FONDAMENTI DI AUTOMATICA I - Ingegneria Elettrica **Prof.ssa Mara Tanelli**

Appello del 4 marzo 2010

1. Si consideri il sistema dinamico non lineare e tempo invariante descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2x_2(t) + (\alpha - 1)x_2(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -5(x_1(t) - \alpha)^2 - 10x_2^2(t) + 4u^2(t) \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t), \end{aligned}$$

con α parametro reale.

1.1 Si determinino stati e uscite di equilibrio associati all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 0$, $t \geq 0$ in funzione di α.

$2\bar{x}_2 = 0 \iff \bar{x}_2 = 0$

$-5(\bar{x}_1 - \alpha)^2 = 0 \iff \bar{x}_1 = \alpha$

$\bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \alpha$

$$\boxed{\begin{aligned} &(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\alpha, 0) \\ &\bar{y} = \alpha \end{aligned}}$$

1.2 Si scrivano le equazioni del sistema linearizzato attorno ai punti di equilibrio determinati al punto 1.1.

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = 2\,\delta x_2 + (\alpha - 1)\,\bar{u}\big|_{eq}\delta x_2 + (\alpha - 1)\,\bar{x}_2\big|_{eq}\delta u \\ \delta\dot{x}_2 = -10\,(\bar{x}_1 - \alpha)\big|_{eq}\delta x_1 - 20\,\bar{x}_2\big|_{eq}\delta x_2 + 8\,\bar{u}\big|_{eq}\delta u \end{cases}$$

$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2$

All'equilibrio:

$$\boxed{\begin{aligned} &\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = 2\,\delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = 0 \end{cases} \\ &\delta y = \delta x_1 + \delta x_2 \end{aligned}}$$

1.3 Si calcoli il movimento di stato e uscita del sistema linearizzato determinato al punto 1.2 associato alle condizioni iniziali $(\Delta x_{10}, \Delta x_{20}) = (1, 1)$ e $\Delta u(t) = \overline{\Delta u} = 1, \forall t \geq 0$.

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = 2\,\delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2$

Risolvo la II^a eq.:

$\delta x_2(t) = \Delta x_{20}, \quad t \geq 0$

Risolvo la I^a eq., che è:

$\delta\dot{x}_1 = 2\Delta x_{20} \rightarrow \delta x_1(t) = \Delta x_{10} + 2\Delta x_{20} t$
$t \geq 0$

TRASF. USCITA: $\delta y = \Delta x_{10} + \Delta x_{20} + 2\Delta x_{20} t$

MOVIM. dello STATO: $\delta x(t) = \begin{bmatrix} \Delta x_{10} + 2\Delta x_{20} t \\ \Delta x_{20} \end{bmatrix}$

MOVIM. dell' uscita: $\delta y(t) = \Delta x_{10} + \Delta x_{20}(1+2t)$ $\quad t \geq 0$

1.4 Si studi la stabilità del sistema linearizzato in funzione del parametro α.

$$A_{LIN} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \forall \alpha$$

AUTOVETTORI: $A_{LIN} v = \lambda v \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} 2v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 \text{ qualsiasi} \\ v_2 = 0 \end{matrix} \quad v = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \ \beta \in \mathbb{R}$$

Quindi $\lambda = 0$ è AUTOVALORE CON MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA 2 e MOLTEPLICITÀ geometrica 1 $\Rightarrow$ il sistema linearizzato è INSTABILE

1.5 Si dica se l'analisi di stabilità per il sistema linearizzato svolta al punto precedente consente di trarre conclusioni circa la stabilità dei movimenti di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

Il sistema linearizzato ha almeno un autovalore nullo $\rightarrow$ non si può concludere nulla circa le proprietà di stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare dall'analisi del sistema linearizzato

2. Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{0.02s+1}{20s+1}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza autovalori nascosti.

2.1 Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema lineare tempo invariante avente funzione di trasferimento $G(s)$.

