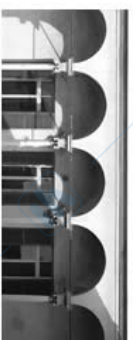
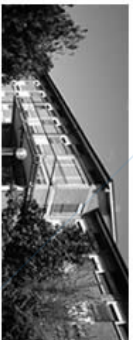




POLITECNICO DI MILANO



**Dipartimento di
Elettronica,
Informazione e
Bioingegneria**



Rappresentazioni grafiche della r.i.f : diagrammi di Bode

Fondamenti di Automatica per Ing. dell'Automazione a.a. 2019/2020
Prof.ssa Mara Tanelli

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it



Sommario

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

- Rappresentazioni grafiche della r.i.f.
- Diagrammi di Bode di modulo e fase
- Sistemi a fase minima



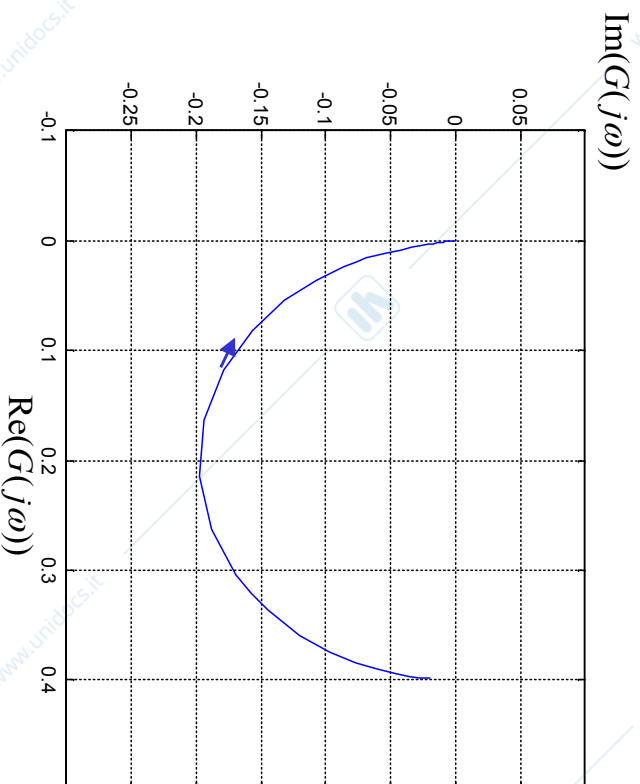
Rappresentazione grafica della risposta in frequenza

Per ogni ω , la r.i.f. è un numero complesso e, come tale, esprimibile mediante 2 numeri reali (modulo/fase o Re/Im) che variano con la pulsazione:

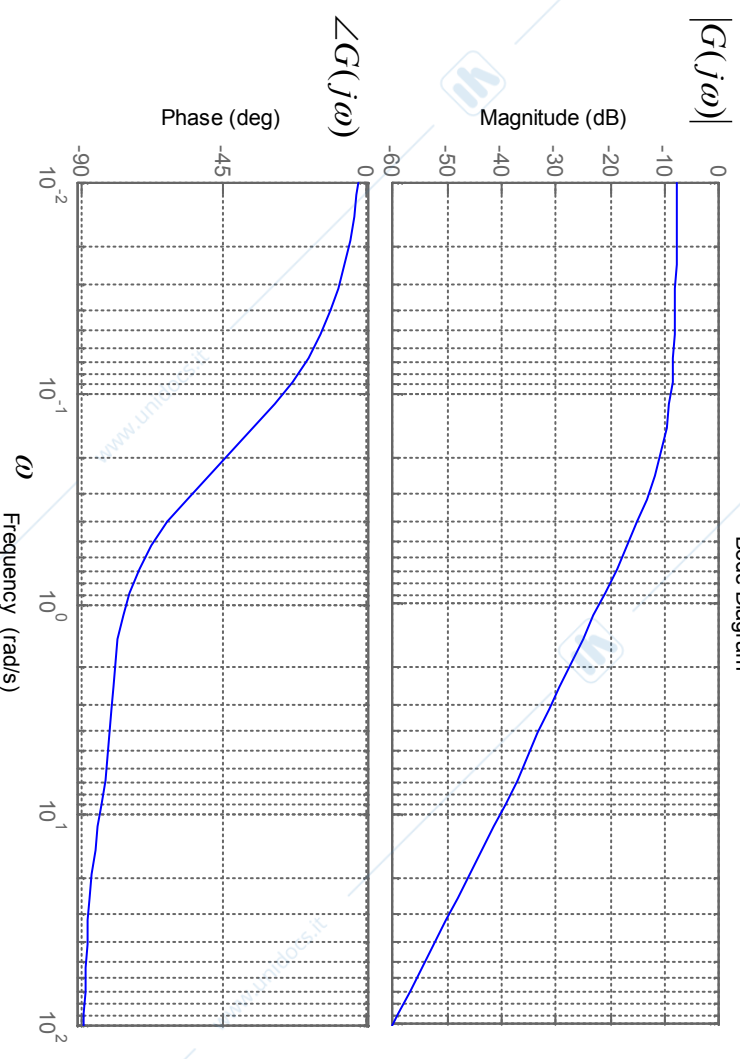
$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)} = \text{Re}(G(j\omega)) + j \text{Im}(G(j\omega))$$

