Esercizio 1: sviluppo di Heaviside

A partire dalla funzione razionale $F(s)$, con

$$F(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\dots+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\dots+a_n}$$

trovare la corrispondente funzione $f(t)$ nel dominio del tempo se:

(1) $F(s)$ ha poli reali distinti
(1) trovare l'antitrasformata di $F(s)=\frac{s-10}{(s+2)(s+5)}$

(2) $F(s)$ ha poli reali multipli
(2) Calcolare l'antitrasformata di $F(s)=\frac{2}{(s+1)^2(s+2)}$

(3) $F(s)$ ha poli complessi
(3) calcolare l'antitrasformata di $F(s)=\frac{100}{(s+1)(s^2+4s+13)}$

(4) $F(s)$ è propria ← significa che n=m
(4) calcolare l'antitrasformata di $F(s)=\frac{s+2}{s+5}$

(1) $D(s)=(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n) \quad p_i\neq p_j \ \forall i\neq j,\ i,j=1,\dots,n$

In questo caso possiamo provare che $F(s)$ può essere scomposta come la combinazione lineare di funzioni razionali in s più semplici ed, in particolare, come:

$$F(s)=\frac{\alpha_1}{s+p_1}+\frac{\alpha_2}{s+p_2}+\dots+\frac{\alpha_n}{s+p_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{s+p_i}$$

Dato che $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=\mathrm{sca}(t)$ e che $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}\mathrm{sca}(t)$, possiamo direttamente trovare l'antitrasformata di $F(s)$ come:

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{-p_it}\mathrm{sca}(t)$$

applicando 2 proprietà della trasformata di Laplace:
(1) linearità e (2) $\mathcal{L}[cf(t)]=cF(s)$

Per trovare $F(s)$ dobbiamo calcolare i coefficienti α_i, $i=1,\dots,n$. Per farlo, posso semplicemente imporre:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{s+p_i}=\frac{N(s)}{D(s)}\rightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(s+p_j)\Big]\cdot\frac{1}{D(s)}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\rightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(s+p_j)\Big]=N(s)$$

(1) $F(s) = \dfrac{s-10}{(s+2)(s+5)}$

usando la regola vista precedentemente:

$$\frac{s-10}{(s+2)(s+5)} = \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+5}$$

$\rightarrow \alpha_1(s+5) + \alpha_2(s+2) = s-10$

$\rightarrow (\alpha_1+\alpha_2)s + 5\alpha_1 + 2\alpha_2 = s-10$

Affinché l'uguaglianza sia verificata:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 = 1 & (a) \\ 5\alpha_1+2\alpha_2 = -10 & (b) \end{cases}$$

(a) $\alpha_1 = 1-\alpha_2$

(b) $\rightarrow 5-5\alpha_2+2\alpha_2 = -10 \rightarrow -3\alpha_2 = -15 \rightarrow \boxed{\alpha_2 = 5}$

$\rightarrow \boxed{\alpha_1 = -4}$

$F(s)$ può quindi essere riscritta equivalentemente come:

$$F(s) = \frac{-4}{s+2} + \frac{5}{s+5}$$

Usando le trasformate note e le proprietà della trasformata di Laplace (linearità, ritardo nel dominio di Laplace) si ottiene:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-4}{s+2} + \frac{5}{s+5}\right] = -4e^{-2t} + 5e^{-5t}$$

(2) $D(s) = (s+1)(s+2)\cdots(s+p_i)^k\cdots(s+p_{n-k}) \qquad k>1$

(sto considerando il caso di un polo con con molteplicità superiore ad uno ma il ragionamento si estende anche al caso in cui si abbiano più poli con molteplicità maggiore di 1)

In questo caso scomponiamo sempre $F(s)$ in una somma di funzioni razionali in s più semplici, in particolare:

$$F(s) = \frac{\alpha_1}{(s+p_1)} + \frac{\alpha_2}{(s+p_2)} + \ldots + \underbrace{\frac{\alpha_i}{(s+p_i)} + \frac{\alpha_{i+1}}{(s+p_i)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{i+k}}{(s+p_i)^k}} + \ldots + \frac{\alpha_{n-k}}{(s+p_{n-k})}$$

i termini relativi al polo a molteplicità k si antitrasformano come $\alpha_{i+h}\, t^h e^{-p_i t}$, $h = 0, 1, \ldots, k-1$

(2) $F(s) = \frac{2}{(s+1)^2(s+2)}$

Usando la regola vista precedentemente si ha:

$$\frac{2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{\alpha_1}{(s+1)} + \frac{\alpha_2}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_3}{(s+2)}$$

