Esercizio 1: sistema non-lineare

Si consideri il seguente sistema:

$$\dot{x}(t) = |x(t)|^3 - 3x^2(t) + 3|x(t)| - u(t)$$

(1) Determinare i punti di equilibrio associati a $u(t) = \bar{u} = 1,\ t \geq 0$

Per individuare i punti di equilibrio dobbiamo imporre:

$$\dot{x}(t) = 0 \rightarrow |\bar{x}|^3 - 3\bar{x}^2 + 3|\bar{x}| - \bar{u} = 0$$

→ Dobbiamo risolvere l'equazione di 3° grado:

$$|\bar{x}|^3 - 3\bar{x}^2 + 3|\bar{x}| - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \bar{x}^3 - 3\bar{x}^2 + 3\bar{x} - 1 = 0 & \text{se } \bar{x} \geq 0 \quad (a) \\ -\bar{x}^3 - 3\bar{x}^2 - 3\bar{x} - 1 = 0 & \text{se } \bar{x} < 0 \quad (b) \end{cases}$$

(a) $\bar{x}^3 - 3\bar{x}^2 - 3\bar{x} - 1 = 0 \rightarrow (\bar{x}-1)^3 = 0 \Rightarrow \bar{x} = 1$

Il punto di equilibrio è $(1,1)$

(b) $-\bar{x}^3 - 3\bar{x}^2 - 3\bar{x} - 1 = 0 \rightarrow -(\bar{x}^3 + 3\bar{x}^2 + 3\bar{x} + 1) = 0$

$-(\bar{x}+1)^3 = 0 \Rightarrow \bar{x} = -1$

Il punto di equilibrio è $(-1,1)$

→ Dato l'ingresso costante $\bar{u} = 1$, il sistema ha $\underbrace{\text{2 equilibri}}_{}$.

Succede dato che il sistema è NL

(2) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio

Si considera in questo caso il sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio:

$$f(x,u) = |x(t)|^3 - 3x^2(t) + 3|x(t)| - u(t) = \begin{cases} x(t)^3 - 3x^2(t) + 3x(t) - u(t) & x(t) \geq 0 \\ -x(t)^3 - 3x^2(t) - 3x(t) - u(t) & x(t) < 0 \end{cases}$$

Per $(\bar{x},\bar{u}) = (1,1) \rightarrow A = \left.\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = 3\bar{x}^2 - 6\bar{x} + 3 = 0$

