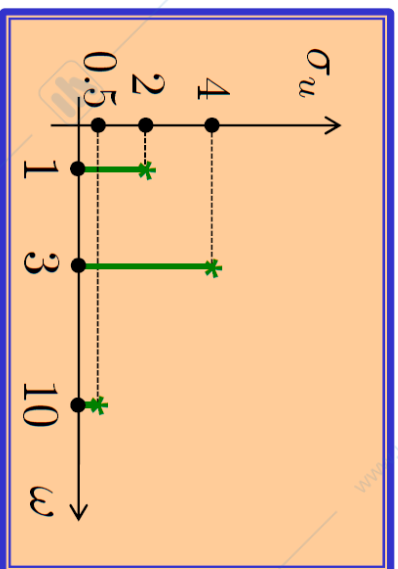


$$u(t) = 2 \cdot \text{sen}(t) + 4 \cdot \text{sen}(3t) + 0.5 \cdot \text{sen}(10t)$$



$$u(t) = 3 \cdot \text{sen}(0.1t) + \cos(2t) + 0.5 \cdot \text{sen}(17t)$$

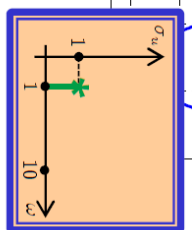
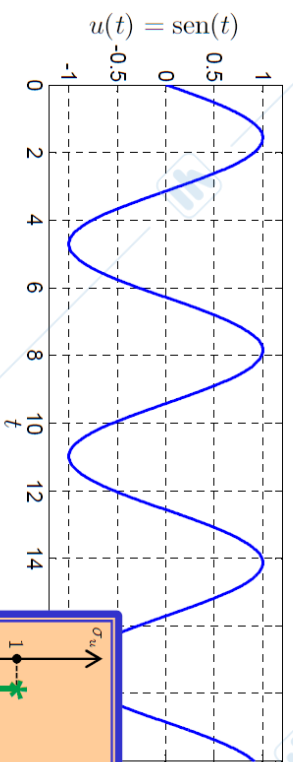
VS



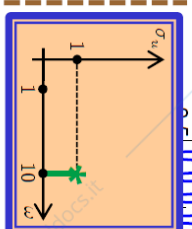
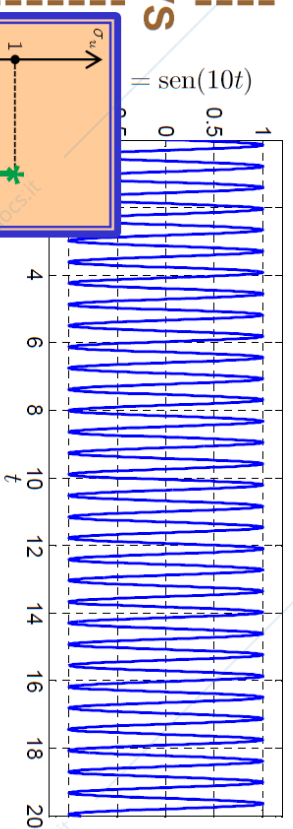
Lo spettro fornisce una rappresentazione alternativa di un segnale in cui è evidenziato il contributo delle differenti armoniche che lo costituiscono



Spettro di ampiezza: caratteristiche dei segnali



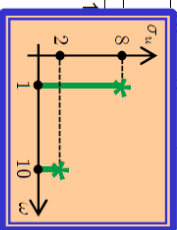
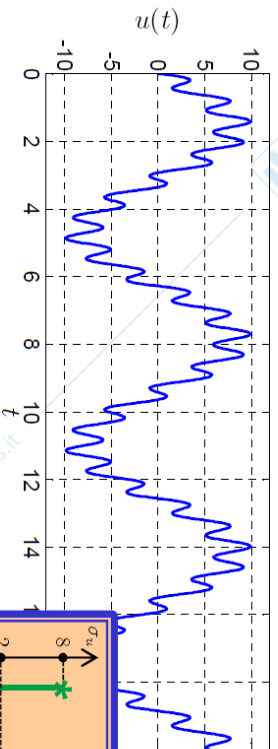
VS



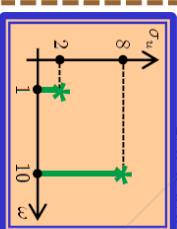
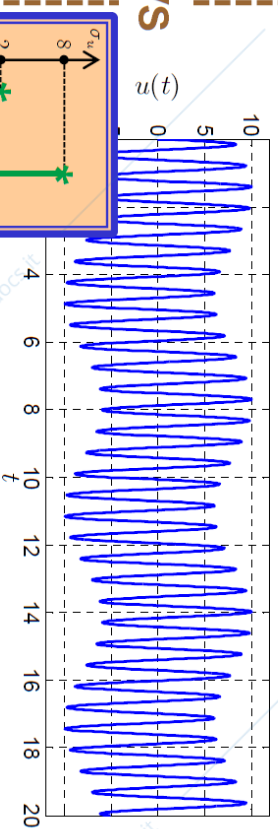
VS

Da un punto di vista macroscopico, i segnali nel cui spettro prevalgono le componenti armoniche in **bassa frequenza** sono caratterizzati da un andamento **lentamente variabile**.

I segnali il cui spettro è prevalentemente concentrato ad **alta frequenza** hanno invece un andamento più "nervoso" e caratterizzato da **rapida variabilità**.



VS



VS



Spettro di ampiezza: definizione formale

Fino ad ora abbiamo considerato segnali scomponibili nella somma di un numero finito di armoniche: $u(t) = \sum_i \sigma_u(\omega_i) \cos(\omega_i t + \varphi_u(\omega_i))$.

Più in generale, dato un segnale

$$u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto u(t),$$

le ipotesi sono quelle per cui esiste la serie di Fourier

sotto opportune e "blande" ipotesi, esistono due funzioni

$$\sigma_u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad \varphi_u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \sigma_u(\omega) \quad \omega \mapsto \varphi_u(\omega)$$

tali che è possibile scrivere il segnale nella seguente forma:

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \sigma_u(\omega) \cos(\omega t + \varphi_u(\omega)) d\omega.$$

Le funzioni σ_u e φ_u sono dette, rispettivamente, **spettro di ampiezza** e **spettro di fase** di u .

Ci interesseremo principalmente dello **spettro di ampiezza**.



Estensioni del Th. r.i.f.: Ingresso multisinusoidale

risposta in frequenza

caso base della risposta in frequenza è la singola sinusoidale, ma abbiamo visto come i segnali possono essere rappr. come comb. di tante sinusoidi

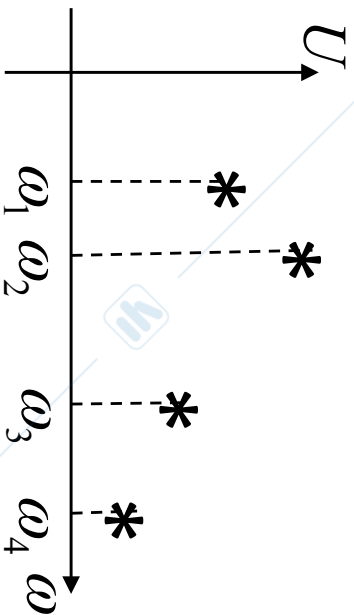
- **u(t) multisinusoidale**
- **u(t) periodico**
- **u(t) "generico"**

Possiamo quindi combinare il teorema della risposta in frequenza e il principio di sovrapposizione degli effetti

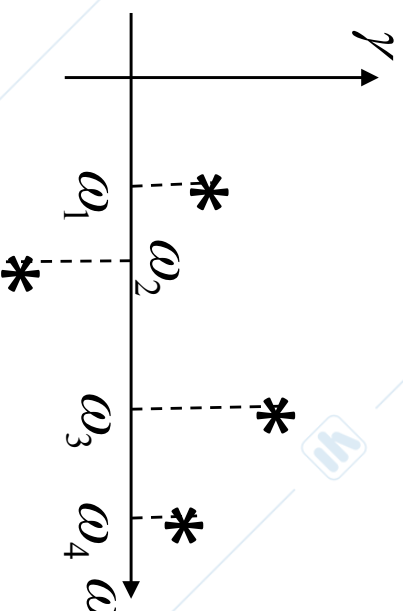
Ingresso multisinusoidale

$$u(t) = U_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + U_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) + \dots + U_N \sin(\omega_N t + \gamma_N) = \sum_{k=1}^N U_k \sin(\omega_k t + \gamma_k)$$

Spettro di ampiezza



Spettro di fase



Principio di sovrapp. effetti + Th. r.i.f.