Due principali rappresentazioni

diagramma polare



diagrammi di Bode



il diagramma è “punteggiato” nei valori di ω



Diagrammi di Bode

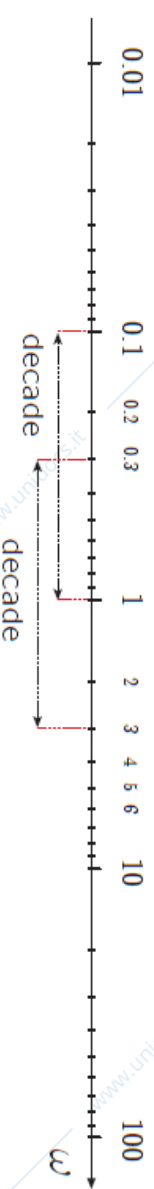
Sono **diagrammi cartesiani** della risposta in frequenza nei quali **le scale degli assi** delle ascisse e delle ordinate sono scelti secondo opportuni criteri che ne facilitano il tracciamento.

Sia nel diagramma del modulo che in quello della fase **l'asse delle ascisse (pulsazioni) ha scala logaritmica (\log_{10}) ma sull'asse si dispongono i valori della pulsazione, non i suoi logaritmi!**

la distanza tra due ascisse ω_1 e $\omega_2 > \omega_1$ è proporzionale al rapporto ω_2/ω_1 , cioè alla differenza tra i $\log \omega_2$ e $\log \omega_1$, anziché alla differenza $\omega_2 - \omega_1$, come accadrebbe in scala lineare.

Quindi, considerate quattro pulsazioni $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ tali che $\omega_4/\omega_3 = \omega_2/\omega_1$, la distanza tra le ascisse ω_3 e ω_4 è uguale a quella tra ω_1 e ω_2 .

In particolare, una distanza corrispondente ad un rapporto tra pulsazioni pari a dieci viene chiamata **decade**



La pulsazione nulla è il punto $-\infty$ sull'asse delle ascisse (pulsazioni)

