lunedì 20 aprile 2020 10:30

VALUTAZIONE del TEMPO di ASSESTAMENTO

SISTEMA I ORDINE

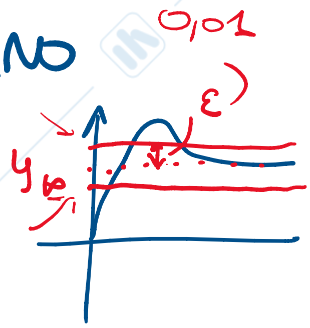
$$\boxed{T_a : (1-\varepsilon)\, y_\infty \le y(t) \le (1+\varepsilon)\, y_\infty} \quad (\square)$$

μ

$$\forall t \ge T_a$$

Primo valore di t, a partire dal quale consideriamo la risposta "A REGIME" $\boxed{y(t) \simeq y_\infty \ \forall\, t \ge T_a}$

Consideriamo la RISPOSTA A SCALINO del sistema



$$G(s) = \frac{\mu}{1+sT}$$

$$y(t) = \mu\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

Dall'eq $(\square)$ si ha

$$(1-\varepsilon)\cancel{\mu} \le \cancel{\mu}\left(1 - e^{-t/T}\right) \le (1+\varepsilon)\cancel{\mu}$$

$\mu > 0$

$\varepsilon = 0{,}01$

$$0{,}99 \le 1 - e^{-t/T} \le 1{,}01$$

$$-0{,}01 \le -e^{-t/T} \le 0{,}01$$

$\downarrow$ $-t/T$

$\boxed{\frac{t}{T} = \ln(100) \Updownarrow t \cong 5T}$ ← $e^{-t/T} = 0{,}01$

$t = T_a$

ABBIAMO che $T_a \cong 5T$

RISPOSTA A SCALINO di UN SISTEMA II° ORDINE CON POLI COINCIDENTI (AS. STABILE, SENZA ZERI)

$G(s) = \frac{\mu}{1+sT}$

TVI	TVF
0	μ

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT)^2} \quad \text{POLI } s = -\frac{1}{T},\ T>0$$

$$U(s) = 1/s$$

TVI $y(0) = 0$

TVF → SIST. AS. STAB con tipo $g=0$ e $u(t) = sca(t)$ ⇓ $y_\infty = \mu$

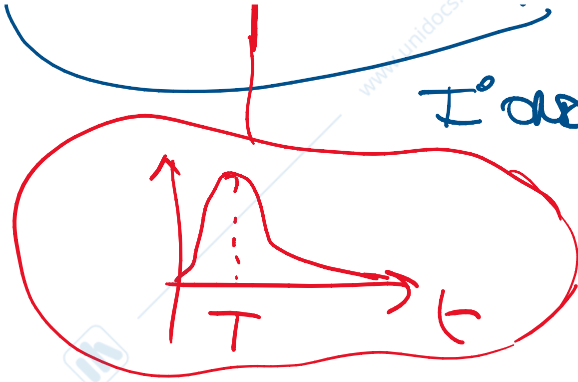
$$Y(s) = G(s)\,U(s)$$

$p = \frac{1}{T}$

$$\frac{A/T}{(s+p)} + \frac{B/T^2}{(s+p)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{(1+sT)} + \frac{B}{(1+sT)^2} + \frac{C}{s}\right] =$$

$$= A e^{-t/T} + B t e^{-t/T} + C, \quad t \geq 0$$



I° ORDINE

ANALISI DIFFERENZA TRA RISPOSTA del SISTEMA I° e del II° ORDINE

$$\dot y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,\mathcal{L}[\dot y(t)] = 0 \quad \begin{cases} \text{I ORDINE} \\ \text{II ORDINE} \end{cases}$$

$$= \lim_{s\to\infty} s\,[sY(s) - \cancel{y(0)}] =$$

$$\dot y(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 G(s)\frac{1}{s} = \boxed{\lim_{s\to\infty} s\,G(s)} \quad \dot y(0)$$

I ORDINE — GR. REL $r = 1$

$$G(s) = \frac{\mu}{1+sT}$$

$$\dot y(0) = \lim_{s\to\infty} \frac{s\,\mu}{(1+sT)} = \frac{\mu}{T}$$

$$\dot y(0) \neq 0$$

$$\boxed{r = 1 \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot y(0) \neq 0 \end{cases}}$$

