Si consideri un sistema LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Con C.I. nulle $x(0) = 0$ e $u(t) = imp(t)$
Dalla formula di Lagrange si ha che l'uscita (forzata perché C.I. nulle) è

$$y(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, imp(\tau)\, d\tau =$$
$$= Ce^{At}B \int_{0^-}^{0^+} imp(\tau)\, d\tau = Ce^{At}B$$

<u>NOTA</u> La risposta all'impulso $\equiv$ con ~~la risposta~~ l'uscita libera dello stesso sistema con $x(0) = B$

$$y_L(t) = Ce^{At}x_0$$

ECCO PERCHÉ VI DICEVO CHE USANDO L'IMPULSO SI RIESCE AD "EMULARE" UNA VARIAZIONE delle C.I.

Riguardando ora la formula generale di Lagrange del movimento forzato (con $u(t)$ generico), si ha

$$y_f(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau =$$

$$(*) \quad \overset{!}{=} \int_0^t y_{imp}(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

PRODOTTO di CONVOLUZIONE TRA LA RISPOSTA ALL'IMPULSO e l'ingresso $u(t)$

dove $y_{imp}(t) = Ce^{At}B$

INFATTI sappiamo che nel dominio delle trasformate

$$Y(s) = G(s)\, U(s)$$ USCITA FORZATA

e da cui ricavo (*) ricordando le proprietà del prodotto di convoluzione

$$f_1(t) * f_2(t) = F_1(s) F_2(s)$$

e

$$G(s) = \mathcal{L}^{-1}\left[y_{imp}(t)\right]$$

N.B. L'integrale di convoluzione va da 0 a ∞ ma poiché $y_{imp}(t)$ e $u(t)$ sono $=0$ per $t<0$, l'integrale diventa tra 0 e t