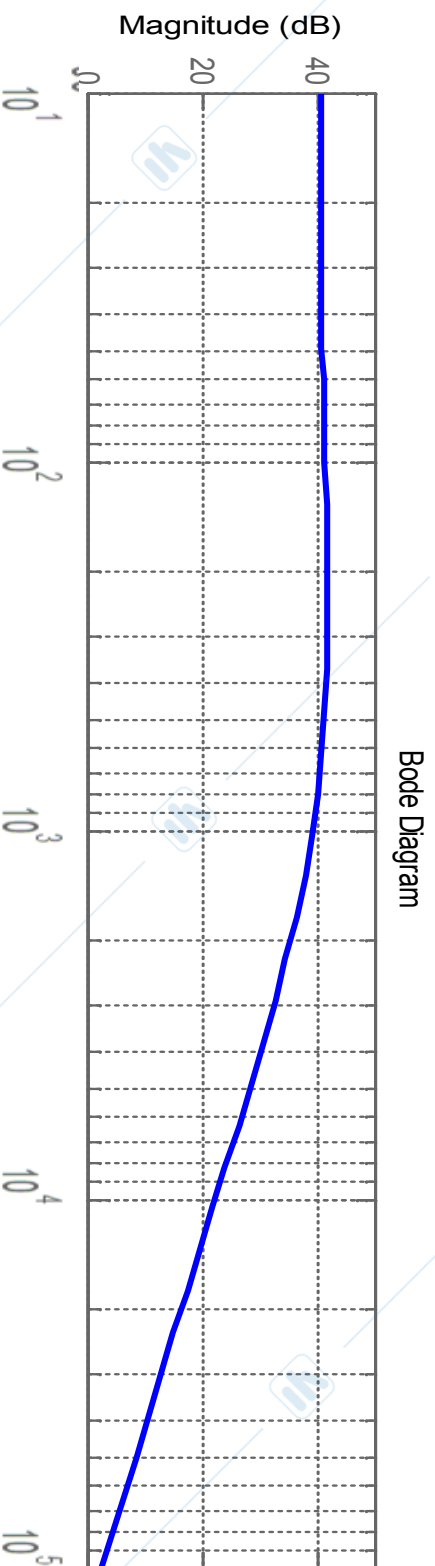


Diagrammi di Bode

- Per quanto riguarda il **diagramma del modulo**, sull'asse delle **ordinate** si rappresenta il logaritmo, in base 10, del modulo, moltiplicato per 20. Così facendo si rappresenta il valore del modulo della risposta in frequenza in **decibel (dB)**

$$|G(j\omega)| \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

I valori in decibel del modulo vengono rappresentati su una scala lineare



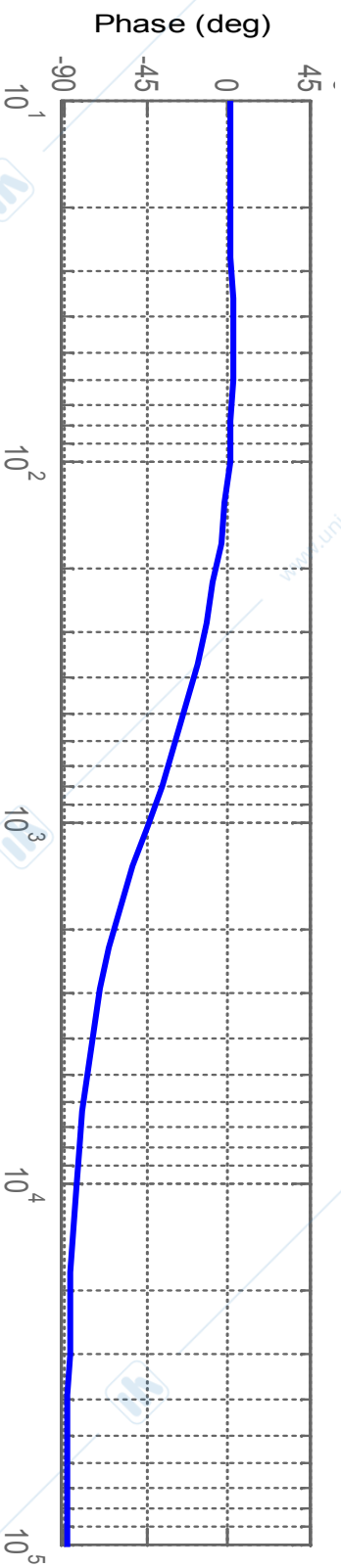
Il diagramma si traccia quindi su un'apposita ''carta semilogaritmica'': asse delle ascisse in scala logaritmica, asse delle ordinate in scala lineare



Diagrammi di Bode

- Per quanto riguarda il **diagramma della fase**, sull'asse delle **ordinate** si rappresenta la fase della risposta in frequenza in **gradi**. Anche questo diagramma andrà quindi tracciato su carta semilogaritmica.