$\mu = G(0) = 10$

TIPO $= 0$

ZERO $z = -50$

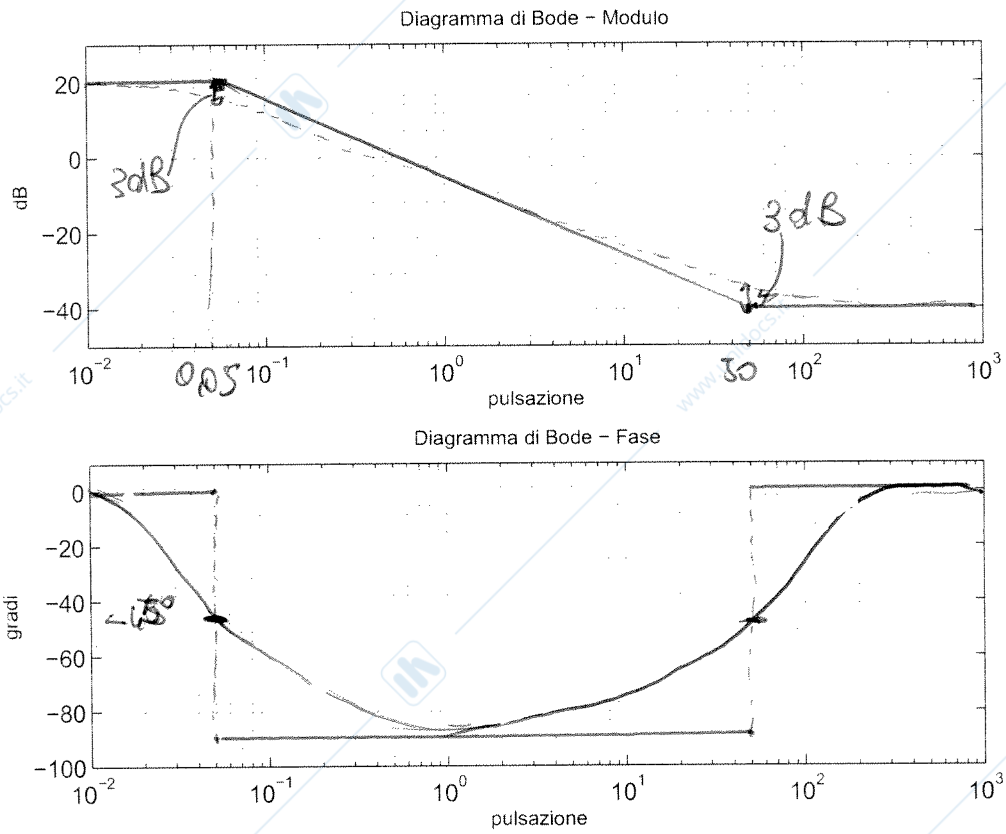
POLO $p = -0,05$

$G(s)$ ha 1 polo con $Re(p) < 0$ e non ci sono autovalori nascosti

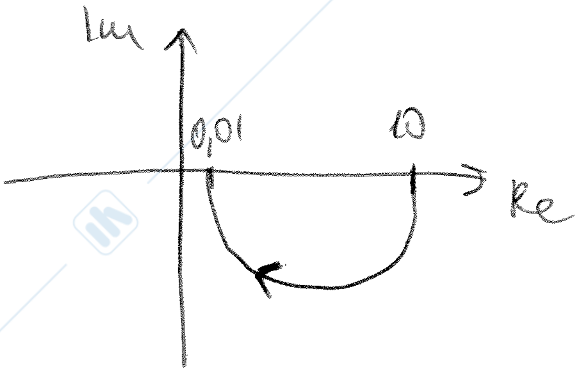
$$\{p_i\} \equiv \{\lambda_i\}$$

Pertanto $Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i \iff$ sistema ASINT. STABILE

2.2 Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$



2.3 Tracciare qualitativamente il diagramma polare della risposta in frequenza associata a $G(s)$.



2.4 Determinare l'espressione dell'uscita $y(t)$ di regime del sistema lineare tempo invariante con funzione di trasferimento $G(s)$ associata all'ingresso $u(t) = \underbrace{2}_{u_1(t)} + \underbrace{5\sin(0.05\,t)}_{u_2(t)} + \underbrace{10\sin(50\,t)}_{u_3(t)}$.

$U_1(s) = \frac{2}{s}$ $\quad Y_1(s) = G(s)\frac{2}{s}$ Applico il Th del valor finale (applicabile perché tutti i poli di $Y_1(s)$ sono con Re<0 o nulli)

$$y_{1\infty} = \lim_{s\to 0} s\,Y_1(s) = 2\,G(0) = 20$$

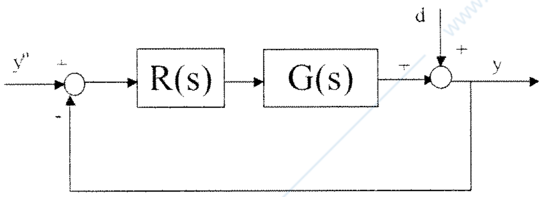
Per $u_2(t)$ e $u_3(t)$ applico il th. della risposta in freq. (applicabile perché sistema AS. STABILE)

$$y_2(t) \cong 5 \cdot 7 \sin(0{,}05t - \pi/4) = 35 \sin(0{,}05t - \pi/4)$$

$$y_3(t) \simeq 10 \cdot 0{,}014 \sin(50t - \pi/4) = 0{,}14 \sin(100t - \pi/4)$$

N.B.
17dB $\simeq$ 7
-37dB $\simeq$ 0,014

2.5 Si consideri il sistema di controllo in figura.



Progettare un regolatore $R(s)$ tale che: 1) l'errore a transitorio esaurito a fronte di $y^o(t) = \pm\mathrm{sca}(t)$ sia nullo, ovvero $e_\infty = 0$; 2) il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di $d(t) = \sin(\omega t), \omega \in [0.05, 1]$rad/s sia $|e_\infty| \leq 0.1$; 3) la pulsazione critica del sistema in anello chiuso sia $\omega_c \geq 10\,$rad/s e il margine di fase sia $\varphi_m \geq 60°$.