$$u_k(t) = U_k \sin(\omega_k t + \gamma_k) \rightarrow \gamma_k(t) \cong |G(j\omega_k)| U_k \sin(\omega_k t + \gamma_k + \arg G(j\omega_k))$$

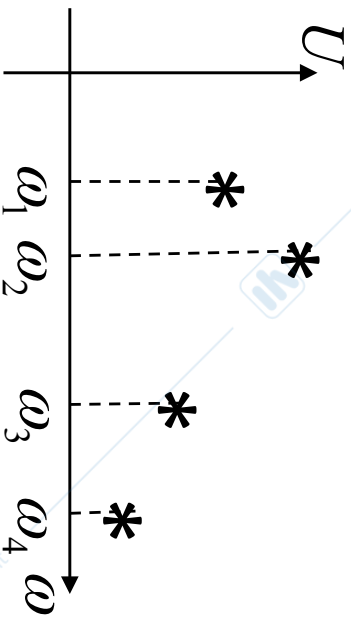


Estensioni del Th. r.i.f: Ingresso multisinusoidale

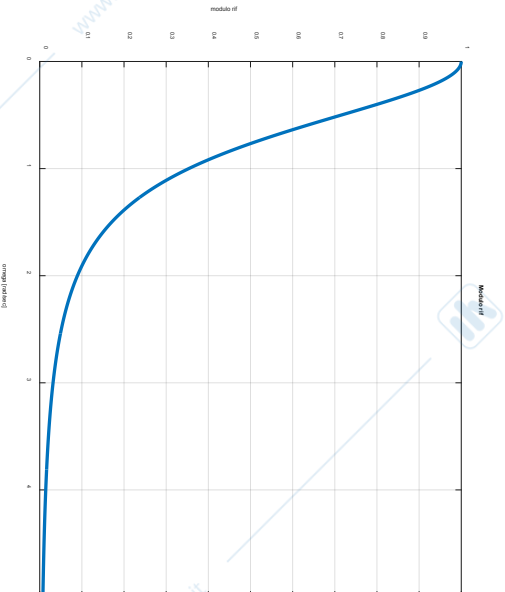
$$y(t) \cong \sum_{k=1}^N \underbrace{|G(j\omega_k)| U_k}_{\text{Spettro di ampiezza}} \sin(\omega_k t + \underbrace{\gamma_k + \arg G(j\omega_k)}_{\text{Spettro di fase}})$$

schema
concettuale

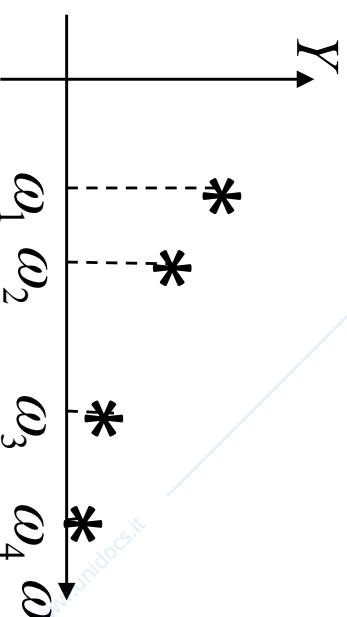
Spettro di ampiezza di u(t)



R.i.f. Modulo



Spettro di ampiezza di y(t)





Ingresso periodico

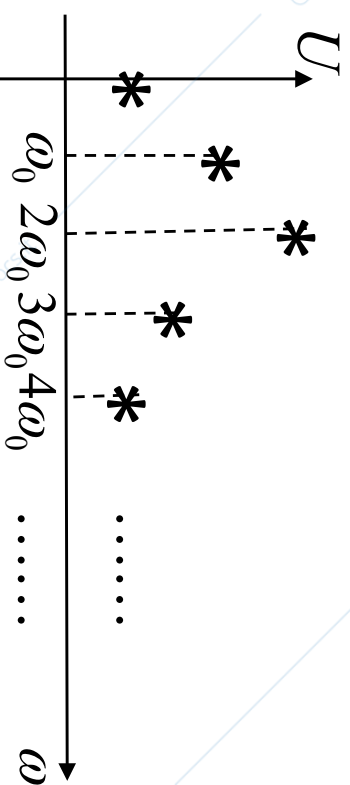
$$u(t) = u(t + T), \quad \forall t \quad T = \text{periodo} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \text{pulsazione fondamentale}$$

Serie di Fourier

$$u(t) = U_0 + U_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + U_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) + \dots \quad \omega_k = k\omega_0$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin(k\omega_0 t + \gamma_k)$$

Spettro di ampiezza di u(t)





Estensioni del Th. r.i.f: Ingresso periodico

Serie di Fourier

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin(k\omega_0 t + \gamma_k)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega_k = k\omega_0$$

Principio di sovrapp. effetti + Th. r.i.f.

$$y(t) \cong G(0)U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |G(jk\omega_0)| U_k \sin(k\omega_0 t + \gamma_k + \arg G(jk\omega_0))$$



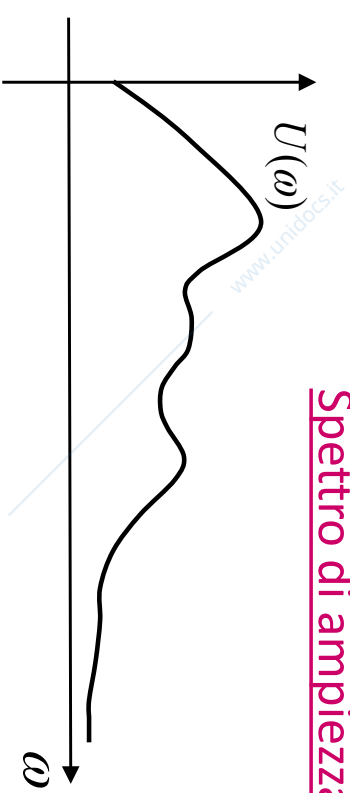
Estensioni del Th. r.i.f: ingresso generico

Ingresso "generico"

Sotto deboli ipotesi:

Integrale di Fourier

$$u(t) = \int_0^{+\infty} U(j\omega) \sin(\omega t + \gamma(\omega)) d\omega$$



Principio di sovrapp. effetti + Th. r.i.f.

$$y(t) \cong \int_0^{+\infty} |G(j\omega)| U(j\omega) \sin(\omega t + \gamma(\omega) + \arg G(j\omega)) d\omega$$



Trasformata di Fourier

Introduzione

E' data una funzione complessa f della variabile reale t , definita su tutto l'asse t

$$f(t) \quad , \quad -\infty < t < +\infty$$



Trasformata di Fourier

Trasformata di Fourier in forma esponenziale

Sotto larghe ipotesi

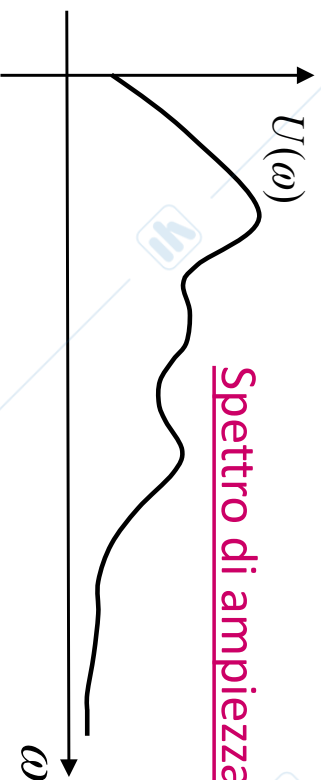
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Spettro di Fourier

$$F(j\omega) \Leftrightarrow \begin{cases} |F(j\omega)| & , \text{ Spettro di ampiezza} \\ \arg F(j\omega) & , \text{ Spettro di fase} \end{cases}$$

Lo spettro è Continuo

Notazione



$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]$$



Trasformata di Fourier

Antitrasformata di Fourier in forma esponenziale

Almeno nei punti in cui f
è continua e derivabile



$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

La relazione

tra una funzione del tempo e la sua trasformata di Fourier
è biunivoca! (come per traf. e antitr. Di Laplace)

$$f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$$

come nel caso della trasformata di Laplace prendiamo
una funzione nel tempo e la trasformiamo in una
funzione in un altro dominio



