FONDAMENTI DI AUTOMATICA - Ingegneria Elettronica **Prof.ssa Mara Tanelli**
Appello del 16 febbraio 2012

1. Si consideri il sistema dinamico lineare e tempo invariante con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - 4x_2(t) + 3u(t)$$
$$y(t) = x_1(t) - x_2(t).$$

1.1 Studiare la stabilità del sistema.

La matrice A è $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ i cui autovalori sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$.

Poiché $\exists$ i $\lambda_i(A)$ è POSITIVO, possiamo dire che il sistema è INSTABILE

N.B. Gli autovalori sono reali

1.2 Calcolare il movimento libero dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

<u>I^e equazione</u>: $\dot{x}_1 = 2x_1$, $x_1(0) = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_1(t) = e^{2t},\ t \geq 0}$

<u>II^e equazione</u>: $\dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 + 3u$, $x_2(0) = 1$ MOV. LIBERO $\Rightarrow u(t) \equiv 0$

$$\dot{x}_2 = -4x_2 + e^{2t}, \quad x_2(0) = 1$$

$$x_{2_L}(t) = e^{-4t} + \int_0^t e^{-4(t-\tau)} e^{2\tau} d\tau = e^{-4t} + e^{-4t}\int_0^t e^{6\tau} d\tau =$$

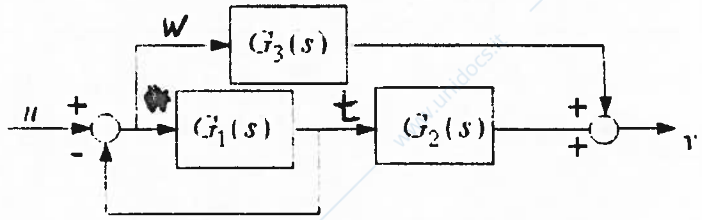
$$= e^{-4t} + \frac{e^{-4t}}{6}\left(e^{6t} - 1\right) = \boxed{\frac{5}{6}e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{2t},\ t \geq 0}$$

$$\boxed{y_L(t) = x_{1_L} - x_{2_L} = \frac{5}{6}\left(e^{-4t} + e^{2t}\right),\ t \geq 0}$$

1.3 Si dica, motivando la risposta, se esistono condizioni iniziali diverse da $x_1(0) = x_2(0) = 0$ tali che il movimento libero dell'uscita tende a zero per $t \to +\infty$.

Perché $y_L \to 0$ per $t \to +\infty$ occorre che non vi compaia il termine associato al modo instabile e^{2t}.
Pertanto, tutte le C.I. della forma $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ danno il risultato desiderato

2. Si consideri lo schema a blocchi in figura



dove $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$ sono funzioni di trasferimento di sistemi di ordine uno.
2.1 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$.

$$t = \frac{G_1}{1+G_1} U \qquad W = U - G_1 W \Rightarrow W = \frac{1}{1+G_1} U$$

$$Y = G_2 t + G_3 W = \underbrace{\left[\frac{G_1 G_2}{1+G_1} + \frac{G_3}{1+G_1}\right]}_{H(s)} U$$

2.2 Posto $G_1(s) = \frac{1}{s+5}$, $G_2(s) = \frac{s+6}{s+0.2}$, $G_3(s) = -\frac{1}{s+5}$, calcolare $H(s)$ e studiare la stabilità del sistema con ingresso u e uscita y.

$$H(s) = \frac{1}{1+\frac{1}{s+5}}\left[\frac{1}{s+5}\,\frac{s+6}{s+0{,}2} - \frac{1}{s+5}\right] = \frac{\cancel{s+5}}{s+6}\left[\frac{s+6-s-0{,}2}{\cancel{(s+5)}(s+0{,}2)}\right]$$

$$= \boxed{\frac{5{,}8}{(s+6)(s+0{,}2)}}$$

H(s) ha 2 poli, mentre il sistema è di ordine 3

L'autovalore nascosto è $\lambda = -5$ (polo di G_3)
gli altri due autovalori sono i poli di $H(s)$: $\lambda = -6$, $\lambda = -0{,}$
$Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i \iff$ sistema AS. STABILE

2.3 Calcolare la risposta di regime del sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ all'ingresso $u(t) = e^{-3t} + 1 + 5\sin(0.2t)$.

(a) (b) (c)

a) $y_a(t) \to 0$ perché lo sistema AS. STABILE alimentato con un ingresso che $\to 0$ per $t \to +\infty$

b) $y_b(t) \to H(0)$ SIST. AS. STABILE alimentato con gradino unitario

c) Posso applicare il teorema della risposta in frequenza

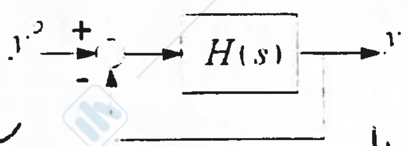
$$y_c(t) \to 5\,|H(j0{,}2)|\,\sin\left(0{,}2t + \angle H(j0{,}2)\right)$$

in $\omega = 0{,}2$ c'è un polo di $H(s)$, e le altre singolarità distano tra loro di almeno 1 decade:

$$|H(j0{,}2)| = H(0)/\sqrt{2}\,, \quad \angle H(j0{,}2) = -\pi/4$$

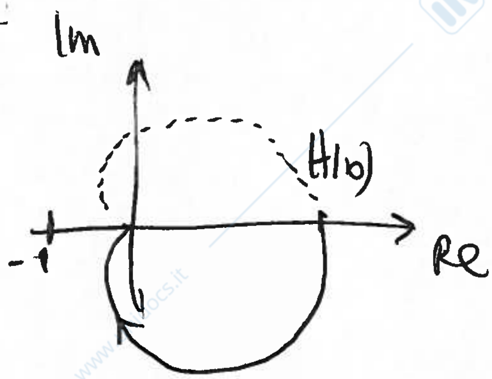
$$y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} y_a + y_b + y_c$$

2.4 Tracciare il diagramma polare di $H(s)$ e, considerando il sistema retroazionato in figura, studiarne la stabilità mediante il criterio di Nyquist.