II ORDINE — GR. REL $r = 2$

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT)^2}$$

$$\dot y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,\frac{\mu}{(1+sT)^2} = 0$$

$$\dot y(0) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot y(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 G(s)$$

$$\boxed{r = 2} \quad = \lim s^2 \frac{\mu}{}$$

$\boxed{r=2}$

$\begin{cases} y(0)=0 \\ \dot{y}(0)=0 \\ \boxed{\ddot{y}(0)\neq 0} \end{cases}$

$\frac{1}{1}\lim_{s\to\infty} s^2 \frac{\mu}{(1+sT)^2} = \mu/T^2 \neq 0$

→ # POLI - # ZERI

Proprietà: Se ho un sistema LTI, AS. STABILE, con grado relativo $\boxed{r}$, la PRIMA DERIVATA NON NULLA in $t=0$ della risposta a scalino è quella di ordine pari al grado relativo

$\left(r=1 \rightarrow \dot{y}(0)\neq 0 \qquad r=2 \rightarrow \ddot{y}(0)\neq 0 \right)$

$\boxed{r=0 \rightarrow y(0)\neq 0}$

$r=0$

SISTEMA PROPRIO

(LTI) → $D\neq 0$

POLI = # ZERI

⇓

COMPARE l'ingresso $u(t)$ ESPLICITAMENTE NELLA TRASF. di uscita

$u(t) = sca(t) \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geq 0 \end{cases}$

$r>0$

SISTEMA STRETT. PROPRIO

(LTI) → $D=0$

POLI > # ZERI

⇓

l'ingresso $u(t)$ NON COMPARE ESPLICITAMENTE nella TRASF. USCITA

$u(t) = sca(t) \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geq 0 \end{cases}$

PROPRIO

$\dot{x} = -x + u$

$\boxed{y = x + u}$ $\boxed{r=0}$ → EQ. ALGEBRICA

$\mathcal{L}$ $(s+1)X = U$

$Y(s) = \frac{U(s)}{s+1} + U(s) = \frac{U(s) + (s+1)U(s)}{s+1} = \boxed{\frac{s+2}{s+1}} U(s)$

RISP. SCA $Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{s+2}{s+1}\frac{1}{s}$

TVI $y(0) = \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{s+2}{s+1}\frac{1}{s}\right] = 1$

$\dot{x} = -x + u$

$\boxed{y = x + u}$ $r=0$

Si aplica anche a sistemi NON LIN.

STR. PR. $r>0$

$\dot{x} = -x + u$

$y = x$

$\mathcal{L}$ $(s+1)X(s) = U(s)$

$Y(s) = \boxed{\frac{1}{s+1}} U(s)$

$y(0) \overset{TVI}{=} \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{1}{s+1}\frac{1}{s} = 0$

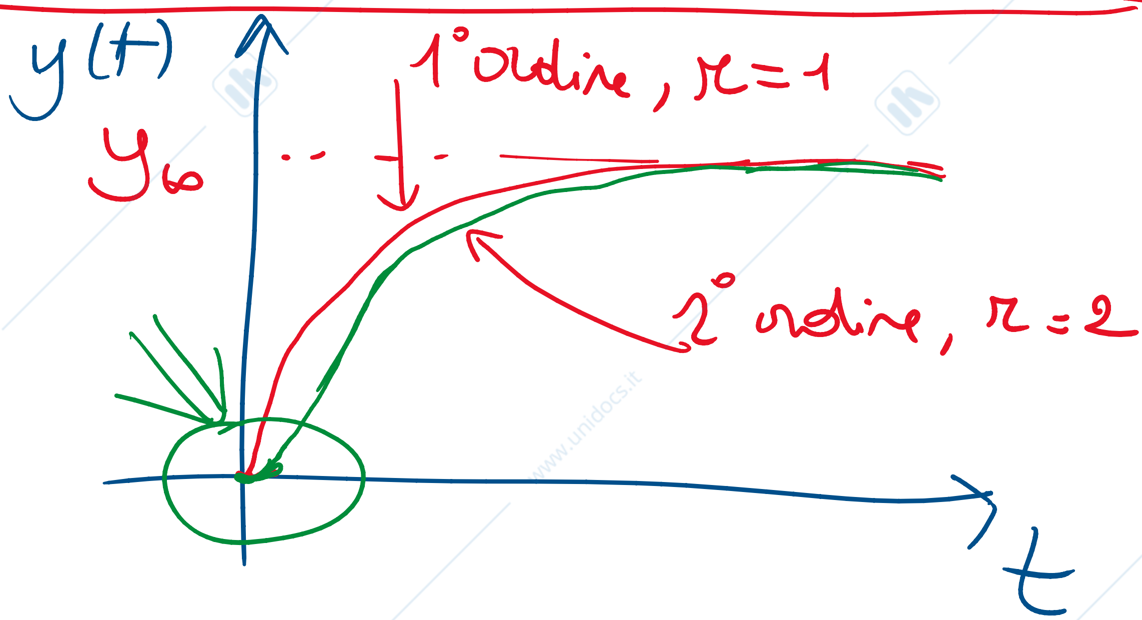
$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} sG(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{s}{s+1} = 1 \neq 0$