I valori in gradi della fase vengono rappresentati su una scala lineare



Foglio standard A4 di "carta semilogaritmica"

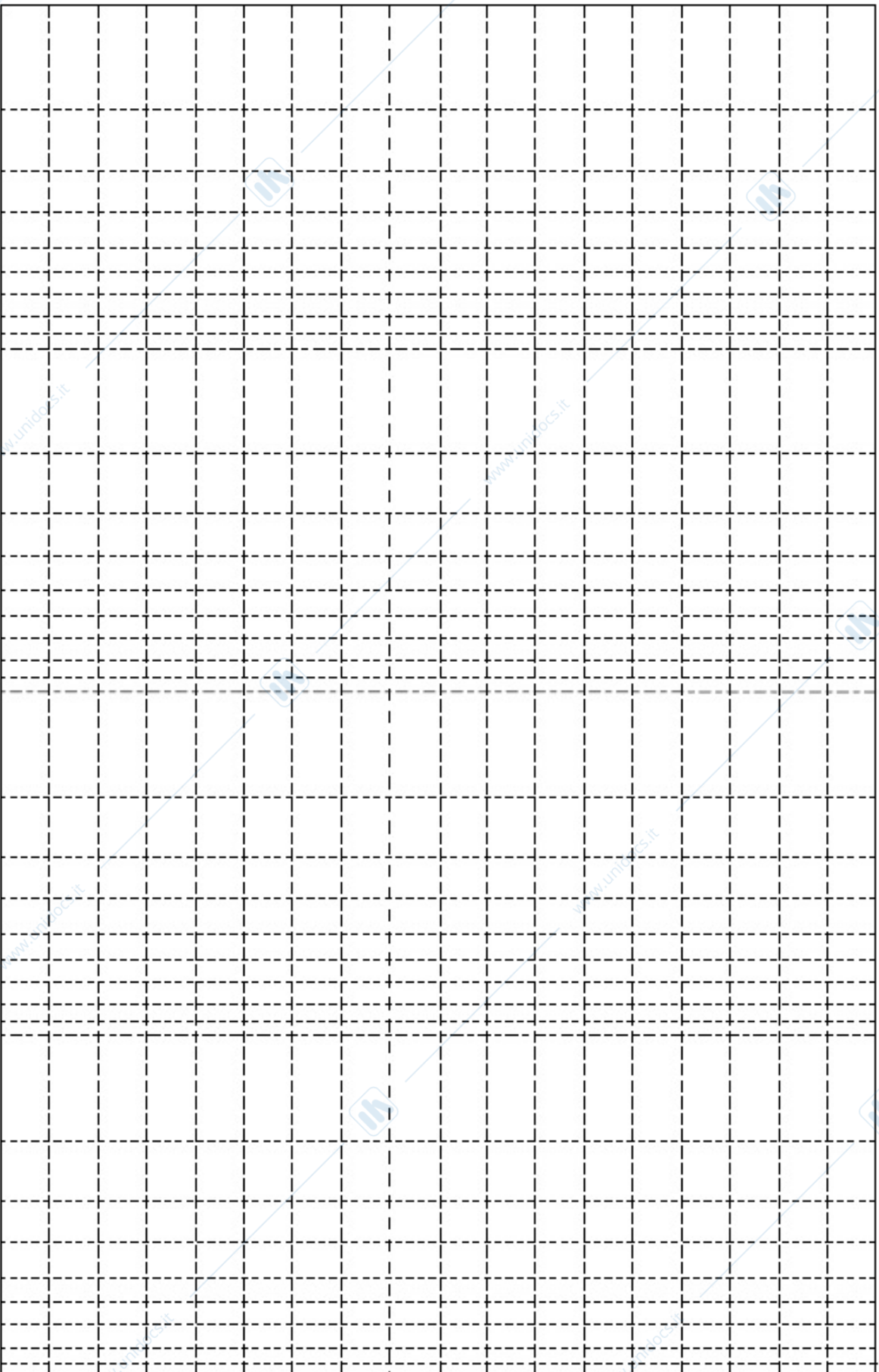




Diagramma di Bode del modulo

Mettiamo la FdT nella forma con guadagno, tipo e costanti di tempo:

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \prod_i (1 + \tau_i s)$$

$$\xrightarrow{s = j\omega}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\mu|}{|j\omega|^g} \prod_i |1 + \tau_i j\omega|$$

Modulo in Decibel (DB):

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |\mu| - 20g \log |j\omega| - \sum_i 20 \log |1 + j\omega T_i| + \sum_i 20 \log |1 + j\omega \tau_i|$$

#1

#2

#3.1

#3.2



Diagramma di Bode del modulo del guadagno

#1

$$|\mu|_{dB} = 20 \log |\mu|$$

Non c'è dipendenza da ω
il grafico è una **RETTA ORIZZONTALE**

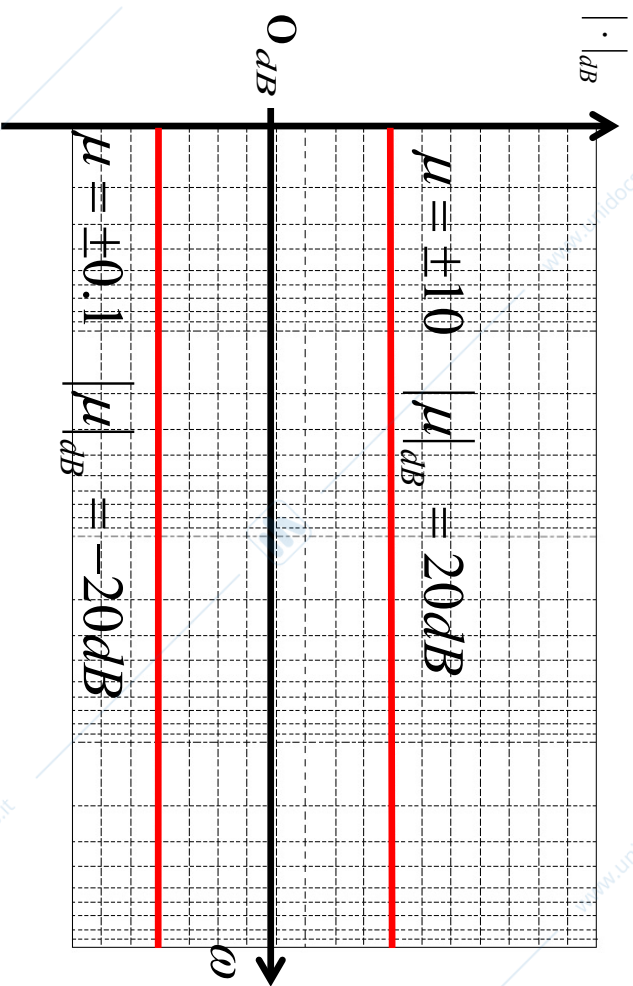
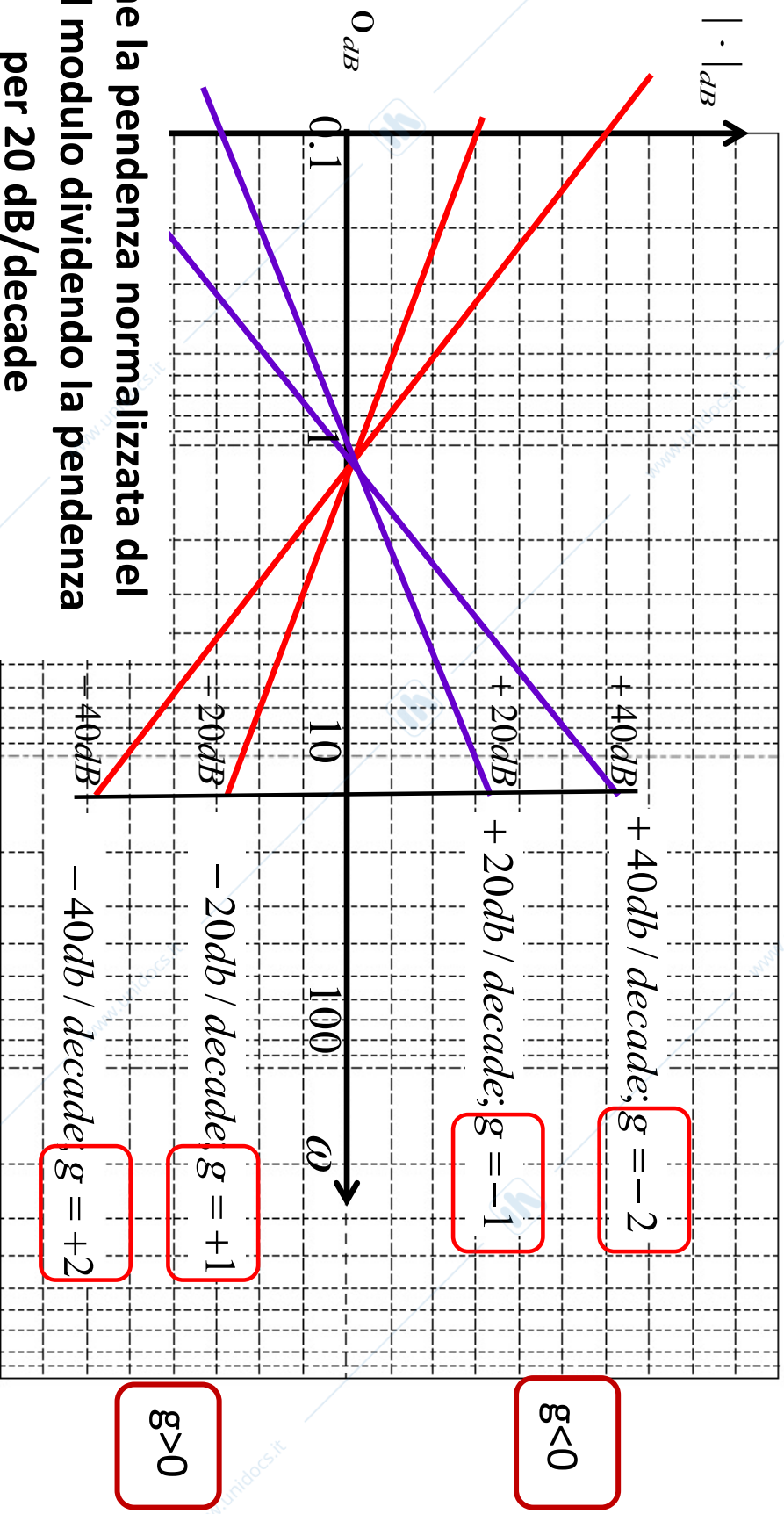