$\rightarrow \alpha_1(s+1)(s+2) + \alpha_2(s+2) + \alpha_3(s+1)^2 = 2$

$\rightarrow \alpha_1(s^2+3s+2) + \alpha_2(s+2) + \alpha_3(s^2+2s+1) = 2$

$\rightarrow (\alpha_1+\alpha_3)s^2 + (3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)s + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2$

Affinché la relazione precedente sia soddisfatta:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 = 0 & (a) \\ 3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 = 0 & (b) \\ 2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3 = 2 & (c) \end{cases}$$

(a) $\alpha_1 = -\alpha_2$

(b) $\rightarrow -3\alpha_2+\alpha_2+2\alpha_3 = 0 \rightarrow -2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_3 = \alpha_2$

(c) = $-2\alpha_2 + 2\alpha_2 + \alpha_2 = 2 \rightarrow \boxed{\alpha_2 = 2}$

$\rightarrow \boxed{\alpha_3 = 2 \text{ e } \alpha_1 = -2}$

Possiamo quindi riscrivere:

$$F(s) = \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+2)}$$

Usando trasformate note e le proprietà della trasformata di Laplace (linearità, ritardo nel dominio di Laplace, derivata nel dominio di Laplace) otteniamo:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+2}\right] = -2e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-2t}$$

(3) $D(s) = (s+p_1)\cdots(s+\sigma+j\omega)(s+\sigma-j\omega)\cdots(s+p_{n-2})$

(considero $F(s)$ con una sola coppia di poli complessi coniugati ma il ragionamento seguente è estendibile anche quando si hanno più poli complessi coniugati)

Anche in questo caso scomponiamo la $F(s)$ in una somma di funzioni razionali più semplici:

$$F(s) = \frac{\alpha_1}{s+p_1} + \dots + \underbrace{\frac{\beta s + \gamma}{(s+\sigma)^2 + \omega^2}} + \dots + \frac{\alpha_{n-2}}{(s+p_{n-2})}$$

Si noti che
$(s+\sigma+j\omega)(s+\sigma-j\omega) =$
$= s^2+\sigma^2+2\sigma s + \omega^2 =$
$= (s+\sigma)^2+\omega^2$

In base alle proprietà della trasformata di Laplace e considerando quelle che sono trasformate note abbiamo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2}\right] = e^{-\sigma t}\cos(\omega t) \text{ e}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}\right] = e^{-\sigma t}\sin(\omega t)$$

quello che vogliamo sfruttar

(3) $F(s) = \dfrac{100}{(s+1)(s^2+4s+13)}$

Cerchiamo le radici di $s^2+4s+13$ per poter scomporre $F(s)$. Quindi:

$$s^2+4s+13=0 \rightarrow s_{1,2} = -\frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = -2 \pm j3$$

$$F(s) = \frac{100}{(s+1)(s+2+j3)(s+2-j3)}$$

rispetto a quanto scritto prima abbiamo detto prima: $\sigma = 2$ e $\omega = 3$

$$\frac{100}{(s+1)(s^2+4s+13)} = \frac{\alpha_1}{(s+1)} + \frac{\beta s + \gamma}{(s+2)^2+9}$$

$\rightarrow \alpha_1(s+2)^2 + \alpha_1 9 + (\beta s+\gamma)(s+1) = 100$
$\rightarrow \alpha_1(s^2+4s+4) + \alpha_1 9 + \beta s^2 + (\beta+\gamma)s + \gamma = 100$
$\rightarrow (\alpha_1+\beta)s^2 + (4\alpha_1+\beta+\gamma)s + \alpha_1 4 + \alpha_1 9 + \gamma = 100$
$\rightarrow (\alpha_1+\beta)s^2 + (4\alpha_1+\beta+\gamma)s + 13\alpha_1 + \gamma = 100$

Affinché la relazione precedente sia soddisfatta devono valere le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta = 0 & (a) \\ 4\alpha_1+\beta+\gamma = 0 & (b) \\ 13\alpha_1+\gamma = 100 & (c) \end{cases}$$

(a) $\alpha_1 = -\beta$
(b) $\rightarrow \quad -4\beta+\beta = -\gamma \rightarrow \gamma = 3\beta$
(c) $\rightarrow \quad -13\beta + 3\beta = 100 \rightarrow -10\beta = 100 \Rightarrow \boxed{\beta = -10}$

