

FONDAMENTI DI AUTOMATICA - Ingegneria Gestionale
Prima prova in itinere del 29 novembre 2013

Prof.ssa Mara Tanelli

1. Si consideri il sistema dinamico lineare e tempo invariante a tempo continuo con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\alpha x_2(t) + \beta x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_3(t) + u(t)$$

$$y(t) = -x_1(t),$$

con α e β parametri reali.

1.1 Determinare, se esistono, i valori di α e β per cui il sistema è asintoticamente stabile.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} -5 & 0 & 0 & & \\ \hline 0 & -\alpha & \beta & & \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array} \right] \quad \lambda_i(A) = \{-5, -\alpha, 1\}$$

$\forall \alpha, \beta \exists i: \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 \Rightarrow$ SISTEMA
è INSTABILE
 \forall valore di α e $\beta \in \mathbb{R}$

1.2 Determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x(0) = [1, 3, 1]^T$ e all'ingresso $u(t) = 5, t \geq 0$ e si commenti brevemente il risultato ottenuto.

$y(t) = -x_1(t)$ e $x_1(t)$ non dipende da x_2 e x_3
Basta quindi risolvere

$$\dot{x}_1 = -5x_1 + u \quad \text{con } \bar{u} = 5 \text{ e } x_1(0) = 1$$

Si noti che lo stato di eq. associato a $\bar{u} = 5$ e $\bar{x}_1 = 1 = x_1$

\Rightarrow per definizione di eq. è univ.

$$x_1(t) = \bar{x}_1 = 1, \forall t \geq 0$$

$$\text{Da cui } y(t) = \bar{y} = -1, \forall t \geq 0$$

1.3 Dire, motivando la risposta, se esistono condizioni iniziali non nulle (ovvero $x(0) \neq [0, 0, 0]^T$), tali che il movimento libero dell'uscita del sistema è identicamente nullo, ovvero $y(t) = 0, \forall t \geq 0$.

Il movimento libero dell'uscita è $y_L(t) = e^{-5t} x_1(0)$, quindi qualsiasi c.i. del tipo $x(0) = [0, a, b]$ con a e b reali è tale da determinare $y_L(t) = 0, \forall t \geq 0$

2. Si consideri il sistema dinamico non lineare e tempo invariante con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t)^3 + x_1(t) - x_2(t) + u(t) + 8$$

$$\dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 4x_2(t) + u^2(t)$$

$$y(t) = x_2^2(t).$$

2.1 Determinare stati e uscite di equilibrio associati all'ingresso costante $u(t) = 0, t \geq 0$.

$$\begin{cases} 0 = -\bar{x}_1^3 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + 8 \\ 0 = 4(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1^3 = 8 \end{cases}$$

Si ha quindi $\boxed{\begin{matrix} \bar{x}_1 = 2 \\ \bar{x}_2 = 2 \end{matrix} \Rightarrow \bar{y} = \bar{x}_2^2 = 4}$

2.2 Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno allo stato di equilibrio determinato al punto precedente.

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = -3\bar{x}_1^2|_{ep} \delta x_1 + \delta x_1 - \delta x_2 + \delta u \\ \delta \dot{x}_2 = 4\delta x_1 - 4\delta x_2 + 2\bar{u}|_{ep} \delta u \end{cases}$$

$$\delta y = 2\bar{x}_2|_{ep} \delta x_2$$

All'ep. si ha

$$\boxed{\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = -11\delta x_1 - \delta x_2 + \delta u \\ \delta \dot{x}_2 = +4\delta x_1 - 4\delta x_2 \\ \delta y = 4\delta x_2 \end{cases}}$$

2.3 Studiare la stabilità del sistema linearizzato e, se possibile, la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

$$A_{LIN} = \begin{bmatrix} -11 & -1 \\ +4 & -4 \end{bmatrix} \quad \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 11 & 1 \\ -4 & \lambda + 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + 15\lambda + 48 = 0$$

Il polim. caract. è di 2° grado e ha coeff. concordati e non nulli

Radici sono tutte con $\text{Re} < 0$

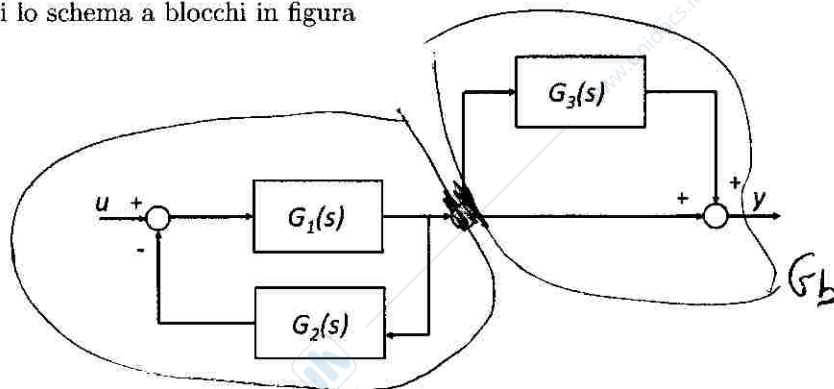
Quindi il sistema LV è AS. STABILE (CNS) e il max. di ep. è AS. STABILE (C.N.)