$\dot{x} = -x + u$

$y = x$

$\boxed{\dot{y} = \dot{x} = -x + u}$ $r=1$

Il grado relativo si definisce anche come il NUMERO di VOLTE che devo derivare $y(t)$ rispetto al tempo per far comparire $u(t)$ nella TRASF. di che devo derivare y(t) rispetto al tempo per far comparire u(t) nella Trasf. di uscita



SISTEMA II° ORDINE, senza zeri, con poli DISTINTI

AS. STAB.

$T_1, T_2 > 0$

$$G(s) = \frac{\mu}{\underbrace{(1+sT_1)}\underbrace{(1+sT_2)}} \qquad r = 2$$

$\underline{U(s) = 1/s}$

$r = 2 \rightarrow \begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \quad \ddot{y}(0) \neq 0$

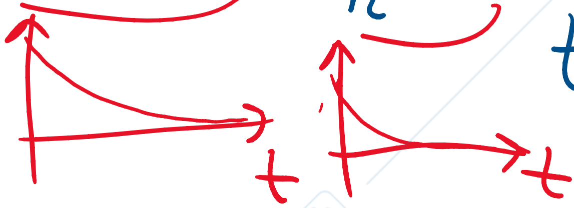
AS. ST. e TIPO $g = 0$ $\quad y_\infty = \mu$

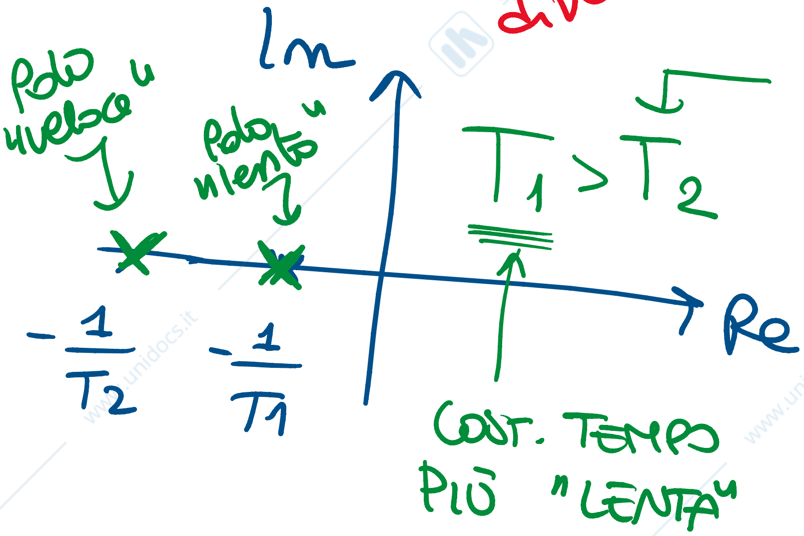
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A/T_1}{s+\frac{1}{T_1}} + \frac{B/T_2}{s+\frac{1}{T_2}} + \frac{C}{s}\right]$$

$\rightarrow$ exp $\rightarrow 0$ $\quad = A/T_1\, e^{-t/T_1} + B\, e^{-t/T_2}$ (

$$= \frac{A}{T_1} e^{-t/T_1} + \frac{B}{T_2} e^{-t/T_2} + C, \quad t \geq 0$$

2 exp con costanti di tempo diverse $\rightarrow 0$





Se $T_1 \simeq T_2$

↳ SOMIGLIA AL CASO DI 2 POLI COINCIDENTI

↳ $\boxed{T_1 >> T_2}$ (o viceversa)