$\rightarrow \boxed{\alpha_1 = 10 \text{ e } \gamma = -30}$

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)} - \frac{10s+30}{(s+2)^2+9} = \frac{10}{s+1} - \frac{10(s+2)+10}{(s+2)^2+9} =$$

$$= \frac{10}{s+1} - 10\frac{(s+2)}{(s+2)^2+9} - 10\frac{1}{(s+2)^2+9} =$$

$$= \frac{10}{s+1} - 10\frac{(s+2)}{(s+2)^2+9} - \frac{10}{3}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 10e^{-t}\,\mathrm{sca}(t) - \left[10e^{-2t}\cos(3t) + \frac{10}{3}e^{-2t}\sin(3t)\right]\mathrm{sca}(t)$$

(4) $m=n$

la $F(t)$ si scompone in funzioni razionali più semplici, ma nella scomposizione si ha un termine costante.

Esempio (poli distinti) $D(s) = (s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)$ $p_i \neq p_j, \forall i \neq j$

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{s+p_i} + \beta_0 \qquad \mathcal{L}^{-1}[\beta_0] = \beta_0\,\mathrm{imp}(t)$$

(4) $F(s) = \frac{s+2}{s+5}$

$$\frac{s+2}{s+5} = \frac{\alpha}{s+5} + \beta \rightarrow \frac{s+2}{s+5} = \frac{\alpha+\beta(s+5)}{(s+5)}$$

$$\alpha + \beta s + \beta 5 = s+2 \rightarrow \beta s + \alpha + \beta 5 = s+2$$

Affinché l'uguaglianza precedente sia verificata:

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha + \beta 5 = 2 \end{cases} \rightarrow \alpha = 2-5 = -3$$

$$\rightarrow F(s) = -\frac{3}{s+5} + 1$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -3e^{-5t}\,\mathrm{sca}(t) + \mathrm{imp}(t)$$

Esercizio 2

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 9u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

calcolare il movimento dell'uscita per $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $u(t) = e^{-3t}$, $t \geq 0$.

Consideriamo un generico sistema lineare tempo-invariante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) = Cx(t)+Du(t) \end{cases}$$

Applicando le proprietà della trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} sX(s)-x(0) = AX(s)+BU(s) \\ Y(s) = CX(s)+DU(s) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (sI-A)X(s) = x(0)+BU(s) \\ Y(s) = CX(s)+DU(s) \end{cases}$$

La relazione tra stato e uscita e stato e condizione iniziale è:

$$X(s) = (sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)$$

$$\rightarrow Y(s) = \underbrace{[C(sI-A)^{-1}B+D]U(s)}_{\text{risposta forzata}} + \underbrace{C(sI-A)^{-1}x(0)}_{\text{risposta libera}}$$

Sfruttiamo questa definizione di $Y(s)$ e la applichiamo al sistema.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1] \quad D = 0$$

$$(sI-A) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \rightarrow (sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s+1 & 0 \\ 0 & 1/s+1 \end{bmatrix}$$

Risposta libera:

$$Y_e(s) = C(sI-A)^{-1}x(0) = [1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1/s+1 & 0 \\ 0 & 1/s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1/s+1 \\ 2/s+1 \end{bmatrix} = \frac{3}{s+1}$$

Risposta forzata:

$$Y_f(s) = C(sI-A)BU(s) = [1 \quad 1]\begin{bmatrix} 1/s+1 & 0 \\ 0 & 1/s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}U(s) = \underbrace{\frac{10}{s+1}}\,U(s)$$

ho due autovalori coincidenti, ma ne vedo solo uno.

Dato che $U(s) = \mathcal{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}$

$$\rightarrow Y_f(s) = \frac{10}{(s+1)(s+3)}$$

$y(t) = y_e(t) + y_f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = y_e(t) + y_f(t)$

$y_e(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right] = 3e^{-t}\,\delta_{ca}(t)$

$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)(s+3)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+3}\right] = [\alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{-3t}]\,\delta_{ca}(t)$

$\alpha_1(s+3) + \alpha_2(s+1) = 10$

$(\alpha_1+\alpha_2)s + 3\alpha_1 + \alpha_2 = 10$

$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 & \rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 10 & \rightarrow -3\alpha_2 + \alpha_2 = 10 \end{cases}$

$-2\alpha_2 = 10$

$\alpha_2 = -5$

$\rightarrow y_f(t) = [5e^{-t} - 5e^{-3t}]\,\delta_{ca}(t)$

$\Rightarrow y(t) = 3e^{-t}\delta_{ca}(t) + 5e^{-t}\delta_{ca}(t) - 5e^{-3t}\delta_{ca}(t) =$

$= 8e^{-t}\delta_{ca}(t) - 5e^{-3t}\delta_{ca}(t).$