Trasformata di Fourier

Antitrasformata di Fourier in forma trigonometrica

Se f è reale

$$F(-j\omega) = \bar{F}(j\omega)$$

e quindi

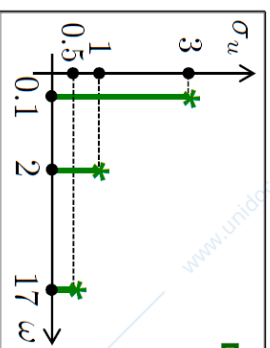
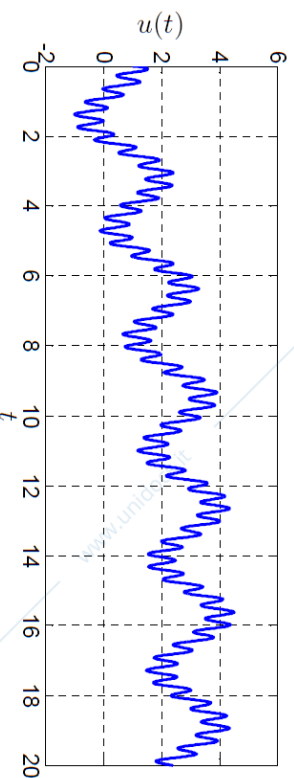
$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t + \arg F(j\omega)) d\omega$$

La funzione f è vista come somma non numerabile di *Armoniche*, cioè di funzioni elementari sinusoidali di pulsazione ω reale, con ampiezza e fase dipendenti dallo spettro



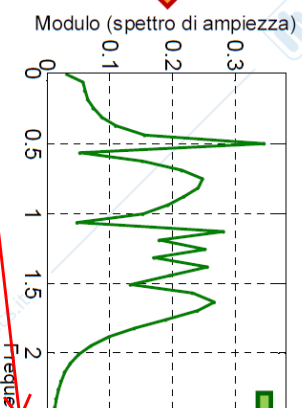
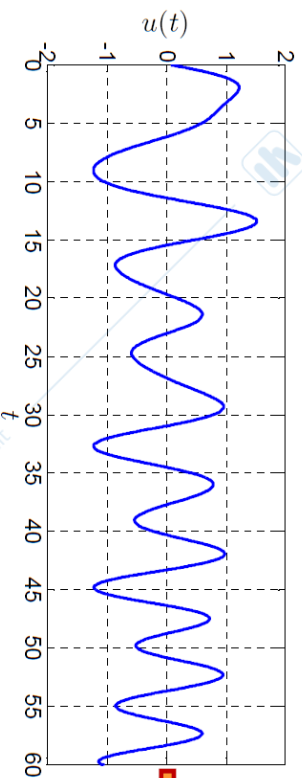
Spettro discreto e spettro continuo

$$u(t) = \sum_i \sigma_u(\omega_i) \cos(\omega_i t + \varphi_u(\omega_i))$$



Spettro discreto: masse puntiformi poste in corrispondenza di "alcune" pulsazioni ω .

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \sigma_u(\omega) \cos(\omega t + \varphi_u(\omega)) d\omega$$



Spettro continuo: densità di massa "spalmata" su un intervallo di pulsazioni.

il contenuto armonico sta tra $\omega=0$ e $\omega=4$, in pratica le armoniche "vivono" tra $\omega=0$ fino a 4, poi non se ne vede più l'effetto



Relazione tra le trasformate di Fourier e di Laplace

Perché due trasformate?

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Se f è nulla per tempi negativi sembra che si passi da una trasformata all'altra semplicemente ponendo

$$s = j\omega, \quad \omega = s/j$$

$s \neq j\omega$

Ciò è vero solo se l'integrale di Laplace converge per $s = j\omega$

A favore di Laplace



La classe dei segnali trasformabili con Laplace è più ampia della classe dei segnali trasformabili con Fourier

A favore di Fourier



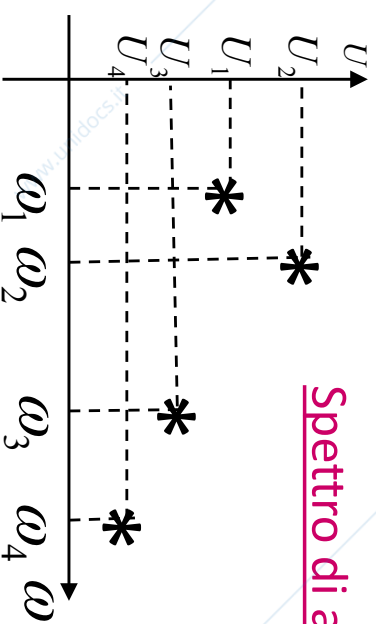
solo la teoria di Fourier ci permette di analizzare i segnali in termini di componenti armoniche

Solo un segnale trasformabile con Fourier si può interpretare come costituito dalla somma di armoniche



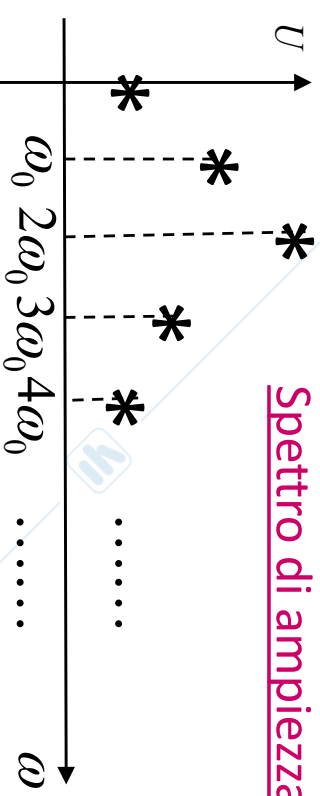
Spettri di ampiezza: riepilogo

Segnale multisinusoidale



Spettro di ampiezza

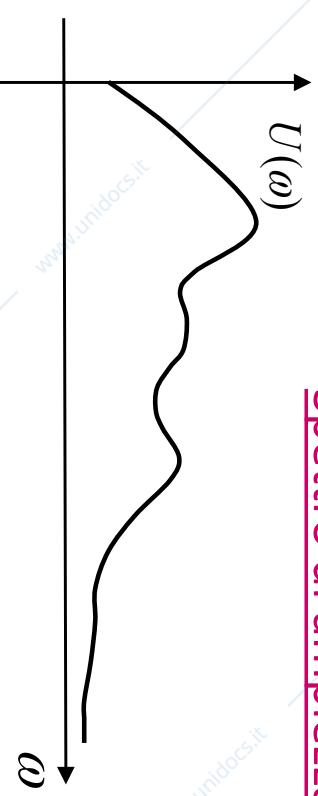
Segnale periodico



Spettro di ampiezza

Fourier trasformabile

Segnale "generico" ($T \rightarrow \infty$)