$$B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = -1$$

$\rightarrow \delta\dot{x}(t) = -\delta u(t)$

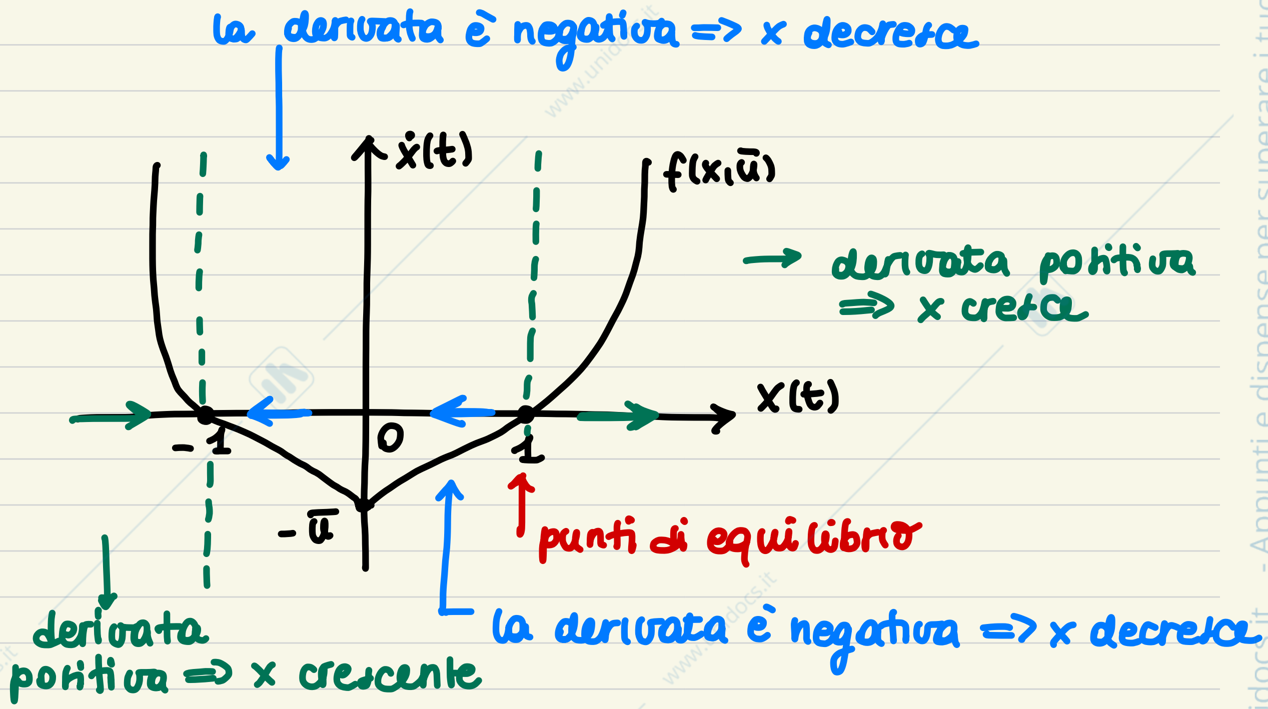
Per $(\bar{x},\bar{u}) = (-1,1) \longrightarrow A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = -3\bar{x}^2 - 6\bar{x} - 3 = 0$

$$B = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = -1$$

$\rightarrow \delta\dot{x}(t) = -\delta u(t)$

In entrambi i casi non posso concludere sulla stabilità degli equilibri a partire dal sistema linearizzato.

(4) Studiare la stabilità dei punti di equilibrio per via grafica



Si vede che, se siamo nell'intorno del punto (-1,1), ci avviciniamo al punto di equilibrio → l'equilibrio è ASINTOTICAMENTE STABILE

Si vede che, se siamo nell'intorno del punto (1,1), ci allontaniamo dal punto di equilibrio → l'equilibrio è INSTABILE

Esercizio 2: movimento forzato e stabilità

Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -4x_2(t) \end{cases}$$

(1) Classificare il sistema

- stato bi-dimensionale → sistema di ordine 2
- equazioni lineari → sistema lineare
- un solo input → sistema single-input
- output non definito
- evoluzione dello stato descritta da equazioni differenziali → sistema dinamico
- coefficienti costanti nel tempo → sistema tempo-invariante

(2) Studiare la stabilità del sistema

Dato che il sistema è LTI la stabilità può essere studiata valutando gli autovalori della matrice A, che in questo caso è uguale a:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Nota bene: la matrice è TRIANGOLARE!

Calcoliamo gli autovalori di A, trovando le radici del polinomio caratteristico:

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda+2 & -2 \\ 0 & \lambda+4 \end{bmatrix}\right) = (\lambda+2)(\lambda+4)$$

nota che gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale

Gli autovalori della matrice A sono quindi:

* $\lambda_1 = -2$
* $\lambda_2 = -4$

→ Gli autovalori sono reali negativi → il sistema è ASINTOTICAMENTE STABILE

Nota che i modi del sistema sono e^{-2t}, e^{-4t} (e la risposta del sistema è data da una loro combinazione

