venerdì 27 marzo 2020 10:29

ANALISI DI STABILITÀ SENZA IL CALCOLO degli AUTOVALORI

Premessa

CONDIZIONI $\boxed{\text{NECESSARIE}}$ PER L'AS. STABILITÀ di SISTEMI LTI

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ \times & \lambda_2 & & \\ \times & \times & \ddots & \\ \vdots & \times & \times & \lambda_n \end{bmatrix}$$

A TRIANG. O DIAGONALE
$\downarrow$
ELEM. sulla diagonale sono GLI AUTOVALORI

AS STAB $\Leftrightarrow$ $Re(\lambda_i(A)) < 0$

traccia

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$ SOMMA elem. sulla diagonale

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$ SOMMA AUTOVALORI

COND. NECESSARIA PERCHÉ UN SISTEMA LTI SIA AS. STABILE è $\boxed{tr(A) < 0}$

$\lambda_i(A_1) = \{-1, -3\}$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

se $tr(A) \geq 0$ NON è AS. ST

se $tr(A) < 0 \Rightarrow$ devo verificare

$\lambda_i(A_2) = \{-10, 8\}$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix}$ se $tr(A) < 0 \Rightarrow$ devo verificare $= \begin{bmatrix} 0 & 8 \end{bmatrix}$

$tr(A_1) = -1-3 = -4 < 0$ $\qquad tr(A_2) = -10+8 = -2 < 0$

In modo analogo ricordiamo che

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

C. NECESSARIA perché un sistema sia AS. STABILE è $\boxed{\det(A) \neq 0}$

NON CI SONO AUTOV. NULLI

Se $\det(A) = 0$ so che il sist NON è AS. ST.

Se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ devo studiare gli AUTOV.

CRITERIO DI ROUTH - HURWITZ

Consideriamo una matrice A $n \times n$

e il POLINOMIO CARATT.

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) =$$

$$\overset{!}{=} \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n$$

① COND. NECESSARIA perché le radici di $\Delta_A(\lambda)$ siano tutte con $Re < 0$ è che

$\Delta_A(\lambda)$ siano tutte con Re < 0 e che

CN $\boxed{\alpha_i \text{ siano tutti concordi e non nulli}}$
Se l'ordine del sistema $n = 1, 2$ è CNS

② COND NEC. e SUFF. perché le radici di $\Delta_A(\lambda)$ abbiano tutte Re < 0 è che

CNS: LA PRIMA COLONNA della TABELLA DI ROUTH ABBIA TUTTI GLI ELEMENTI CONCORDI e NON NULLI

COSTRUZIONE della TABELLA ROUTH

$$\Delta_A(\lambda) = \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

Pol di GRADO n

$n+1$ RIGHE

$$\begin{array}{cccc} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \dots \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots \end{array}$$

COEFF. di INDICE PARI
" INDICE DISPARI

I° COLONNA

$$h_{ij} = -\frac{1}{\text{elem. appena sopra } 1^a \text{ colonna}} \det \begin{bmatrix} \text{2 elem. appena sopra } 1^a \text{ colon.} & \text{2 elem. appena sopra colonna a dx} \end{bmatrix}$$

$$h_1 = -\frac{1}{\alpha_1} \det \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$h_2 = -\frac{1}{\alpha_1} \det \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_5 \end{bmatrix}$$

$$[\;\;\vdots\;\;] \quad \dots \quad \alpha_1 \quad [\alpha_1 \vdots \alpha_5]$$

$$K_1 = -\frac{1}{h_1} \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO $\Delta_A(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 5\lambda + 1$ $\quad n = 3$

$\alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \dots \pm \alpha_n$

(1) C.N. α_i CONC. E NON NULLI

$\alpha_i = \{1, 3, 5, 1\}$ OK!

$n+1 = 3+1 = 4$ RIGHE

	1	5	0	0	0	COEFF. INDICE PARI
	3	1	0	0	0	" " DISPARI
14/3	h_1	h_2				
1	K_1					

$$h_1 = -\frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}(-14) = \boxed{\frac{14}{3}}$$

$$h_2 = -\frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$K_1 = -\frac{1}{h_1} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{h_1} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ h_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{h_1}(-h_1) = 1$$

I° COLONNA: $\{1, 3, h_1, K_1\} = \{1, 3, \frac{14}{3}, 1\}$

↳ CONCORDI E NON NULLI $\iff$ RADICI R... [illegible]

↳ CONCORDI e NON NULLI $\Longleftrightarrow$ RADICI POLINOMIO sono tutte $Re<0$

Analisi caso $m=1$ e $n=2$

$\boxed{n=2}$ $\Delta_A(\lambda) = \underline{\alpha_0}\lambda^2 + \underline{\alpha_1}\lambda + \underline{\alpha_2}$

