

FONDAMENTI DI AUTOMATICA - Ingegneria Gestionale
Appello del 11 settembre 2014

Prof.ssa Mara Tanelli

1. Si consideri il sistema dinamico non lineare con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = 4\gamma^3 x_1^3(t) + 4x_2(t)u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + 3u(t)$$

$$y(t) = x_2(t),$$

con γ parametro reale non nullo.

1.1 Determinare stato (\bar{x}_1, \bar{x}_2) e uscita \bar{y} di equilibrio associati all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$, $t \geq 0$.

$$\begin{cases} 0 = 4\gamma^3 \bar{x}_1^3 + 4\bar{x}_2 \\ 0 = -3\bar{x}_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1^3 = -1/\gamma^3 \\ \bar{x}_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = -1/\gamma \\ \bar{x}_2 = 1 \end{cases}$$

$$\bar{y} = \bar{x}_2$$

$$\bar{y} = 1$$

$$\boxed{\bar{y} = \bar{x}_2 = 1}$$

1.2 Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio determinato al punto precedente.

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = 4\gamma^3 \cdot 3\bar{x}_1^2 \delta x_1 + 4\bar{u} \delta x_2 + 4\bar{x}_2 \delta u \\ \delta \dot{x}_2 = -3\delta x_2 + 3\delta u \end{cases}$$

$$\delta y = \delta x_2$$

All'equilibrio si ha

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = 12\gamma \delta x_1 + 4\delta x_2 + 4\delta u \\ \delta \dot{x}_2 = -3\delta x_2 + 3\delta u \end{cases}$$

$$\delta y = \delta x_2$$

1.3 Studiare la stabilità del sistema linearizzato al variare di γ e valutare, se possibile, la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare.

la matrice A del nuovo linearizzato è

$$A = \begin{bmatrix} 12\gamma & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda = \{12\gamma, -3\}$

• Per $\gamma < 0$ si ha $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0 \forall i$, il che implica che il sistema linearizzato è ASINT.-STABILE con come il mov. di equilibrio del sistema non lineare

• Per $\gamma > 0$ $\exists i: \text{Re}(\lambda_i(A)) > 0$, il che implica che il sistema linearizzato è instabile e lo è anche il mov. di eq. del sistema non lineare. NOTA $\gamma \neq 0$ per ipotesi (vedi punto 1.1)

2. Si consideri la seguente funzione di trasferimento di un sistema lineare e tempo invariante di ordine tre

$$H(s) = 5 \frac{(s+10)}{(s+1)(s^2+10s+100)}$$

2.1 Determinare tipo, guadagno, poli e zeri di $H(s)$ e la costante di tempo dominante del sistema.

$$\text{Tipo} = \# \text{poli} - \# \text{zeri in } s=0 = 0$$

$$H(0) = 0,5$$

$$z_1 = -10$$

$$p_1 = -1 \quad p_{2,3} = -5 \pm 5 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tau_d = \frac{1}{|\text{Re}(p_d)|} = 1$$

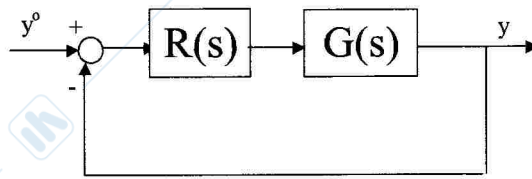
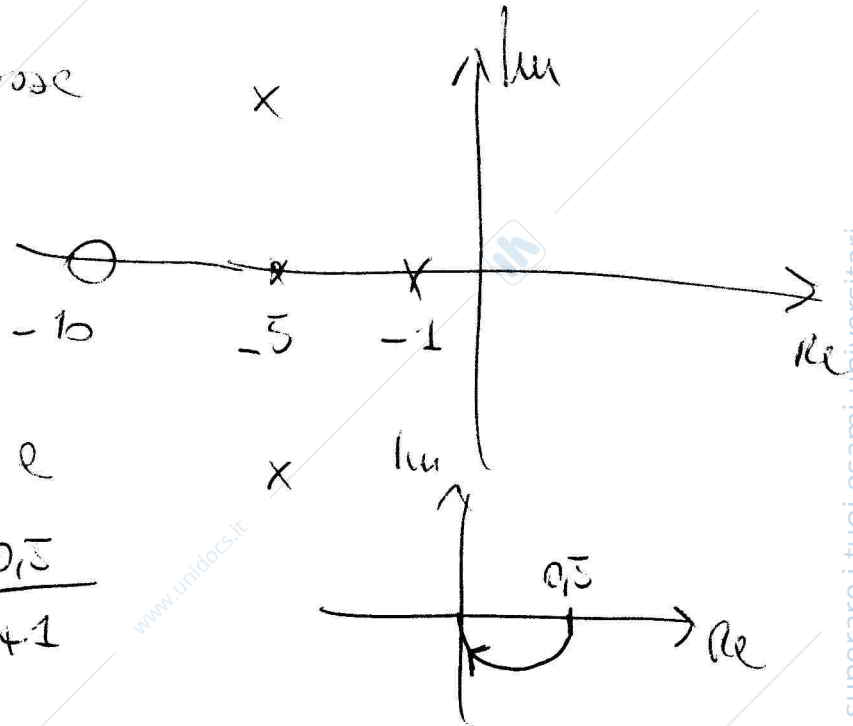
2.2 Si determini l'approssimazione a poli dominanti della funzione di trasferimento $H(s)$, e se ne tracci il diagramma polare approssimato.