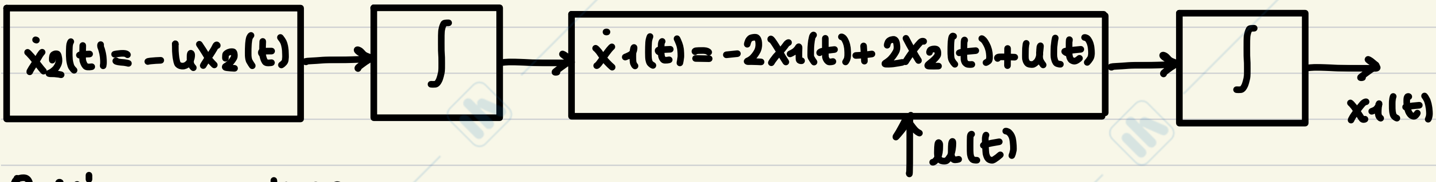
(3) Determinare il movimento dello stato con $x(0) = [0,0]^T$ e $u(t) = e^t, t \geq 0$.

Dobbiamo trovare sia il movimento LIBERO e FORZATO del sistema.

Potremmo risolvere calcolando l'esponenziale di matrice, ma come visto prima la matrice A è triangolare.

→ possiamo utilizzare questa caratteristica per risolvere il sistema in CASCATA

Si noti che $x_2(t)$ evolve indipendentemente da $x_1(t)$, mentre $x_1(t)$ evolve dipendentemente da $x_2(t)$ e $u(t)$. Posso rappresentare graficamente il sistema in questo modo:



Possiamo risolvere prima:

$\dot{x}_2(t) = -4x_2(t) \rightarrow$ è un sistema del 1° ordine senza input con $A = -4$

$\rightarrow$ la risposta di questa parte del sistema è esclusivamente la RISPOSTA LIBERA

Utilizzando le formule di Lagrange: $x_2(t) = x_{20}e^{-4t} = 0$ (data la condizione iniziale)

Dato $x_2(t)$, possiamo calcolare la risposta della prima componente dello stato.

Si noti che:

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + \underbrace{2x_2(t) + u(t)}$$

$x_2(t)$ e $u(t)$ sono noti, quindi possono essere visti come due ingressi (uno esogeno e l'altro endogeno)

$w(t) = 2x_2(t) + u(t) \rightarrow \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + w(t) \rightarrow$ sistema del 1° ordine con $A = -2$ e $B = 1$

Usando le formule di Lagrange si ottiene:

$$x_1(t) = e^{-2t}x_{10} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} w(\tau)\, d\tau =$$

$$= e^{-2t}x_{10} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} 2x_2(\tau)\, d\tau + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau =$$

$$= \underbrace{e^{-2t}x_{10} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} 2e^{-4\tau}x_{20}\, d\tau}_{\text{risposta libera (dipende solo dalle condizioni iniziali e dai modi del sistema)}} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau$$

Si noti che $e^{-2t}x_{10} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} 2e^{-4\tau}x_{20}\, d\tau = 0$ dato che $x(0) = [0, 0]^T$.

Quindi:

$$x_1(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} e^{\tau}\, d\tau = e^{-2t}\int_0^t e^{3\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{e^{-2t}}{3}\left[e^{3t} - 1\right] = \frac{e^{t} - e^{-2t}}{3}$$

contributo della forzante

$$x_1(t) = \frac{e^t - e^{-2t}}{3}$$ contributo del modo del sistema

Si noti che: $\lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0$

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t - e^{-2t}}{3} = \infty$$

→ la risposta del sistema diverge anche se il sistema è stabile per effetto della forzante divergente → la definizione di stabilità ci permette di ottenere una caratterizzazione asintotica del solo moto libero.