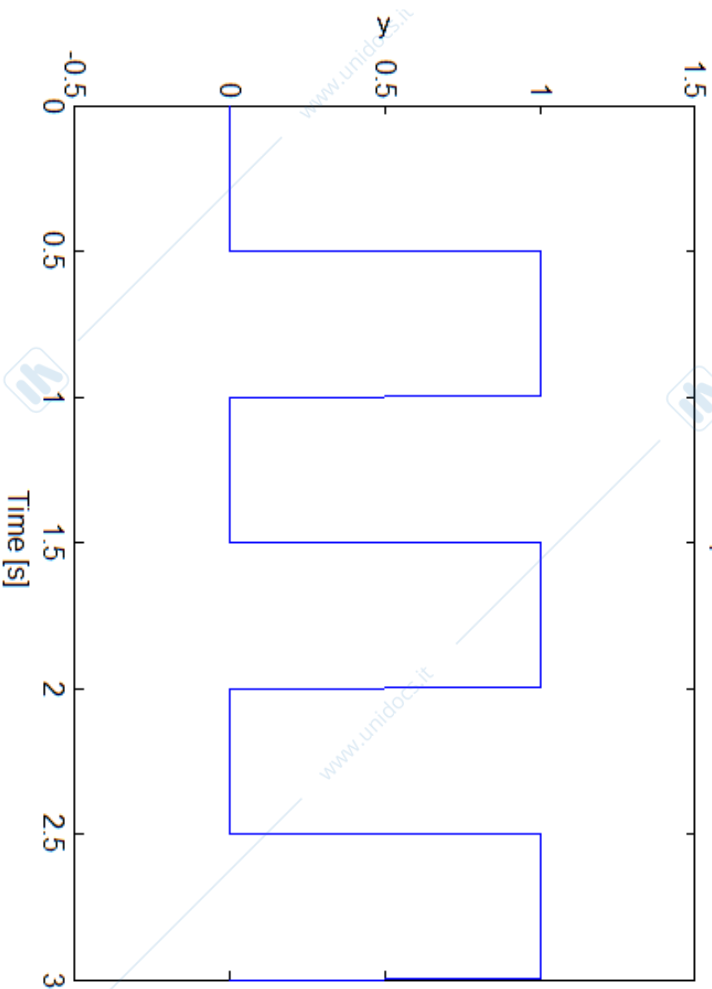


Spettro di ampiezza

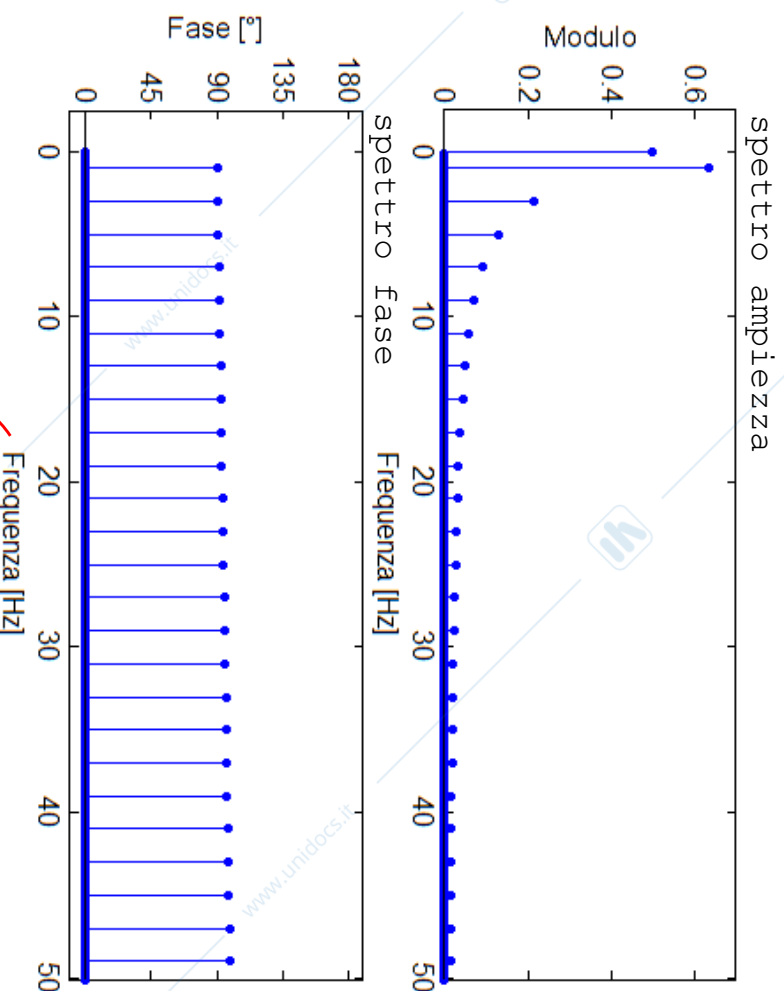
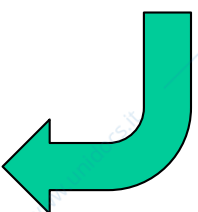


Esempio di ricostruzione di un segnale come somma di armoniche

Esempio 4



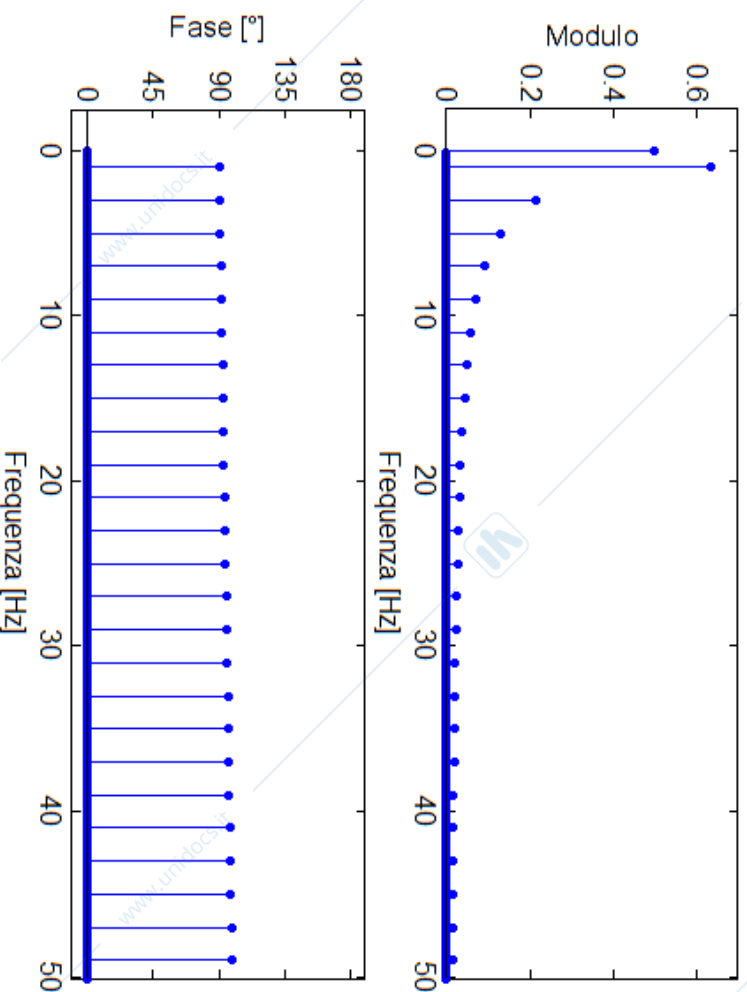
avendo un segnale $u(t)$ e facendo su matlab $\rightarrow \text{fft}(u)$ otteniamo i due spettri



$$b = \frac{\omega \omega}{2\pi}$$

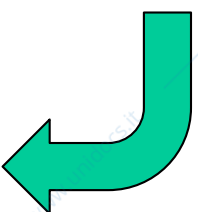
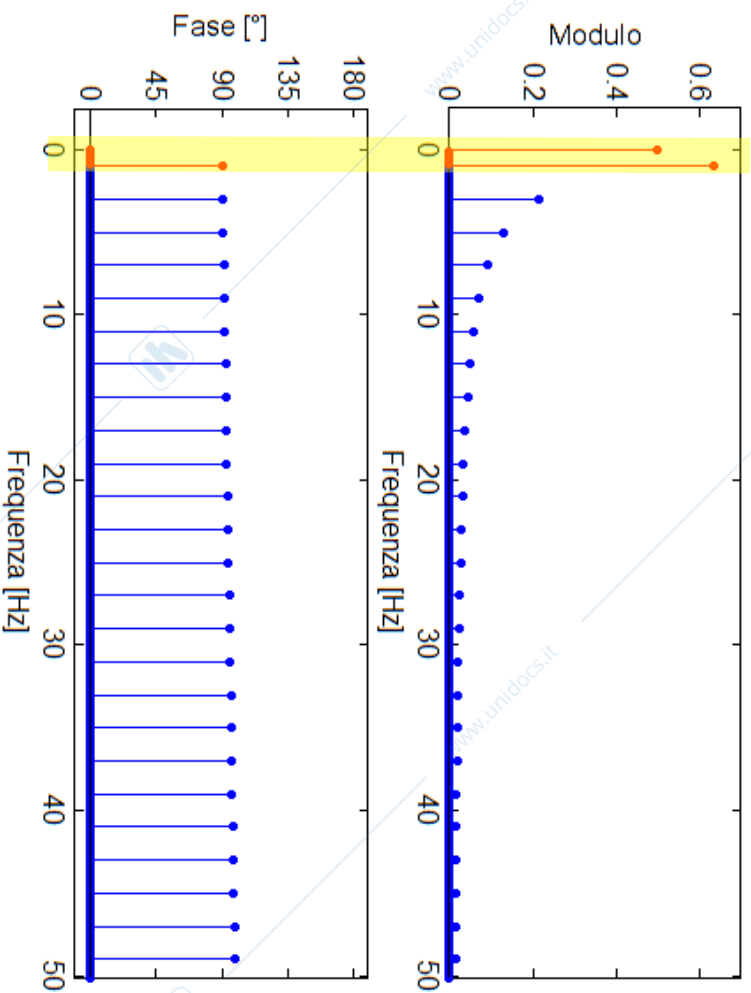


- Esempio 4
- Lo spettro del segnale risulta essere molto complesso (la rappresentazione in figura è parziale, poichè le componenti armoniche sono non nulle anche a più alte frequenze).
- Cosa succede se per descrivere il segnale si utilizzano solo alcune componenti dello spettro?