Diagramma di Bode del modulo di poli o zeri nell'origine

#2

$$-20g \log |j\omega| = -20g \log \omega$$

Con asse ascisse scala logaritmica la dipendenza da ω è lineare \rightarrow **RETTA** pendenza **-20g dB/decade** [per convenzione si dice **-g**] che taglia asse ascisse in $\omega=1$ Vg



Si ottiene la pendenza normalizzata del diagr. del modulo dividendo la pendenza per 20 dB/decade







Diagramma di Bode del modulo di un polo reale

#3.1

$$-20 \log |1 + j\omega T| \quad T \text{ reale}$$

andamento complesso in fz di ω . Si traccia un grafico semplificato che si chiama

DIAGRAMMA DI BODE ASINTOTICO

$$\begin{aligned} &= -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong \\ &\begin{cases} \omega^2 T^2 \ll 1 \Rightarrow \omega \ll \frac{1}{|T|} : & -20 \log \sqrt{1} = 0 \text{ dB} \\ \omega^2 T^2 \gg 1 \Rightarrow \omega \gg \frac{1}{|T|} : & -20 \log \omega |T| \end{cases} \end{aligned}$$

RETTA

$$-20 \log \omega |T| \cong -20 \log \omega - 20 \log |T| \Rightarrow \begin{cases} \text{pendenza } -20 \text{ dB / decade} \\ \omega |T| = 1 \Rightarrow | \cdot |_{\text{dB}} = 0 \text{ dB} \end{cases}$$