SOMIGLIA AL CASO DEL SISTEMA 1° ORDINE CON LA COSTANTE DI TEMPO PIÙ LENTA

SISTEMA 2° ORDINE, SENZA ZERI CON POLI C.C.

$$G(s) = \frac{K}{s^2+2\sigma s+\sigma^2+\omega^2} = \frac{\rho}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{\mu}{}$$

$u(t) = sca(t)$

Poli c.c. $-\sigma \pm j\omega$

$s = j\omega$

$$= \frac{\mu}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$$

FdT sistema AS. STABILE DI TIPO $g=0$ con $K=2$ $\Rightarrow$

$y(0) = \dot{y}(0) = 0$

$\ddot{y}(0) \neq 0$

$y_\infty = \mu$

COST. TEMPO

$$T_a \simeq 5T$$

$$T = \frac{1}{|Re(polo)|} = \frac{1}{\sigma}$$

σ = |Re(polo)|

$$\boxed{\begin{array}{l} -\sigma = -\xi\omega_n \\ \omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ \omega_n \text{ PULS. NATURALE} \\ \xi \text{ SMORZAMENTO} \end{array}}$$

PERIODO OSCILLAZ.

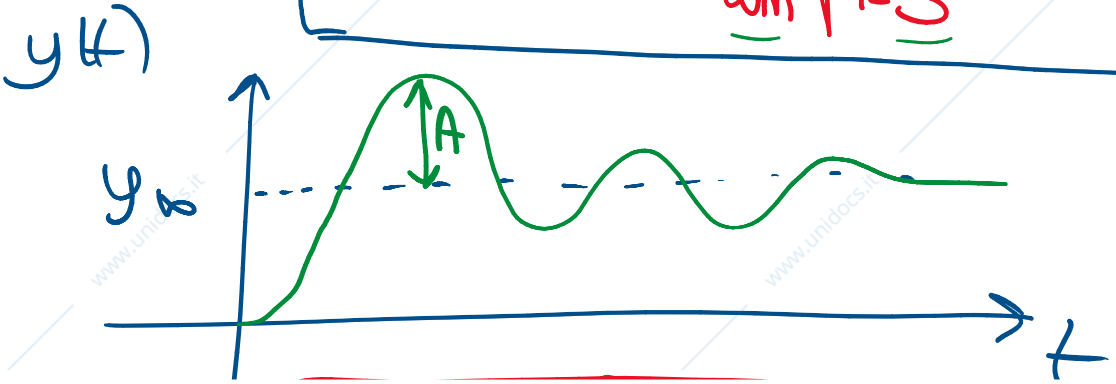
$$T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega}$$

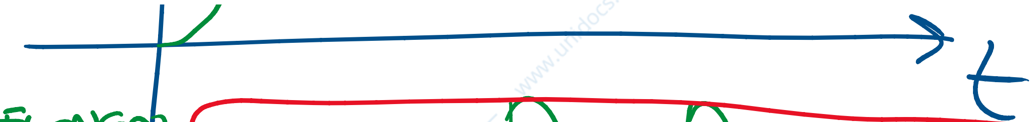
ω = Im(polo)

In termini di ω_n e ξ:

$$\boxed{T_a \simeq 5T = \frac{5}{\sigma} = \frac{5}{\xi\omega_n}}$$

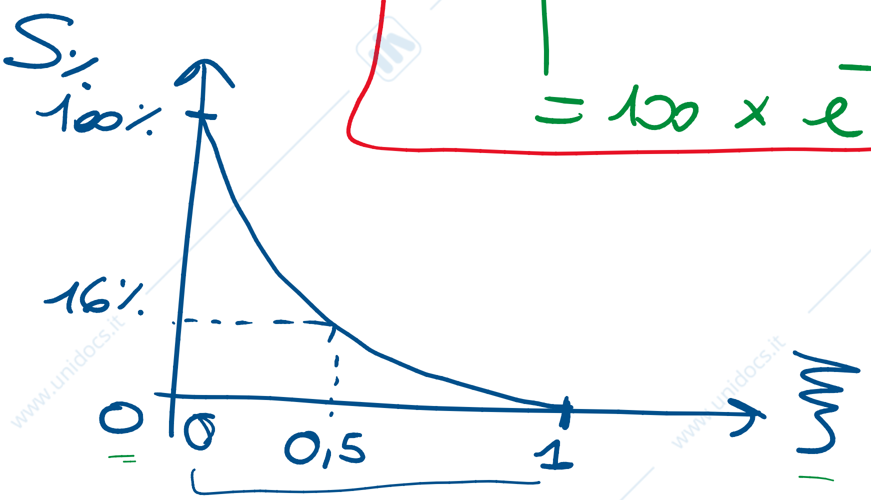
$$\boxed{T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}}$$