Il polo più vicino all'asse immaginario è -1



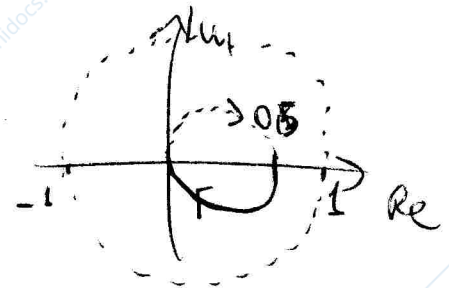
L'approssimazione deve conservare il guadagno, e quindi è

$$G(s) = \frac{0,5}{s+1}$$



2.3 Si consideri ora lo schema in figura, in cui $G(s)$ rappresenta l'approssimazione a poli dominanti di $H(s)$ calcolata al punto precedente. Posto $R(s) = 1$, si studi, utilizzando il criterio di Nyquist, l'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso, e si determinino margine di guadagno e margine di fase, commentando brevemente il risultato ottenuto.

$$L(s) = G(s) = \frac{0,5}{s+1}$$



$L(s)$ ha $P=0$ come si vede dalla

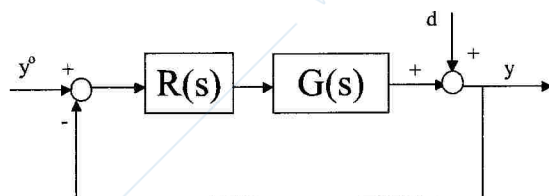
figura $N=0 \Rightarrow$ sistema in an. chiuso è AS. STABILE.

Il sistema soddisfa sia il criterio del piccolo guadagno ($|L(j\omega)| < 1, \forall \omega$) e quello delle piccole fase ($| \angle L(j\omega) | < 180^\circ \forall \omega$).

Non vi sono intersezioni col semiasse reale negativo, quindi il margine di guadagno $K_M = \infty$.

Non vi sono intersezioni nemmeno con la circonferenza unitaria, e quindi, poiché il ~~proprio~~ diagramma di Nyquist è tutto contenuto in esse, $\varphi_m = \infty$

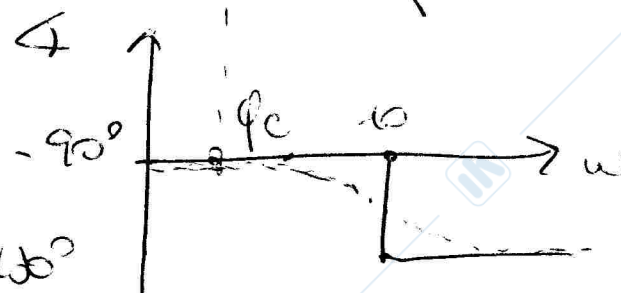
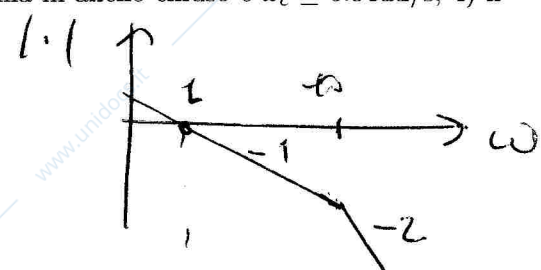
3. Si consideri il sistema di controllo in figura



con $G(s) = -10 \frac{1}{(s+1)(0.1s+1)} e^{-s\tau}$, ed $R(s) = -0.1 \frac{s+1}{s}$.

3.1 Posto $\tau = 0$ si discuta se il sistema in anello chiuso soddisfa le seguenti proprietà: 1) il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile; 2) l'errore a transitorio esaurito a fronte di $y^o(t) = 130 \text{ sca}(t)$ e $d(t) = -55 \text{ sca}(t)$ è nullo; 3) la pulsazione critica del sistema in anello chiuso è $\omega_c \geq 0.5 \text{ rad/s}$; 4) il margine di fase è $\varphi_m \geq 50^\circ$.

$$L(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)}$$



1) $P=0$ e $| \angle L(j\omega) | < 180^\circ, \forall \omega$

per il criterio della piccola fase il sist. in An. chiuso è AS. STABILE.

2) $L(s)$ è di tipo 1, quindi la proprietà è garantita \forall segnale dello scalino in $y^o(t)$ e $d(t)$.

$$\textcircled{3} \quad \omega_c \approx 1 \text{ rad/s} > 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\textcircled{4} \quad \varphi_m \approx 90^\circ > 50^\circ$$

3.2 Con riferimento al sistema di controllo studiato al punto precedente dire, giustificando la risposta, qual è il massimo valore del ritardo τ :

- 1) compatibile con il rispetto del requisito sul margine di fase;
- 2) compatibile con l'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso.

$$1) \quad \Delta\varphi_m = |50^\circ - \varphi_m| = 40^\circ$$

$$\Delta\varphi_m - \gamma_{\max} \omega_c \frac{180^\circ}{\pi} \leq 0 \quad (\Rightarrow) \quad \gamma_{\max} \geq \frac{\Delta\varphi_m \pi}{180^\circ}$$

$$2) \quad \text{Sisteme AS. STABILI} (\Rightarrow) \varphi_m > 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \gamma_{\max} \omega_c \frac{180^\circ}{\pi} < \varphi_m$$

4. Con riferimento alla classe dei sistemi dinamici a tempo continuo descritti dalle equazioni

$$\dot{x} = f(x, u)$$

si definisca il concetto di stato di equilibrio e si indichi sotto quali condizioni tale stato di equilibrio è asintoticamente stabile.

Vedi Corso / appunti

5. Si consideri il sistema lineare e tempo invariante a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k).$$

Si scrivano le espressioni del movimento libero e del movimento forzato di stato e uscita del sistema con condizioni iniziali $x(0) = x_0$ ed ingresso $u(k) = \bar{u}, \forall k \geq 0$.

Vedi libro / appunti