2+1=3 RIGHE

$$\left\{\begin{array}{cc} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 \\ h_2 = \alpha_2 & \end{array}\right.$$

$$h_1 = -\frac{1}{\alpha_1} \det \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\alpha_1}(-\alpha_1\alpha_2)$$

Ia colonna $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$

$\boxed{n=1}$ $\Delta_A(\lambda) = \alpha_0\lambda + \alpha_1$ $\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$

1+1=2 elem

ALCUNE PROPRIETÀ dei SISTEMI LTI AS. STABILI

(1) Fissato un ingresso $u(t) = \bar{u}$ COSTANTE lo STATO DI EQ. DI UN SISTEMA AS. STABILE ESISTE ED È UNICO

AS. STABILE ESISTE ED È UNICO

STATO ed $\exists !$
sse
$\boxed{\det(A) \neq 0}$

~~↓~~

SIST. AS. STAB

N.B.
AS. STABILITÀ
↓ ~~↑~~
EQ $\exists !$

SIST. AS. STABILE
NON HA AUTOV. NULLI
↓
$\det(A) \neq 0$
↓
L'EQUIL. $\exists !$

② IL MOVIMENTO dello STATO e dell'uscita di un sistema LTI ASINT. STABILE dipendono "A REGIME" solo dall'ingresso $u(t)$

$\underbrace{\text{"A REGIME"}}_{t \to +\infty}$

Sist AS. STABILE
↓
TUTTI i MODI
$t \to +\infty$ ↓
0

$$x(t) = \overbrace{x_L(t)}^{\text{COMB. LIN. MODI}} + \overbrace{x_F(t)}^{\text{COMB. LIN. MODI + termine della stessa forma della forzante}}$$

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t)$$

$y_L(t) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$

$y_F(t) \xrightarrow{t \to +\infty}$ TERMINE della stessa forma della FORZANTE

N.B.

Se alimento un sistema AS. STABILE con un ingresso DIVERGENTE, il MOVIMENTO COMPLESSIVO (l... ...

... di un ingresso illimitato,
il MOVIMENTO COMPLESSIVO (di stato e uscita) PUÒ DIVERGERE

RICORDA SIST È AS. STAB. $\Rightarrow$ $x_L \xrightarrow{t \to +\infty} 0$, $y_L \to 0$

2a Se uso come ingresso $u(t) = 0$ il MOVIMENTO COMPLESSIVO di un sistema AS. STABILE $\xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ x_F, y_F $\xrightarrow{t \to +\infty}$ TERMINANO con lo stesso fomo della forzante

$u(t) = 0 \Rightarrow$ SOLO IL MOV. LIBERO

$\Updownarrow$

SIST. AS. STABILE
MOV. LIB $\xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

2b Se applico ad un sistema LTI AS. STABILE UN INGRESSO LIMITATO (che non diverge), ho UNA USCITA LIMITATA (che non diverge), ho UNA USCITA LIMITATA

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t)$$

$t \to \infty$: $y_L(t) \to 0$ — STAB. INTERNA (quella legata agli AUTOVALORI)

$y_F(t) \to$ TERMINE con la stessa forma dello forzante

Definisce la STABILITÀ ESTERNA $\longleftrightarrow$ STAB. INTERNA

del legame INGR/USCITA

BIBO: BOUNDED-INPUT / BOUNDED OUTPUT

---

(3) Se $u(t) = \bar{u}$ COSTANTE, l'uscita di un sistema AS. STABILE, vale, a regime

$$\bar{y} = \underbrace{\left(-CA^{-1}B + D\right)\bar{u}}_{\text{USCITA di EQUILIBRIO}}$$

$y = y_L + y_F$

AS. ST.: $y_L \to 0$, $y_F \to$ stessa forma dello forzante $\bar{u}$

$$\dot{x} = -2x + u \qquad x = -2$$

$\cancel{\bar{u} = 1}$

$u(t) = e^t,\ t \geq 0$

MOV.

x_0

MOV.

$$x(t) = e^{-2t} x_0 + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \, 1 \, e^{\tau} \, d\tau$$

$$= e^{-2t} x_0 + e^{-2t} \int_0^t e^{3\tau} \, d\tau =$$

$$= e^{-2t} x_0 + e^{-2t} \left[\frac{e^{3\tau}}{3} \right]_0^t =$$

$$= e^{-2t} x_0 + \frac{1}{3} e^{-2t} \left(e^{3t} - 1 \right) =$$

$$= \underbrace{e^{-2t} x_0}_{x_L} + \underbrace{\frac{1}{3} e^{t} - \frac{1}{3} e^{-2t}}_{x_F}$$

$x_L \xrightarrow{t \to +\infty} 0$

$e^{-2t} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$

DIVERGE