giovedì 23 aprile 2020 13:28

RISPOSTA DI UN SISTEMA LTI ad un INGRESSO SINUSOIDALE

RISPOSTA ESPONENZIALE

Dato un sistema LTI $\dot{x} = Ax + Bu$
con FdT $G(s)$ $y = Cx + Du$

e alimentiamolo con

Ipotesi: $\boxed{\lambda \notin \lambda_i(A)}$

$$\boxed{u(t) = e^{\lambda t}, \quad t \geq 0}$$

DOMANDA: $\exists$ una C.I. $x(0)$: i MOVIMENTI di STATO e USCITA del sistema sono PURAMENTE ESPONENZIALI $\forall t \geq 0$? con la stessa forma dell'ingresso

In generale, per C.I. generica

$$x(t) = \underbrace{x_L(t)}_{\text{mov}} + \underbrace{x_F(t)}_{\text{mov} + \text{FORMA} = \text{FORZANTE}}$$

Se il sist. è AS.ST

$\hookrightarrow x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x_F(t)$ — mov $\to 0$ / FORMA FORZANTE

~~CANDIDATO MOV. STATO ESPONENZIALE~~

Voglio che

~~CANDIDATO MOV. STATO ESPONENZIALE~~

Voglio che $\rightarrow$ $\boxed{x(t) = x(0)\, e^{\lambda t}}$, $t \geq 0$, $e^{\lambda t}$

allora

$$\dot{x}(t) = \lambda x(0) e^{\lambda t} = Ax + Bu$$

$$= A x(0) e^{\lambda t} + B e^{\lambda t}$$

$e^{\lambda t} \neq 0$

$$\lambda x(0) \cancel{e^{\lambda t}} = A x(0) \cancel{e^{\lambda t}} + B \cancel{e^{\lambda t}}$$

$$(\lambda I - A)\, x(0) = B$$

C. I. che stavamo cercando

$$\boxed{x(0) = (\lambda I - A)^{-1} B} \quad (\square)$$

$\lambda \notin \lambda_i(A)$

$\exists\, (\lambda I - A)^{-1} \Rightarrow \boxed{x(0)\ \exists\,!}$

Il corrispondente mov. dell'uscita è

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$\boxed{G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$

$$= C x_0 e^{\lambda t} + D e^{\lambda t}$$

$$\boxed{y(t) = (\square) = \left[C(\lambda I - A)^{-1} B + D\right] e^{\lambda t}}$$

$$\underline{y(t)} = (\ldots) = \left[C(\lambda I - A)^{-1} B + D\right] e^{\lambda t}$$

$$= \underbrace{G(s)\Big|_{s=\lambda}}_{\text{NUMERO!!!}} e^{\lambda t}$$

$$G(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

$u = e^{3t}$ $\quad \lambda = 3$

$$G(s)\Big|_{s=\lambda} = \frac{3+2}{3+1} = \frac{5}{4}$$

TEOREMA della RISPOSTA ESPONENZIALE

RIASSUMENDO

Dato un sistema LTI con ingresso $u(t) = e^{\lambda t}$, $t \geq 0$

$\lambda \notin \lambda_i(A)$

si ha:

① Se $x(0) = (\lambda I - A)^{-1} B$, allora il movim. di stato e uscita è, $\forall t \geq 0$, puramente esponenziale, con la stessa forma dell'ingresso. In particolare,

$$\boxed{\underline{y(t)} = \underbrace{G(\lambda)}_{G(s)\big|_{s=\lambda}} e^{\lambda t}, \quad t \geq 0} \qquad (0)$$

② Se invece supponiamo che il sistema sia AS. STABILE ...

sia AS. STABILE, sappiamo che $\forall$ C.I. $x(0)$, si ha che A REGIME ($t \to +\infty$)

$$\Longrightarrow \boxed{y_p = G(\lambda) e^{\lambda t}} \qquad (*)$$

NOTA: Cosa accade alle espressioni (o) e (*) se λ ($u(t) = e^{\lambda t}$) coincide con uno ZERO di $G(s)$?