(4) Determinare il movimento dello stato con $x(0) = [0,0]^T$ e $u(t) = 1, t \geq 0$

$x_2(t)$ non è modificato dalla forzante e, dato che le condizioni iniziali sono le stesse del punto precedente, abbiamo:

$$x_2(t) = 0 \quad \forall t$$

Per trovare $x_1(t)$ dobbiamo comunque risolvere:

$$x_1(t) = e^{-2t}\cancel{x_{10}} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} 2e^{-4\tau}\cancel{x_{20}}\,d\tau + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} u(\tau)\,d\tau$$

0 0 per le condizioni iniziali considerate

$$\to x_1(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} u(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{-2(t-\tau)}\,d\tau = e^{-2t}\left[\frac{e^{2t}-1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1-e^{-2t}}{2}$$

Se in questo caso calcoliamo $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$ abbiamo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-e^{-2t}}{2} = \frac{1}{2}$$ (l'input è costante e non più divergente)

Si noti che per $\bar{u} = 1$, si ha che:

$$\begin{cases} -2\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + \bar{u} = 0 \\ -4\bar{x}_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \bar{x}_1 = 1/2 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

→ Per $t \to \infty$ il sistema tende all'equilibrio corrispondente all'ingresso costante $\bar{u} = 1$.

Esercizio 3: movimento libero e stabilità

Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

(1) Classificare il sistema

- stato bi-dimensionale → sistema di ordine 2
- equazioni lineari → sistema lineare
- un solo input → sistema single-input } SISO
- un solo output → sistema single-output
- evoluzione dello stato descritta da equazioni differenziali → sistema dinamico
- coefficienti costanti nel tempo → sistema tempo-invariante
- non ho dipendenza diretta dall' input nell' equazione di uscita → sistema strettamente proprio

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{la matrice A è triangolare!}} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1] \quad D = 0$$

(2) Studiare la stabilità del sistema

La stabilità si studia a partire dalla matrice A, ed in particolare dai suoi autovalori.
Troviamo quindi gli autovalori di A risolvendo:

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda+2 & -3 \\ 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$\rightarrow (\lambda+2)(\lambda-3) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -2$ stabile modo associato: e^{-2t}

$\searrow \lambda_2 = 3$ instabile modo associato: e^{3t}

Dato che esiste λ_i, $i=1,2$, tale che $Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow$ il sistema è **INSTABILE.**

(2) Determinare il movimento libero dello stato con $x(0) = [1, 0]^T$.
Utilizzando le formule di Lagrange potrei calcolare il movimento libero come:

$$x(t) = e^{At} x_0,$$

ma A è triangolare → conviene risolverlo a cascata

Per ingresso nullo abbiamo: $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t)+3x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = +3x_2(t) \end{cases}$

(1) Risolvo $\dot{x}_2(t) = 3x_2(t)$ (sistema del 1° ordine con A = 3)

$\rightarrow x_2(t) = e^{3t}x_{20}$ con lagrange $\xrightarrow{\text{per le condizioni iniziali}}$ $x_2(t)=0$

(2) Vedendo $x_2(t)$ come un input ($x_2(t) = w(t)$) risolvo:

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t)+3w(t)$$ sistema del 1° ordine con A = -2 e B = 3

$$\rightarrow x_1(t) \underset{\uparrow \text{ lagrange}}{=} e^{-2t}x_{10} + \underbrace{3\int_0^t e^{-2(t-\tau)}w(\tau)d\tau}_{} =$$

fa comunque parte della risposta libera dato che w(t) è legato alle condizioni iniziali del sistema

$$= e^{-2t}x_{10} + 3\int_0^t e^{-2(t-\tau)}x_{20}e^{3\tau}d\tau =$$

$$= e^{-2t}x_{10} + 3x_{20}e^{-2t}\int_0^t e^{5\tau}d\tau =$$

$$= e^{-2t}x_{10} + 3x_{20}e^{-2t}\left[\frac{e^{5t}-1}{5}\right] =$$

$$= e^{-2t}x_{10} + \frac{3}{5}x_{20}e^{+3t} - \frac{3}{5}x_{20}e^{-2t} \underset{\uparrow}{=} e^{-2t}$$

per le condizioni iniziali date

Se calcoliamo:

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-2t} = 0 \qquad x_2(t) = 0 \ \forall 0$$

Nonostante il sistema sia instabile la risposta libera si esaurisce dopo un transitorio iniziale.