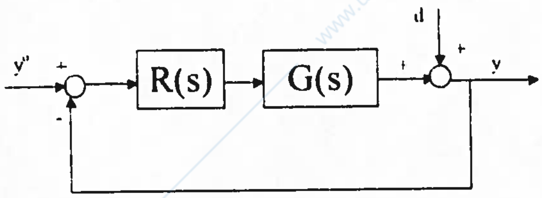
H(s) non ha poli con parte reale positiva $\Rightarrow P = 0$

Il diagramma di Nyquist di $H(j\omega)$ non fa giri attorno al punto $(-1,0)$ $\Rightarrow N = 0$



$N = P \iff$ sistema in anello chiuso AS. STABILE

3. Si consideri il sistema di controllo in figura



dove $G(s) = \frac{10}{(s-1)} e^{-0.1s}$.

3.1 Progettare un regolatore $R(s)$ tale che: 1) il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di $y^o(t) = \pm 2\mathrm{sca}(t)$ e $d(t) = \pm \mathrm{sca}(t)$ sia $|e_\infty| \leq 0.2$; 2) la pulsazione critica del sistema in anello chiuso sia $\omega_c \geq 0.8\,\mathrm{rad/s}$ e il margine di fase sia $\varphi_m \geq 60°$.

$$e_\infty = e_{y^o} + e_d$$

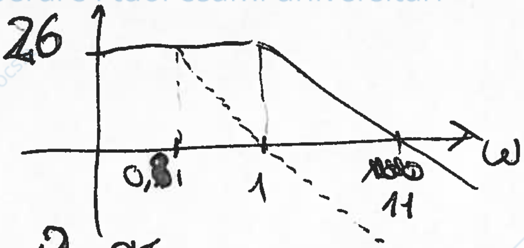
$$|e_{y^o\infty}| = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+L(s)} \frac{2}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{2}{1+\frac{10\mu_R}{s^{g_R}}} \begin{cases} \frac{2}{1+10\mu_R} & \text{se } g_R = 0 \\ 0 & g_R \geq 1 \end{cases}$$

$$|e_{yd}| = \begin{cases} \frac{1}{1+10\mu_R} & \text{se } g_R = 0 \\ 0 & \text{se } g_R \geq 1 \end{cases}$$

Pongo $g_R = 0$ $\quad |e| = \frac{3}{1+10\mu_R} \leq 0{,}2 \iff \mu_R \geq 1{,}4$

$$\boxed{\text{Pongo } \mu_R = 2}$$

$L_1(s) = \frac{20}{s+1} e^{-0,1s}$



$\omega_c > 1!$ $\varphi_m < 0!$ NO

$\boxed{L_2(s) = \frac{20}{10s+1} e^{-0,1s}}$

$\omega_c \cong 2$ OK

$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 75,7°$

$R(s) = 2 \frac{s+1}{10s+1}$

3.2 Si tracci il grafico dell'andamento qualitativo della risposta di $y(t)$ del sistema in anello chiuso a fronte di un riferimento $y^o(t) = 2\,\mathrm{sca}(t)$ e con $d(t) = 0$ (si specifichino, in particolare: valore iniziale, valore finale, tempo di assestamento e sovraelongazione percentuale massima (nota: $S\% = 100\, e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$).

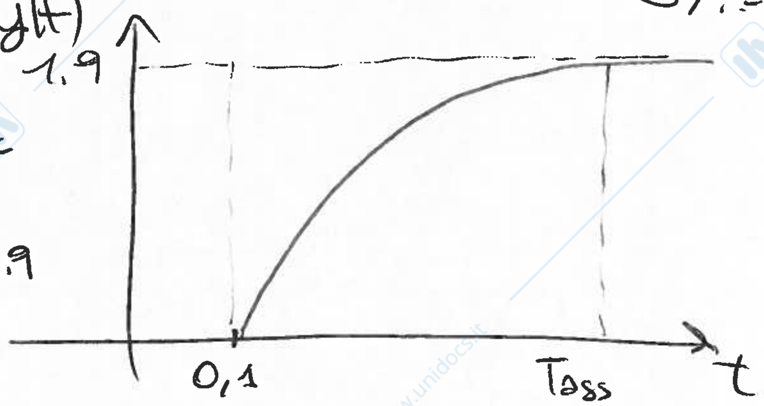
$\varphi_m \geq 75°$ $\Rightarrow$ F(s) approssimabile con 1 solo polo reale a $\omega \simeq \omega_c$

Valore iniziale = 0

Valore finale:

$2 \cdot F(0) = 2 \frac{L(0)}{1+L(0)} \simeq 2 \frac{20}{21} = 1{,}9$

S% = 0



$T_{ass} \simeq \frac{5}{\omega_c} = \frac{5}{2} = 2.5\,s$

4. Con riferimento ai sistemi dinamici lineari e tempo invarianti a tempo continuo, si definisca con precisione il concetto di margine di fase, precisandone il ruolo nella sintesi dei sistemi di controllo.

Vedi libro/appunti

5. Si introduca la funzione di trasferimento di un regolatore Proporzionale Integrale (PI), precisandone il significato dei parametri che vi compaiono. Si discuta poi il problema del wind-up (o carica integrale) associato alla componente integrale del regolatore, mostrando l'implementanzione anti wind-up.

Vedi libro / appunti