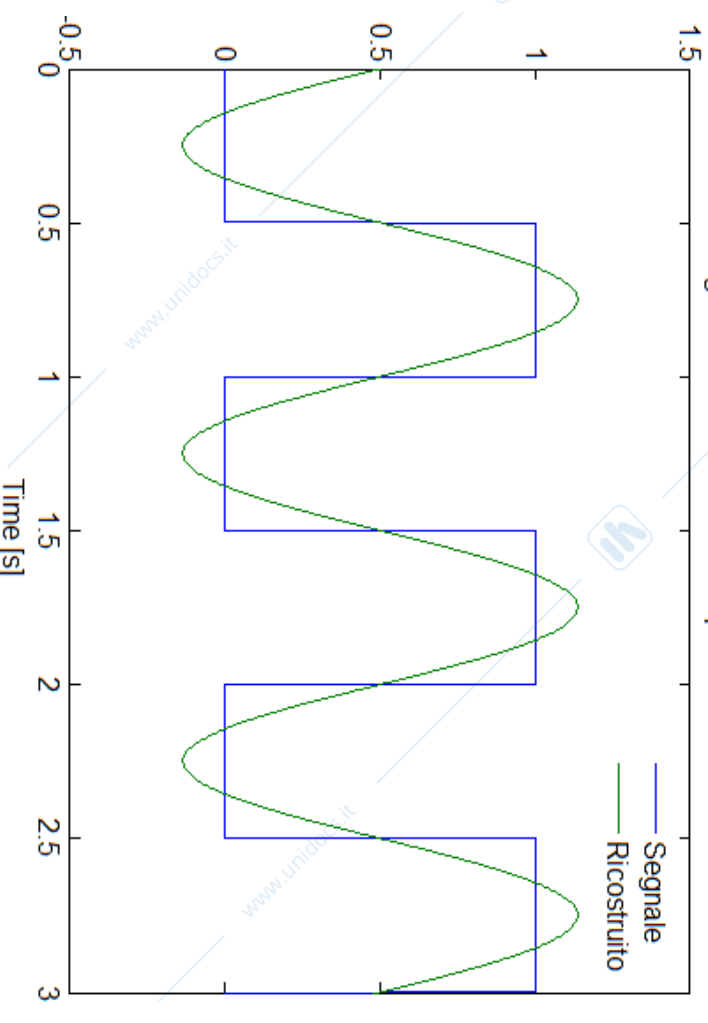


- Esempio 4
 - Ricostruzione utilizzando solo le componenti fino a 1Hz



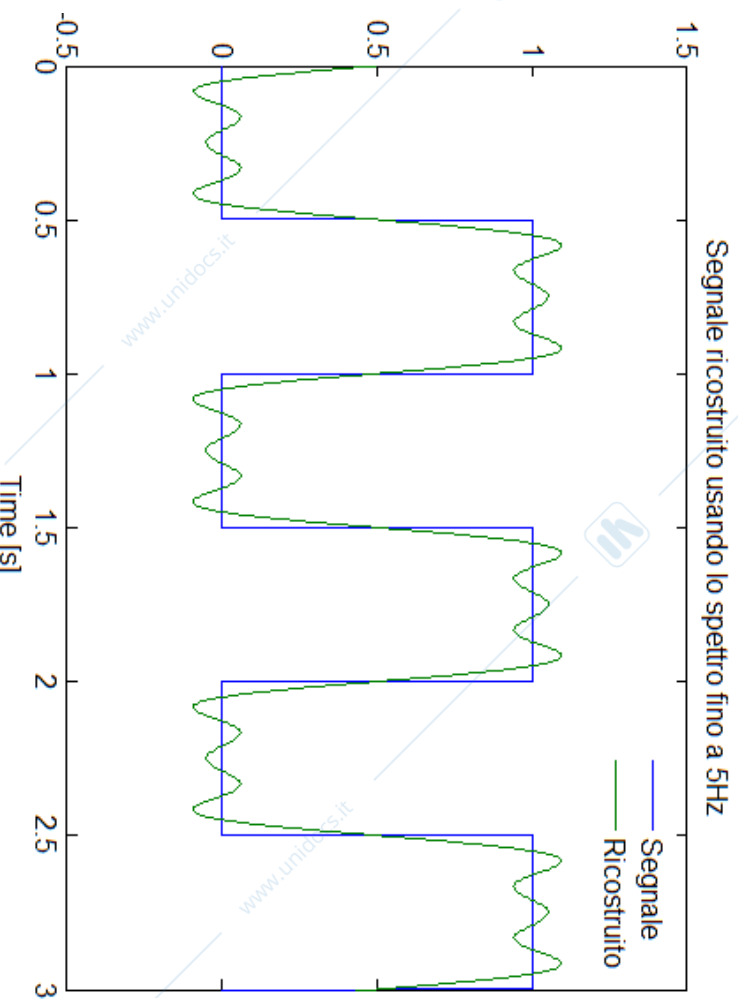
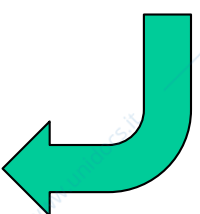
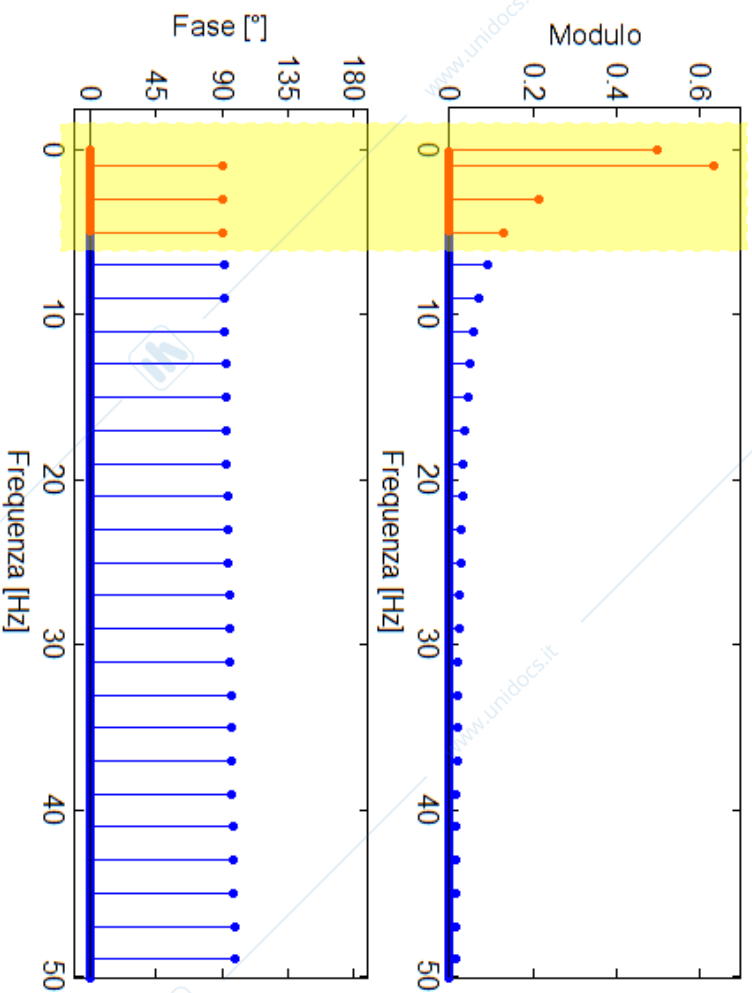
$$y(t) = \sum_{\omega=0}^{2\pi 1} A(\omega) \sin(\omega \cdot t + \phi(\omega))$$