$\Downarrow$

Per def. di ZERO, valore di s: $G(s) = 0$ si ha

$$y_p = 0$$

PROPRIETÀ BLOCCANTE degli ZERI

Uno zero del sistema risulta BLOCCANTE per un ingresso $u(t) = e^{\lambda t}$, se λ = ZERO

ES $G(s) = \dfrac{s+1}{\ldots}$ (AS. ST.) $u(t) = e^{\lambda t} = e^{-t}$

ES $G(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)}$ (AS. ST.) $\quad u(t) = e^{\lambda t} = e^{-t}$

$\forall$ C. I. $\qquad \lambda = -1 \quad t \geq 0$

$$y_\infty = G(\lambda)\, e^{\lambda t} = \frac{0}{1 \times 2}\, e^{-t} = 0$$

$$e^{-t} \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y_\infty = 0$$

ES Se ho un segnale costante, posso dire che è un esponenziale con $\lambda = 0$

$$e^{0t} = 1$$

RISP. A SCALINO di sistema AS. STABILE con tipo $g < 0$

INGRESSO COSTANTE $u(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$ e $G(s)$ ha uno ZERO in $s = 0$

$$\Downarrow$$

$$y_\infty = 0$$

ZERO in $s=0$ è BLOCCANTE PER UN segnale costante, ovvero un esponenziale con esponente $= 0$

~~Se non~~

$$y_\infty = G(\lambda)\, e^{\lambda t} \qquad \lambda = 0$$

$$= G(0) \times 1 = \quad \text{se ho ZERO in } s=0 \; = 0$$

$$= -CA^{-1}B + D, \quad \neq 0$$

$$\boxed{G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

$$= \underbrace{-CA\;B+D}_{\text{GUADAGNO STATICO}} \neq 0$$

RISPOSTA SINUSOIDALE

RICORDA $\sin(\omega t) = \mathrm{Im}\left[e^{j\omega t}\right]$

TUTTO COME PRIMA pur di considerare come impresso $\boxed{u(t) = e^{j\omega t}}$ $\boxed{\lambda = j\omega}$

IPOTESI $\lambda \notin \lambda_i(A) \Rightarrow$ A non ha AUTOVALORI in $\pm j\omega$

APPLICANDO il th. della RISPOSTA ESPONENZIALE abbiamo:

$$(\Delta) \quad x(0) = (\lambda I - A)^{-1} B = (j\omega I - A)^{-1} B$$

① Se $x(0) = (\Delta)$

$(*) \hookrightarrow \boxed{y(t) = G(s)\big|_{s=\lambda} e^{\lambda t}, \; t \geq 0}$

$\boxed{\lambda = j\omega}$

$= \boxed{G(j\omega)\, e^{j\omega t}}$ FASE "arg"

$\angle G(j\omega)$

$$G(j\omega) = \boxed{|G(j\omega)|\, e^{j \measuredangle G(j\omega)}}$$

(✱) diventa

(*) $y(t) = |G(j\omega)|\, e^{j(\omega t + \measuredangle G(j\omega))}$

Poiché $\sin(\omega t) = \mathrm{Im}\left[e^{j\omega t}\right]$

la RISPOSTA SINUSOIDALE è

$u(t) = \sin(\omega t)$ $\quad \mathrm{Im}[y(t)]$ in (*), ovvero

$$(\square) \quad \boxed{\mathrm{Im}[y(t)] = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \measuredangle G(j\omega))}$$

$$G(j\omega) = G(s)\Big|_{s=j\omega}$$

RISPOSTA IN FREQUENZA DEL SISTEMA

Possiamo ENUNCIARE il TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

Dato un sistema LTI ASINT. STABILE, con FdT $G(s)$, alimentato da con FdT $G(s)$, alimentato da

$$(\square\square)\quad \boxed{u(t) = U \sin(\bar{\omega} t + \varphi)}$$

AMPIEZZA INGRESSO

FASE INGRESSO

PULSAZIONE dell'ingresso ω [rad/s]

dà come USCITA DI REGIME

$$(\Delta)\quad \boxed{y(t) = Y \sin(\bar{\omega} t + \Psi)}$$

Confrontando (Δ) e $(\square)$ e ricordando la $u(t)$ che stiamo usando $(\square\square)$, si ha

$$Y = U\,|G(j\bar{\omega})|$$

$$\Psi = \varphi + \angle G(j\bar{\omega})$$

$G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega)$ è la RISPOSTA IN FREQUENZA del sistema

$$G(j\bar{\omega}) = G(j\omega)\Big|_{\omega=\bar{\omega}}$$