SOVRAELONGAZ. % MASSIMA RELATIVA

$$\boxed{S_\% = \frac{A}{y_\infty} = \underbrace{\frac{A}{\mu} \times 100}_{} = 100 \times e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$



$\xi = 0$ POLI IMM. PURI

$\xi = 1$ POLI REALI ≡

NOTE

T_{ass} dipende dalla COSTANTE DI TEMPO $< \begin{array}{l} |Re(polo)| \\ \parallel \\ \xi\omega_n \end{array}$

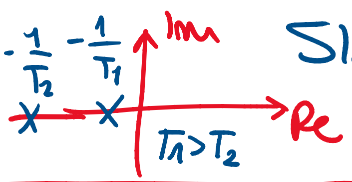
$$\boxed{T = \frac{1}{|Re(polo)|}}$$

$T_{oscill.}$ dipende da parte IMMAG. POLO

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$S_\%$ dipende solo dallo SMORZAMENTO

EFFETTO degli ZERI



SISTEMI 2° ORDINE (AS. STABILE)
CON 1 ZERO

$T_1, T_2 > 0$

FISSO $\mu > 0$

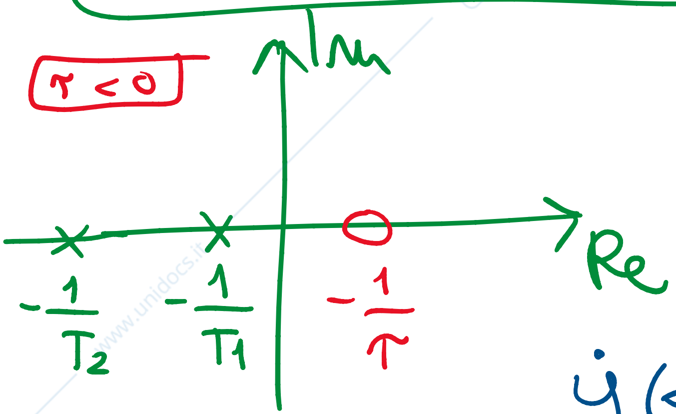
$$G(s) = \mu \frac{1+s\tau}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

$\boxed{\mu = 1}$

Fisso $\mu > 0$, $T_1 > T_2$

$(1+sT_1)(1+sT_2)$

$\boxed{① \quad \tau < 0 \quad \text{zero } s = -\frac{1}{\tau} > 0}$

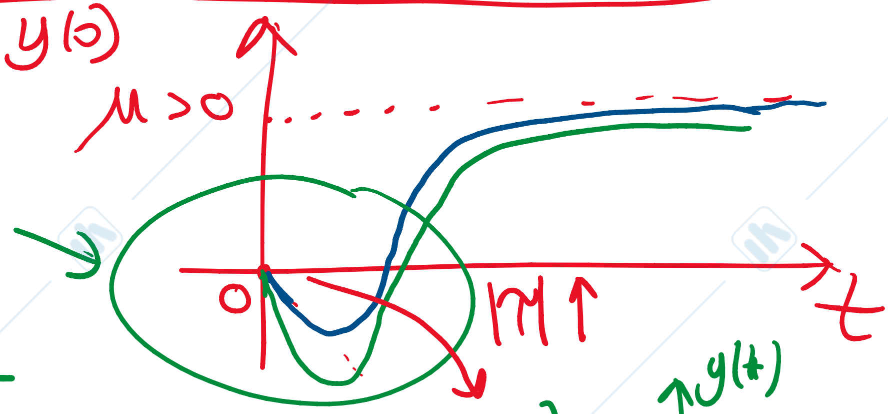


$y(0) = 0, \quad y_\infty = \mu$

$\dot{y}(0) \neq 0$

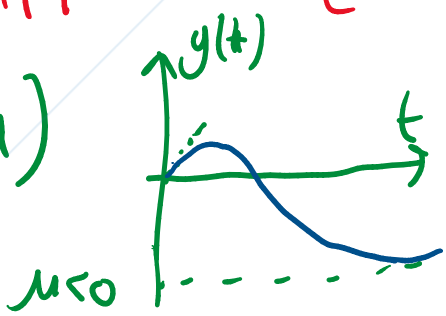
$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\,G(s) = \lim_{s\to\infty} s \frac{\mu(1+s\tau)}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = \frac{\mu\tau}{T_1 T_2} < 0$$