Segnale ricostruito usando lo spettro fino a 1Hz



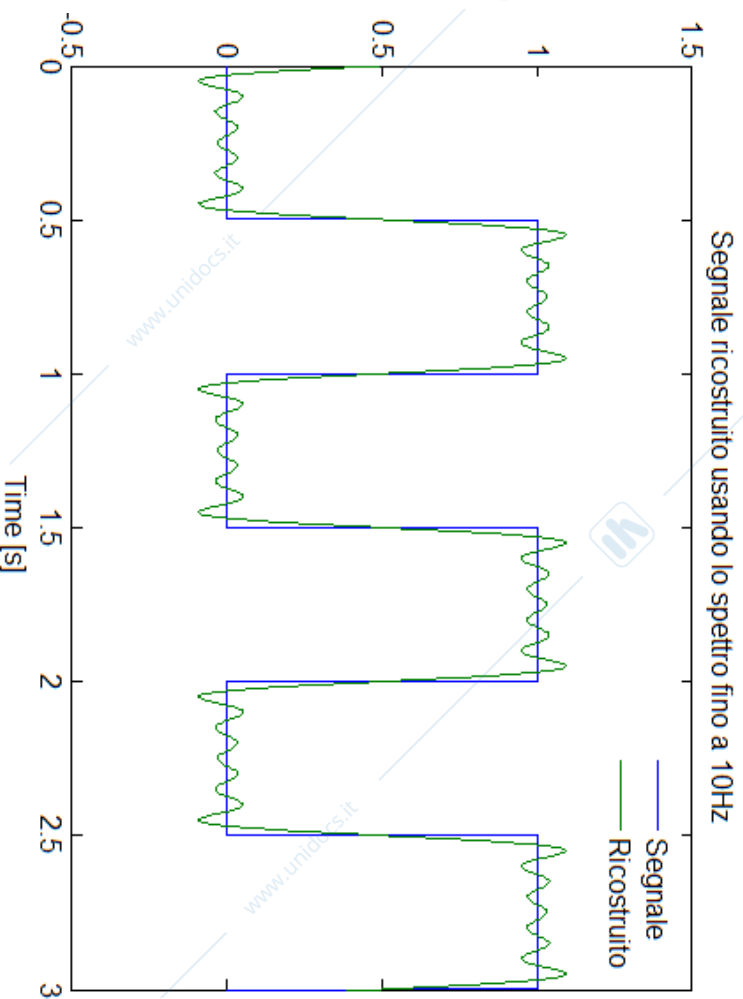
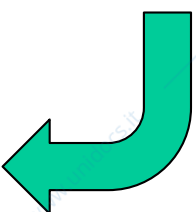
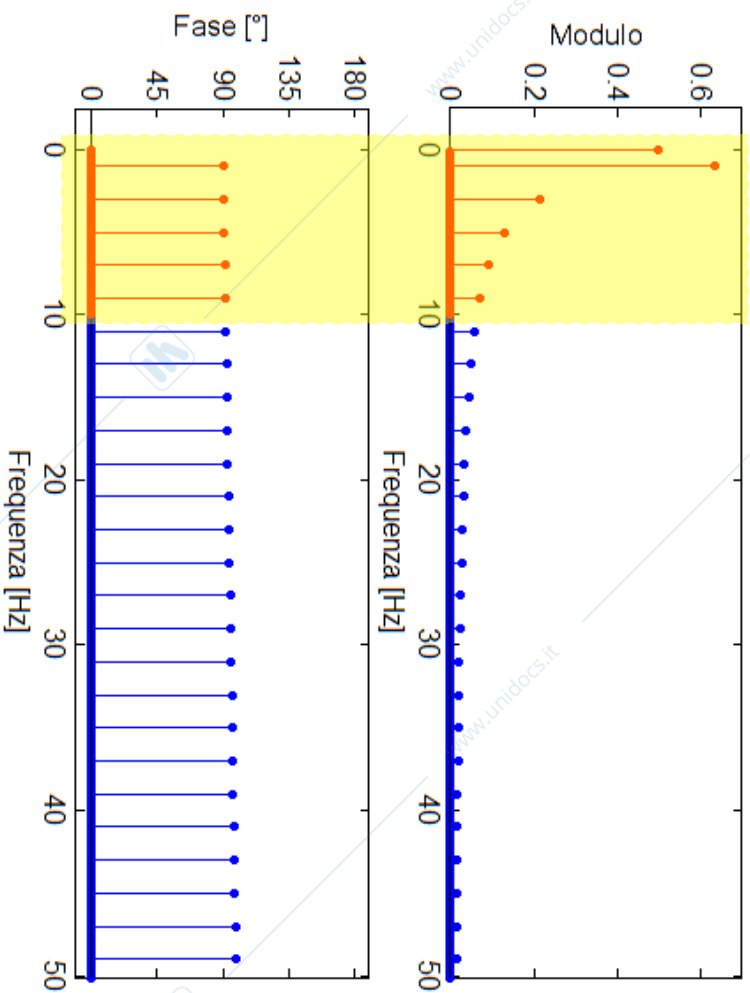


- Esempio 4
 - Ricostruzione utilizzando solo le componenti fino a 5Hz



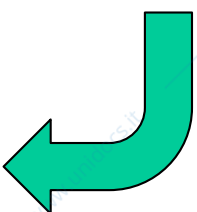
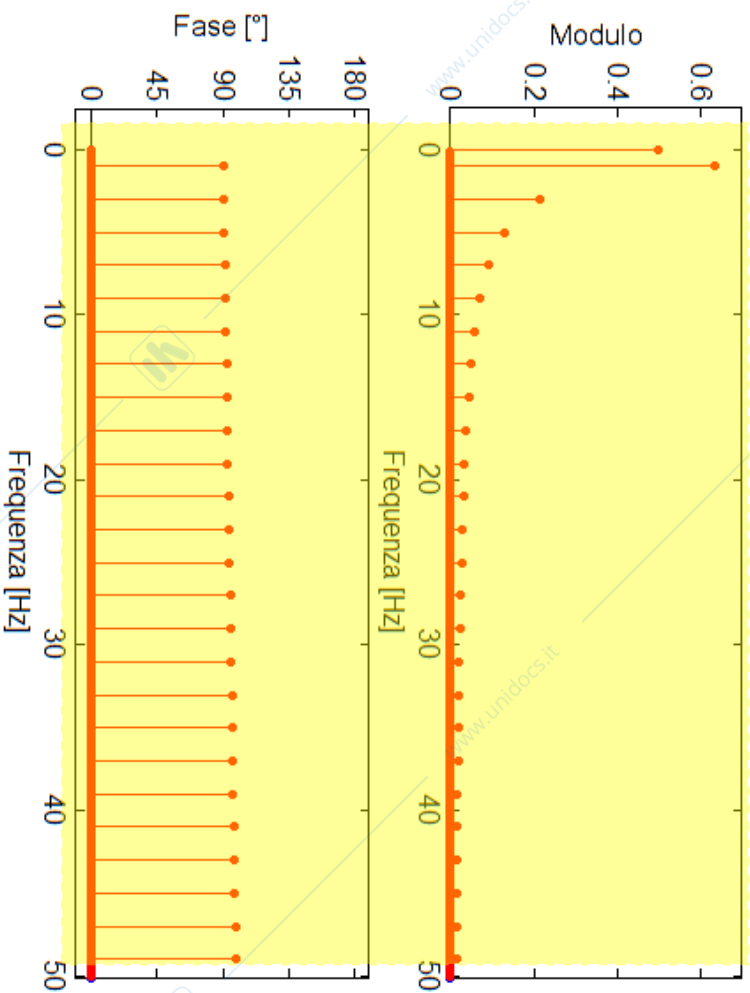