2.4 Scrivere i comandi Matlab necessari a descrivere la matrice A del sistema linearizzato e a calcolarne gli autovalori.

$$A = \begin{bmatrix} -11 & -1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

~~Matlab~~ eig(A)

3. Si consideri lo schema a blocchi in figura



con $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ funzioni di trasferimento di sistemi dinamici lineari e tempo invarianti di ordine 1.

3.1 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ tra l'ingresso u e l'uscita y in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$.

$$G_A(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad G_B(s) = 1 + G_3(s)$$

$$H(s) = G_A(s)G_B(s)$$

3.2 Posto $G_1(s) = \frac{1}{s+2}$, $G_2(s) = \frac{s+2}{s+5}$, $G_3(s) = \frac{1}{s+5}$ calcolare $H(s)$ e studiare la stabilità del sistema complessivo.

$$G_a(s) = \frac{1/s+2}{1 + 1/s+5} = \frac{s+5}{(s+2)(s+6)} \quad G_b(s) = 1 + \frac{1}{s+5} = \frac{s+6}{s+5}$$

$$H(s) = G_a(s) G_b(s) = \frac{1}{s+2} \quad H(s) \text{ ha un solo polo, ma il sistema complessivo è di ordine 2}$$

⇓

2 AUTOV. NASCOSTI, da cancellazioni nella numeratore in serie tra $G_a(s)$ e $G_b(s)$

$$\lambda_i(s) = \{-2, -6, -5\} \Rightarrow \text{Re}(\lambda_i(s)) < 0, \forall i \Leftrightarrow \text{S. STABILE}$$

$$\lambda_{\text{NASC}} = \{-6, -5\}$$

3.3 Determinare l'espressione analitica dell'uscita forzata $y(t)$ del sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ all'ingresso $u(t) = 3e^{2t}$, $t \geq 0$ e valutare, se possibile, la correttezza dell'espressione ottenuta applicando i teoremi del valore iniziale e finale alla trasformata $Y(s)$.

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{1}{s+2} \frac{3}{s-2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-2} = \frac{A(s-2) + B(s+2)}{(s+2)(s-2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-3/4 \\ B=3/4 \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{3}{4} e^{-2t} + \frac{3}{4} e^{2t}, t \geq 0$$

TVI: applicabile perché $Y(s)$ ha grado relativo ≥ 1

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s}{(s+2)(s-2)} = 0$$

TVF: NON applicabile perché $Y(s)$ ha un polo a parte reale positiva

$$\text{Da } y(t), \text{ rivedo che } \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$$

3.3 Calcolare il valore di regime dell'uscita forzata $y(t)$ del sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ all'ingresso $u(t) = 5\cos(t) + 4\sin(0.01t) - 2\sin(t)$.

$$u_1(t) \quad u_2(t) \quad u_3(t) \quad H(s) = \frac{1}{s+2}$$

$u_1(t) = 5\cos(t)$: il sistema con FdT $H(s)$ è AS-STAB e di tipo zero $\Rightarrow y_{10} = sH(0) = \frac{5}{2}$

Per studiare la risposta a u_2 e u_3 applico TH della fase in freq. APPLICABILE perché sistema con FdT $H(s)$ è AS-STABILE.

$u_2(t) = 4\sin(0,01t)$ $\omega = 0,01 \ll \omega_{polo di H(s)} = 2$ e $H(s)$ ha 1 solo polo e zerro $\rightarrow H(0) = 1/2$

$$\Rightarrow y_{20} = \frac{4}{2} \sin(0,01t)$$

$u_3(t) = -2\sin(t)$: $H(j1) = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\angle H(j1) = -\arctan(1/2) \approx -0,46 \text{ rad}$

$$y_{30} = \frac{-2}{\sqrt{5}} \sin(t - 0,46)$$

$$y_p = y_{10} + y_{20} + y_{30}$$

4. Con riferimento alla classe dei sistemi dinamici lineari e tempo invarianti a tempo continuo, si dica, motivando la risposta se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) Se il sistema è instabile, allora non vi può essere alcun movimento libero di stato e uscita che sia nullo a regime.

F Sistema instabile $\Rightarrow \exists$ almeno una C.I.: $X(t)$ e $Y(t) \rightarrow \infty$ $t \rightarrow +\infty$

b) Se il sistema è asintoticamente stabile, l'uscita forzata di regime quando l'ingresso è uno scalino unitario tende ad un valore finito.

V tende al valore del guadagno se il tipo è zero o a zero se il tipo è < 0

c) Ad un valore costante dell'ingresso può essere associato più di uno stato di equilibrio.

V Se A non è invertibile, il sistema può avere infiniti stati di eq.

d) Se il sistema è instabile, allora la sua funzione di trasferimento ha certamente uno o più poli a parte reale positiva.

F Il sistema ha certamente almeno 1 autovalore con $Re > 0$ o autovalori multipli con $Re = 0$ non regolari. Questi però potrebbero non essere poli della FT a causa di cancellazioni.

e) Per uno dei punti precedenti a scelta, si fornisca un esempio numerico a supporto della risposta fornita.

5. Si enunci con precisione il teorema della risposta esponenziale.

V. LIBRO / APPUNTI