$\mu > 0$
$T_1, T_2 > 0$
$\tau < 0$



RISPOSTA INVERSA

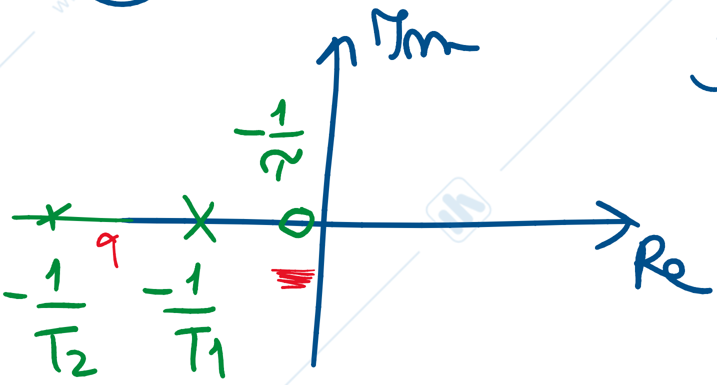
(DERIVATA PRIMA in $t=0$ $\dot{y}(0)$ ha segno opposto a quello di $y_\infty = \mu$)



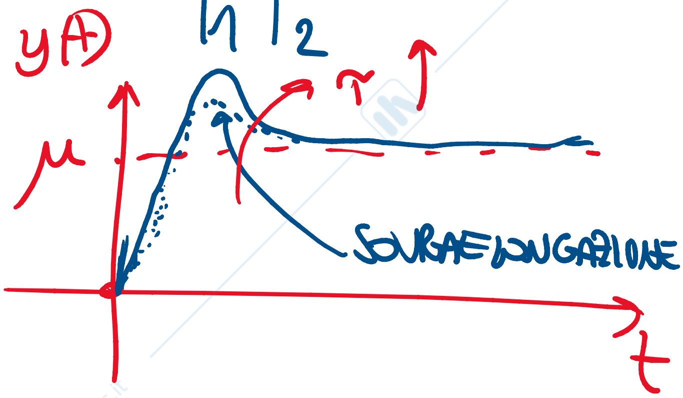
$\tau > 0$

② $\tau > T_1 > T_2$

② $\tau \gg T_1 > T_2$



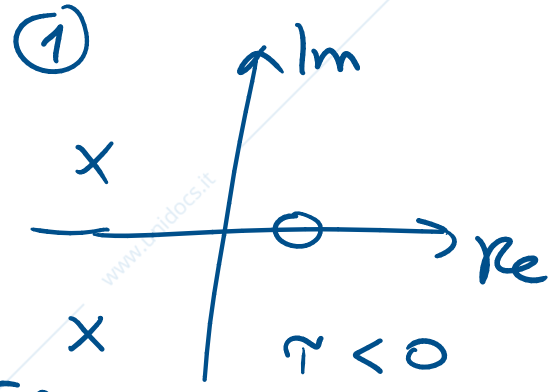
$$\dot{y}(0) = \frac{\mu \tau}{T_1 T_2} > 0$$

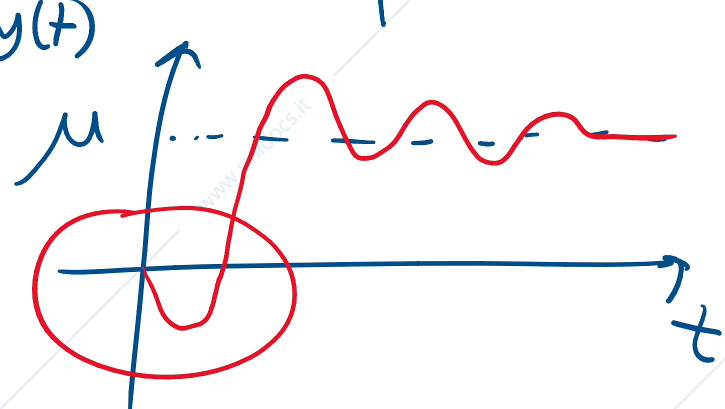


N.B. Se $\tau \to +\infty$
lo zero $\to s = -\frac{1}{\tau} \to 0$
lo zero in $s=0$ è DERIVATORE