→ Questo dipende dal fatto che non vedo il modo instabile vista la scelta delle condizioni iniziale! La stabilità è invece definita per qualsiasi condizione iniziale.

$x_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \rightarrow x_2(t) = \underbrace{\beta e^{+3t}}_{\text{diverge}}$ $\qquad x_1(t) = \underbrace{(\alpha - \frac{3}{5}\beta)e^{-2t} + \frac{3}{5}\beta e^{3t}}_{\text{diverge}}$

→ $\beta \neq 0$ il comportamento è quello che ci aspettiamo da un

sistema instabile
→ $\beta = 0$ allora non siamo in grado di vedere il modo instabile nella risposta (perchè non lo eccitiamo)

Esercizio 4: stabilità: sistema non-lineare
si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + \alpha(x_2(t) - 1) + x_2^2(t) + u(t) - 2 \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

(1) classificare il sistema
- stato bi-dimensionale → sistema di ordine 2
- nonlinearità nella prima equazione della dinamica → sistema nonlineare
- un solo input → sistema single-input } SISO
- un solo output → sistema single-output }
- evoluzione dello stato descritta da equazioni differenziali → sistema dinamico
- coefficienti costanti nel tempo → sistema tempo-invariante
- non ho dipendenza diretta dall' input nell' equazione di uscita
→ sistema strettamente proprio

Nota bene: la costante -2 nella prima equazione della dinamica può essere vista come un secondo ingresso costante o possiamo definire un secondo ingresso $w(t) = u(t) - 2$
→ l'ingresso esterno è comunque 1, quindi il sistema è comunque SISO

(2) studiare la stabilità del punto di equilibrio associato a $u(t) = \bar{u} = 2$, $t \geq 0$

cerchiamo in primo luogo il punto di equilibrio:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 - \alpha(\bar{x}_2 - 1) + \bar{x}_2^2 + \underbrace{\bar{u} - 2}_{} = 0 \\ -2\bar{x}_2 + \bar{u} = 0 \end{cases}$$

l'ingresso di equilibrio compensa la costante

$$\begin{cases} \bar{x}_1 - \alpha\bar{x}_2 + \alpha + \bar{x}_2^2 = 0 \\ 2\bar{x}_2 = \bar{u} \quad \rightarrow \quad \bar{x}_2 = 1 \end{cases}$$

→ $\bar{x}_1 = +\alpha\bar{x}_2 - \alpha - \bar{x}_2^2 = \alpha - \alpha - 1 = -1$

Per $\bar{u} = 2$ lo stato di equilibrio è: $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Per studiare la stabilità dobbiamo linearizzare il sistema nell'intorno del punto di equilibrio trovato, ossia:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{cases}$$

Si noti, in primo luogo, che l'equazione di uscita è lineare nello stato ed indipendente dall'uscita. Quindi:

$C = [1 \;\; 0] \qquad D = 0$

Guardando le equazioni della dinamica dello stato si ha inoltre che:
- la prima equazione della dinamica è lineare in x_1
- Entrambe le equazioni sono lineari in $u(t)$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{u})} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} f_1(x,u) &= x_1(t) + \alpha(x_2(t) - 1) + x_2^2(t) + u(t) - 2 \\ f_2(x,u) &= -2x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} = 1 \qquad \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} = 1 \longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{u})} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \alpha + 2\bar{x}_2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\text{la matrice è triangolare}} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha + 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Per studiare la stabilità dell'equilibrio calcoliamo gli autovalori della matrice A del sistema linearizzato.

Calcoliamo quindi:

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -\alpha - 2 \\ 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 1)(\lambda + 2) \begin{cases} \nearrow \lambda_1 = 1 \quad \text{instabile} \\ \searrow \lambda_2 = -2 \quad \text{stabile} \end{cases}$$

→ Data la presenza dell'autovalore in 1 l'equilibrio è instabile!