1) Per avere $e_\infty = 0$ con $y^o(t) = \pm\,sca(t)$ serve $L(s)$ di tipo 1

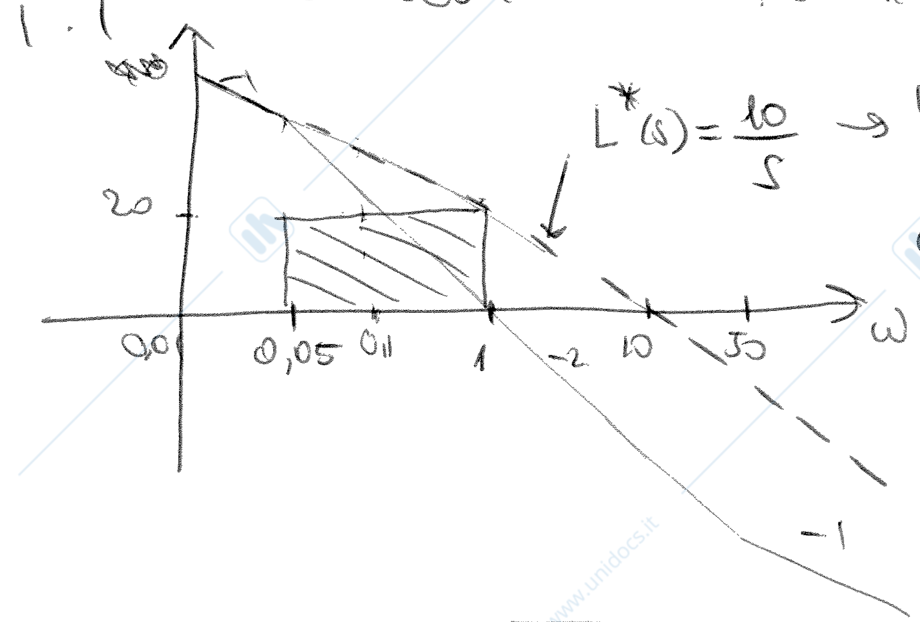
$\Rightarrow R_1(s) = \mu_R / s$

2) $\frac{D(s)}{E(s)} = -\frac{1}{1+L(s)} = -S(s)$ $\quad |S(s)| \simeq \frac{1}{|L|}$ per $\omega < \omega_c$ (e $\omega_d < \omega_c$)

$|e_{\infty d}| \leq 0{,}1 \iff |L(j\omega)| \geq 10 \;\forall\, \omega \in [0{,}05, 1]$

3) PROGETTO DINAMICO: Ipotesi $R_1(s) = \frac{1}{s}$, $R_2(s) = 1$

$$L_1(s) = \frac{10}{s} \frac{0{,}02s+1}{20s+1}$$ → NO vincolo ω_c
NO " su disturbo $d(t)$



$L^*(s) = \frac{10}{s}$ → $\omega_c = 10$ rad/s
vincolo su $d(t)$ OK
$\varphi_m \simeq 90°$

$$R_2(s) = \frac{20s+1}{0{,}02s+1} \Rightarrow \boxed{R(s) = \frac{20s+1}{s\,(0{,}02s+1)}}$$

2.6 Con riferimento al sistema di controllo progettato al punto precedente dire, giustificando la risposta, quanto vale l'ampiezza dell'uscita $y(t)$ di regime associata all'ingresso $y^o(t) = \underbrace{2}_{y^o_1} + \underbrace{10\sin(t)}_{y^o_2} + \underbrace{5\sin(100\,t)}_{y^o_3}$ con $d(t) = 0$.

$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \qquad |F(s)| \simeq \begin{cases} 1 & \omega < \omega_c \\ |L| & \omega > \omega_c \end{cases}$$

$y_{y^o_1} = 2$ (ho errore nullo a transitorio esaurito $\Rightarrow y = y^o$)

$y_{y^o_2} = 10$ ($\omega = 1 < \omega_c \Rightarrow |F(s)| \simeq 1$)

$y_{y^o_3} \simeq 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$

$|L(j100)| = -20$ dB $\Rightarrow 0{,}1$

3. Con riferimento alla classe dei sistemi lineari e tempo invarianti a tempo continuo, si enunci con precisione il teorema della risposta in frequenza.

Vedi libro/appunti

4. Si spieghi in cosa consiste il fenomeno dell'aliasing e si dica in che modo è possibile ridurne gli effetti in fase di progetto di un sistema di controllo digitale.

Vedi libro/appunti