- Esempio 4
 - Ricostruzione utilizzando solo le componenti fino a 10Hz

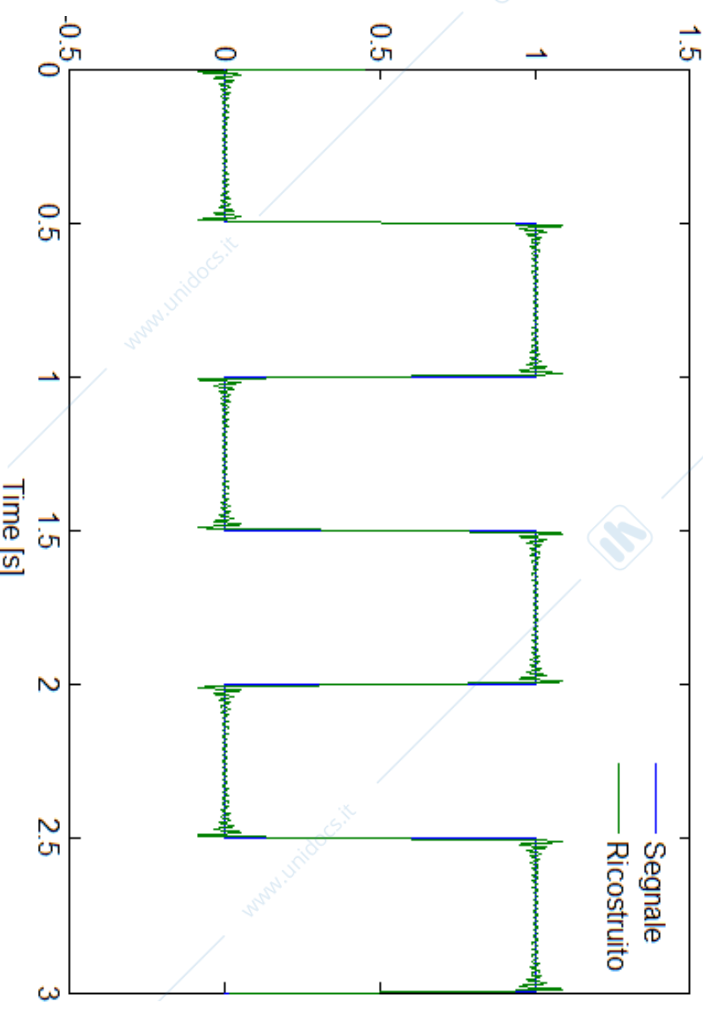


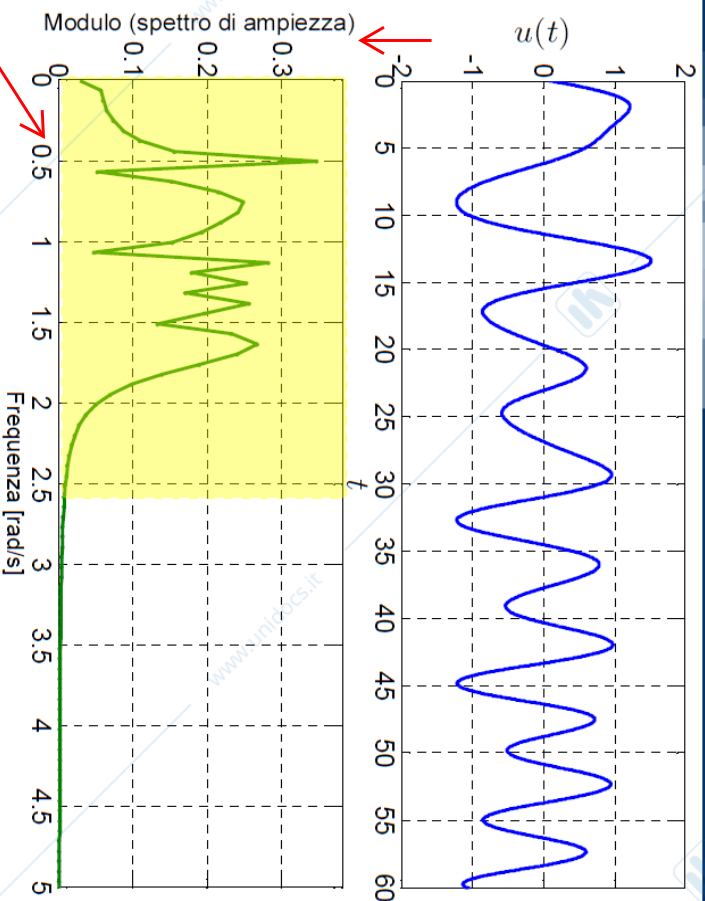


- Esempio 4
 - Ricostruzione utilizzando solo le componenti fino a 50Hz

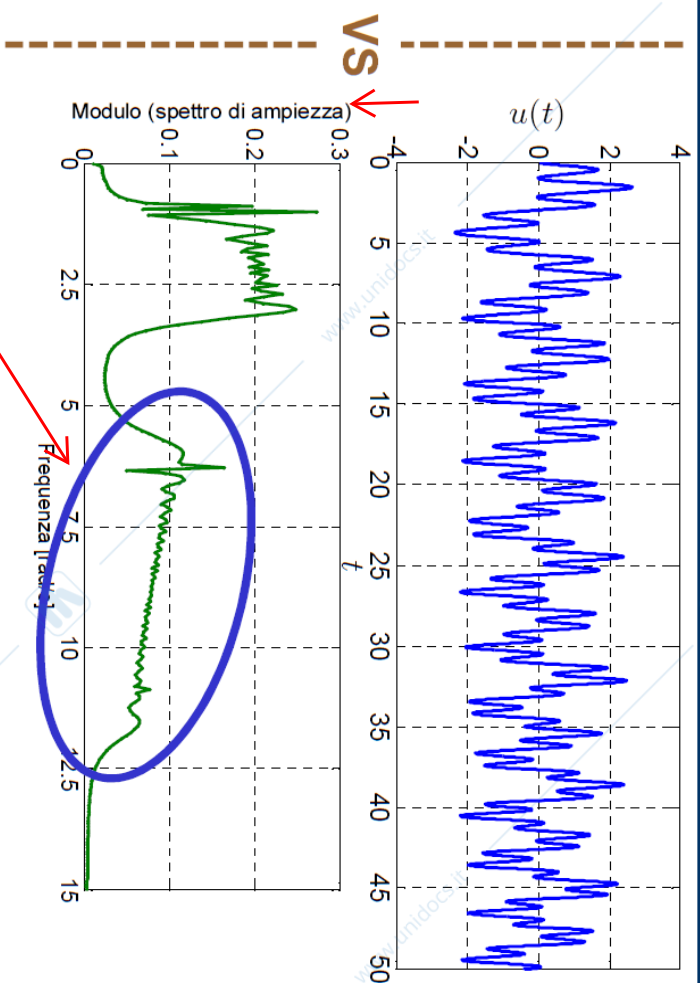


Segnale ricostruito usando lo spettro fino a 50Hz





zona che da tutto il segnale (si ferma a frequenze relativamente basse)



frequenze molto alte che danno l'effetto nervoso del segnale

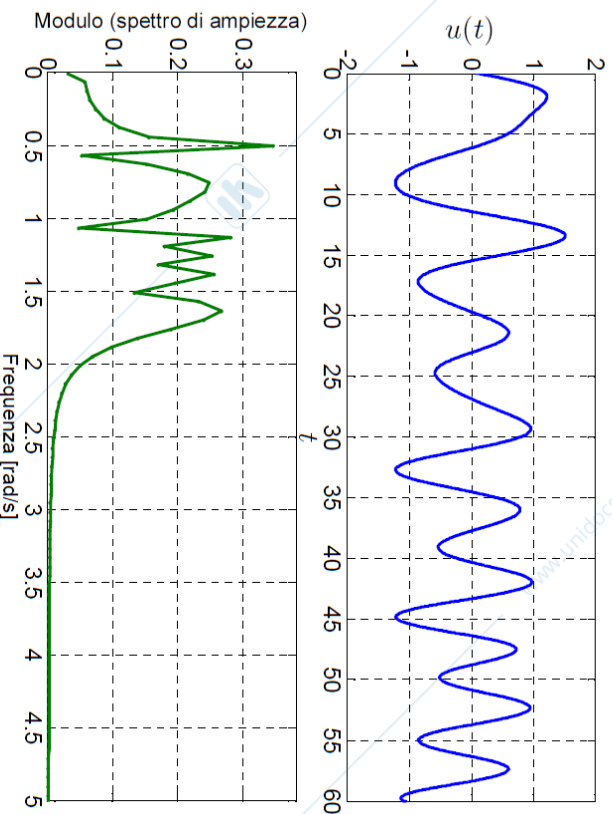
L'andamento **più nervoso** del segnale di destra rispetto a quello di sinistra si riflette a livello di spettro, nella presenza di armoniche a **più elevata frequenza** di quelle che compongono il segnale di sinistra.



Banda di un segnale

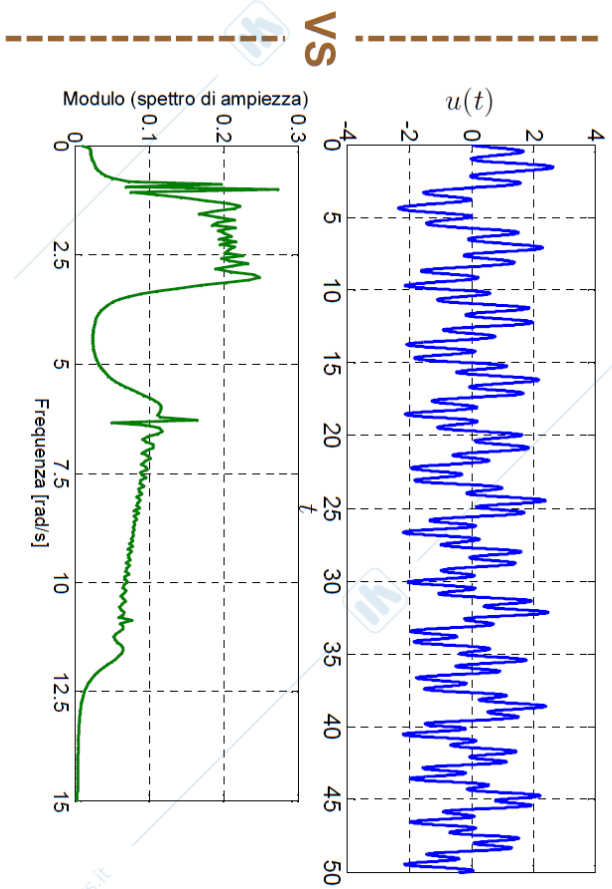
Def. Un segnale è detto essere a *banda limitata* se esiste una pulsazione $\bar{\omega}$ tale che $\sigma_u(\omega) = 0 \forall \omega > \bar{\omega}$ (cioè, lo spettro è definitivamente nullo).

La *banda del segnale* è l'intervallo di pulsazioni all'interno del quale lo spettro non è nullo (in senso lato, la banda di un segnale è l'intervallo di pulsazioni in cui è *prevalentemente concentrato* lo spettro di ampiezza del segnale).