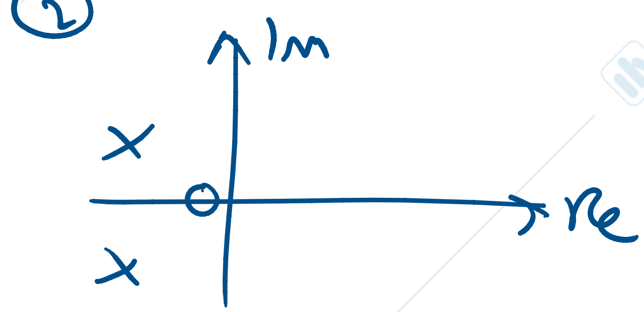
N.B. Questi andamenti per effetto degli zeri ci sono anche se i poli c.c.

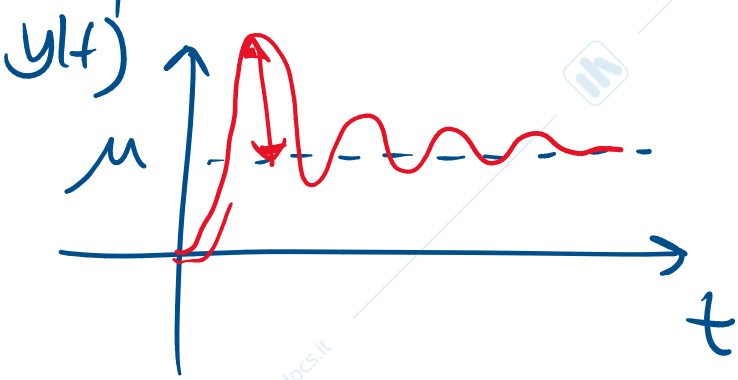
①





②





STUDIO della RISPOSTA A SCALINO per

STUDIO della RISPOSTA A SCALINO per sistemi di ordine qualsiasi

AS. STABILE
TIPO 0

$$\boxed{G(s) = \mu \frac{\prod(1+s\tau_i)}{\prod(1+sT_i)}}$$

ZERI C.C.
POLI C.C.

$u(t) = sca(t)$

* $y_\infty = \mu$

* LA PRIMA DERIVATA NON NULLA in $t=0$ È QUELLA DI ORDINE PARI A r

HEAVISIDE $\rightarrow$ termini associati a tutti i poli reali e c.c.

$\Downarrow$

Le caratteristiche MACROSCOPICHE sono associate ai poli più "LENTI"

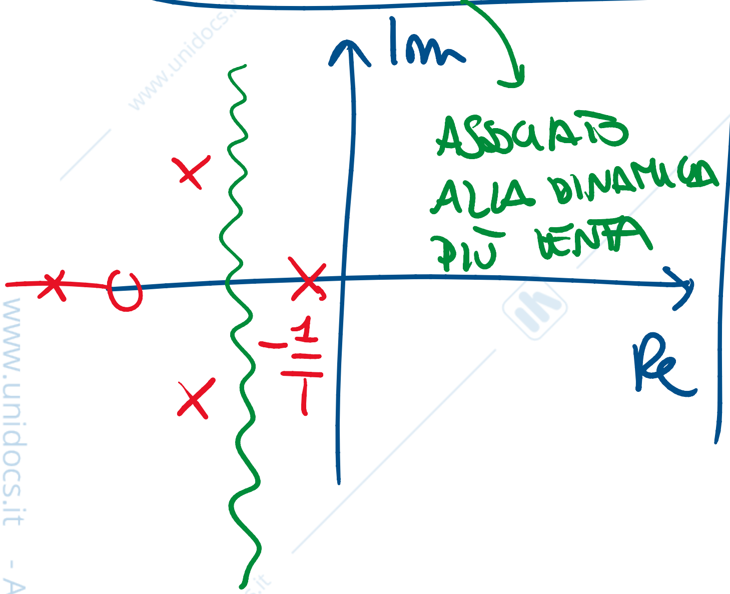
$\downarrow$

quelli i cui esponenziali nel tempo $\rightarrow 0$ più lentamente

APPROSSIMAZIONE A POLI DOMINANTI del SISTEMA

POLO DOMINANTE REALE | POLI DOMINANTI C.C.

POLO DOMINANTE REALE



PIÙ DOMINANTI C.C.