Banda $\approx [0, 3]$ rad/s

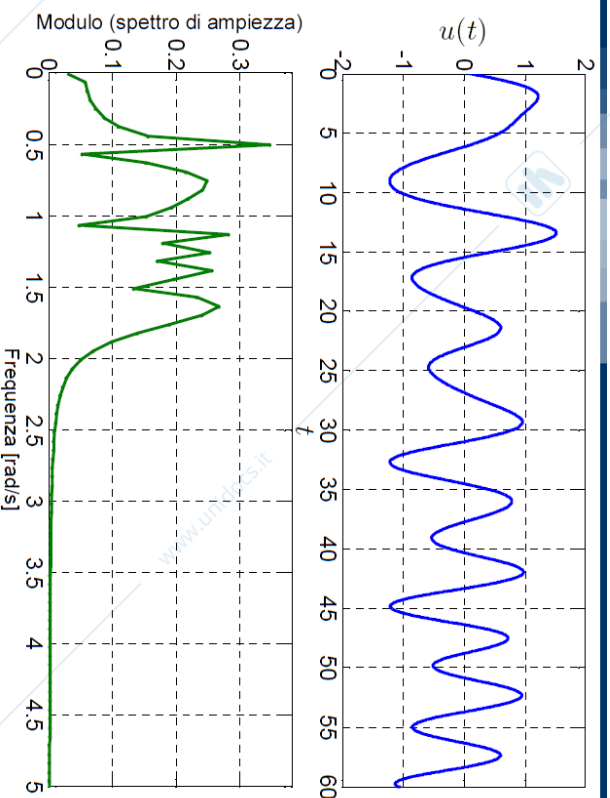
banda concentrata nell'intervallo tra 0 e 3



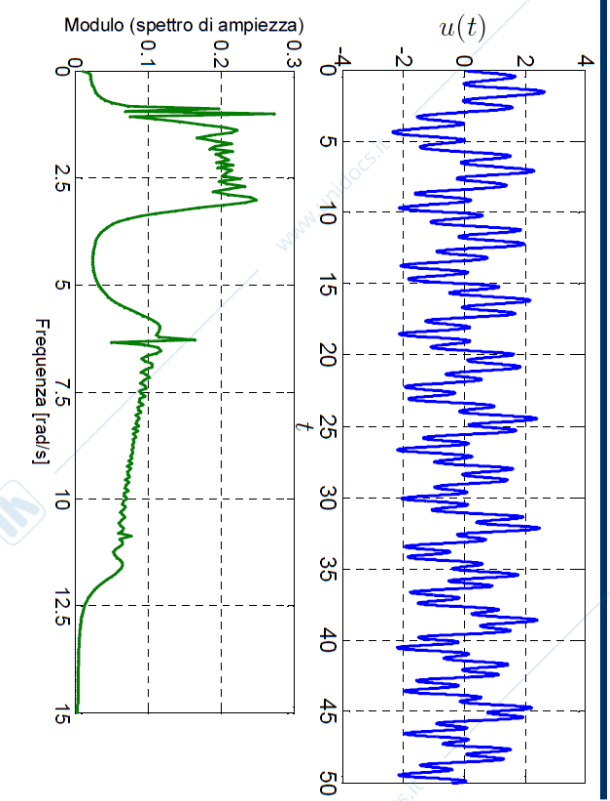
VS Banda $\approx [0, 14]$ rad/s



Banda di un segnale



Banda $\approx [0, 3]$ rad/s



Banda $\approx [0, 14]$ rad/s

In sintesi:

- La banda di un segnale individua la regione delle pulsazioni in cui si concentra il contenuto armonico di un segnale;
- L'andamento di un segnale è tanto più nervoso e rapidamente **variabile** quanto più la sua banda si estende a **frequenze elevate**.

Interazione tra segnali e sistemi



Teorema della risposta armonica:

sia $G(s)$ la funzione di trasferimento di un sistema lineare AS, allora:

- $u(t) = \sigma \cos(\omega t + \varphi) \implies$

$$y_R(t) = |G(j\omega)| \sigma \cos(\omega t + \varphi + \angle G(j\omega));$$

- $u(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \implies$

$$y_R(t) = \sum_{i=1}^n |G(j\omega_i)| \sigma_i \cos(\omega_i t + \varphi_i + \angle G(j\omega_i));$$

- $u(t) = \int_0^{+\infty} \sigma_u(\omega) \cos(\omega t + \varphi_u(\omega)) d\omega \implies$

$$y_R(t) = \int_0^{+\infty} |G(j\omega)| \sigma_u(\omega) \cos(\omega t + \varphi_u(\omega) + \angle G(j\omega)) d\omega.$$





Teorema della risposta armonica: sia $G(s)$ la funzione di trasferimento di un sistema lineare AS, allora:

- $u(t) = \int_0^{+\infty} \sigma_u(\omega) \cos(\omega t + \varphi_u(\omega)) d\omega \implies$

$$y_R(t) = \int_0^{+\infty} \underbrace{|G(j\omega)|}_{\sigma_y(\omega)} \sigma_u(\omega) \cos(\omega t + \varphi_u(\omega) + \angle G(j\omega)) d\omega.$$

Quindi, lo spettro di ampiezza σ_y dell'uscita di regime è dato da

$$\sigma_y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \omega \mapsto |G(j\omega)| \sigma_u(\omega)$$

Il problema del «filtraggio»



Spettro di ampiezza dell'uscita di regime:

$$\sigma_y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\omega \mapsto |G(j\omega)|\sigma_u(\omega)$$

nel segnale di uscite non compaiono "nuove" armoniche (perchè il sistema è LTI)

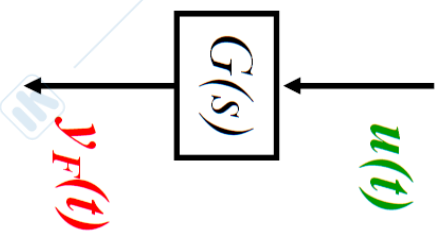
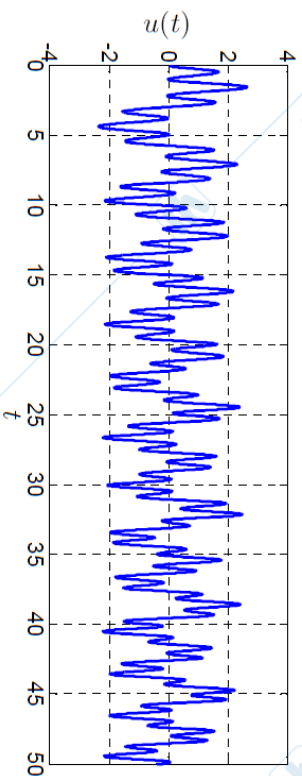
Conseguenze:

- Il peso delle varie armoniche che compongono $y_F(t)$ è amplificato/attenuato a seconda che $|G(j\omega)| \gtrless 1$;
- Nel segnale di uscita non compaiono armoniche che erano assenti nel segnale d'ingresso (non "nascono" nuove armoniche);
- Armoniche a pulsazione ω presenti nel segnale d'ingresso possono apparire molto attenuate (quasi cancellate) nel segnale di uscita se $|G(j\omega)| \ll 1$ o addirittura cancellate se $G(j\omega) = 0$ (proprietà bloccante degli zeri);
- La banda di $y_F(t)$ è più piccola o uguale a quella di $u(t)$.

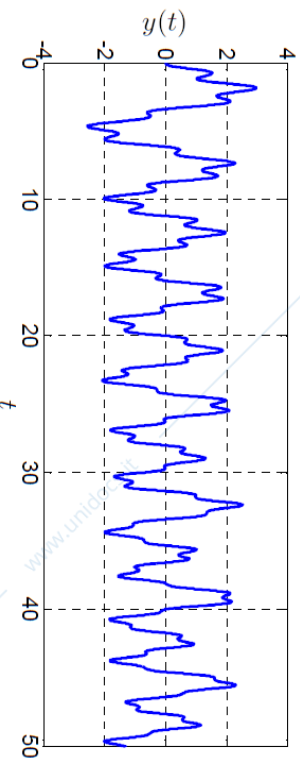
non può essere più grande poiché non compaiono nuove armoniche



Capire come un segnale viene «modificato» da un sistema



$$G(s) = \frac{2}{1 + \frac{2}{3}s}$$

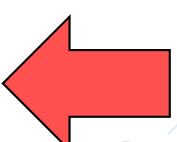


Vogliamo imparare a capire come il sistema influisce sul segnale di ingresso e a causare una certa uscita (ricavando i grafici sotto)

$$|G(j\omega)|$$



Per studiarlo dobbiamo imparare a dare una rappresentazione della risposta in frequenza associata alla FdT del sistema in termini di modulo e fase!



Vediamo come si tracciano i
DIAGRAMMI DI BODE

$$\angle G(j\omega)$$