Diagramma di Bode del modulo di un polo reale

#3.1

Errore massimo tra
diagramma vero e
asintotico è per

$$\omega = \frac{1}{|T|} \rightarrow -20 \log \sqrt{1^2 + \omega^2 T^2} = -20 \log \sqrt{1^2 + 1^2} = -3 \text{ dB}$$

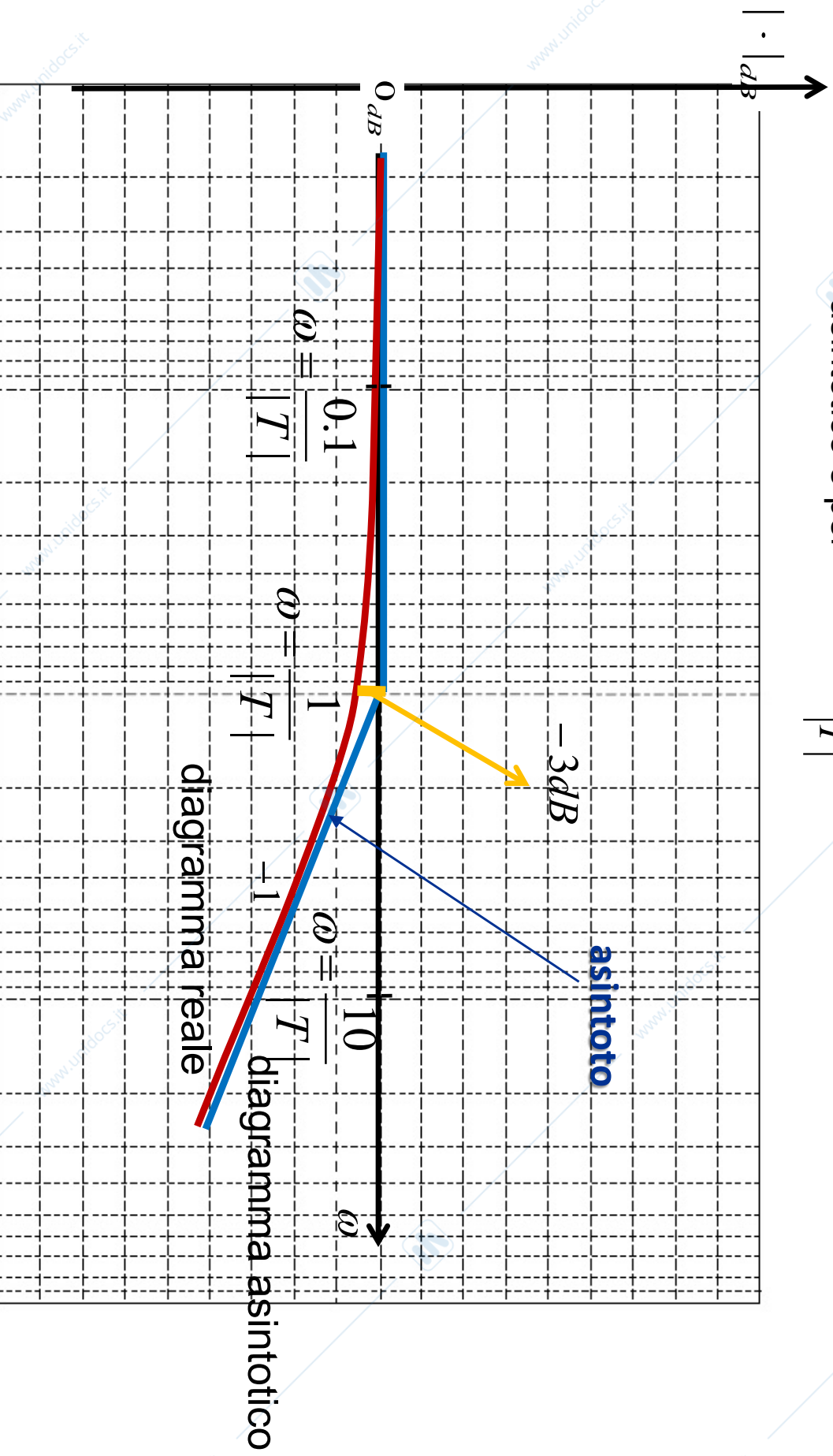




Diagramma di Bode del modulo di due poli coincidenti

#3.1

$$-40 \log|1 + j\omega T| \quad T \text{ reale}$$

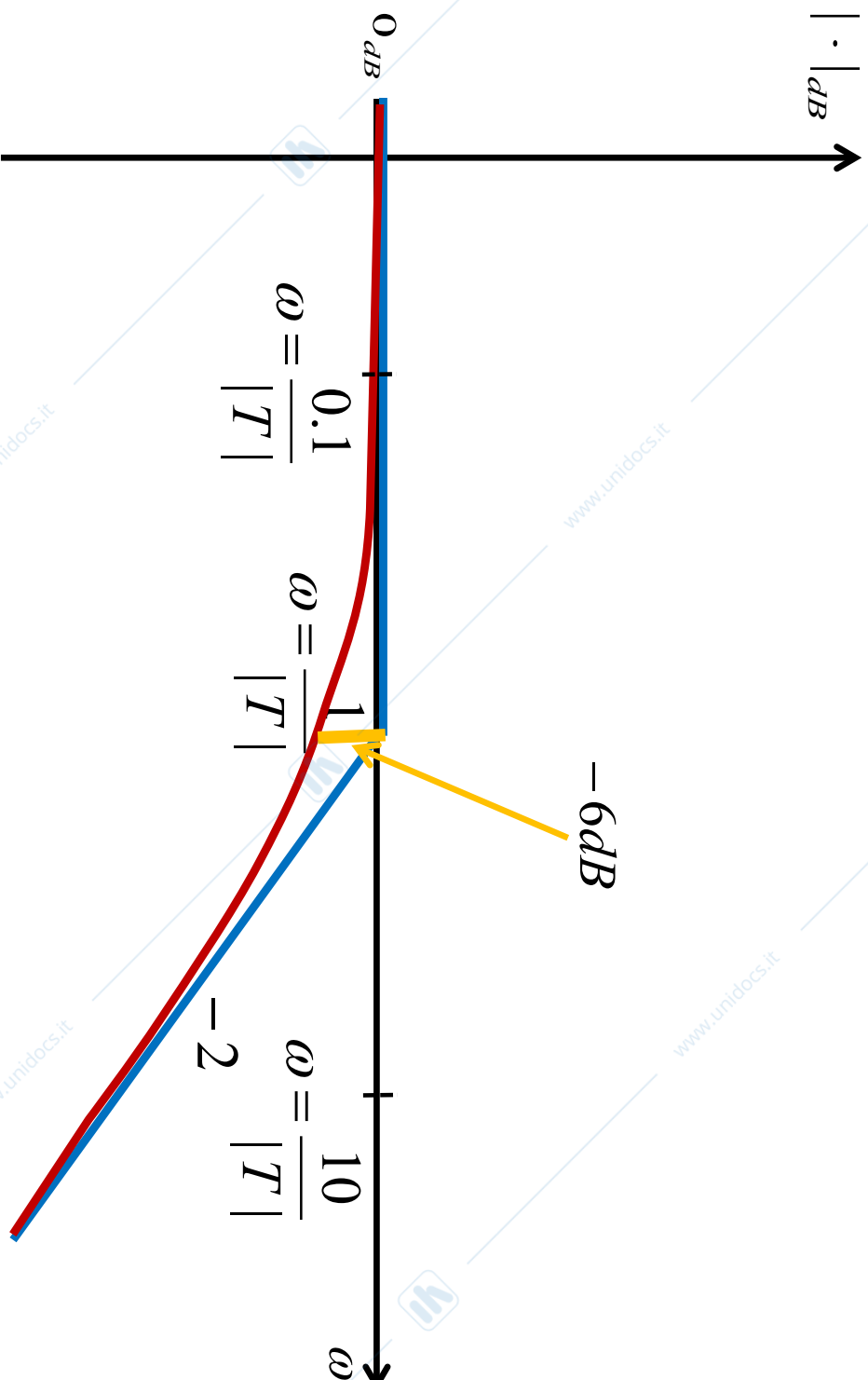


Diagramma di Bode del modulo di poli complessi coniugati

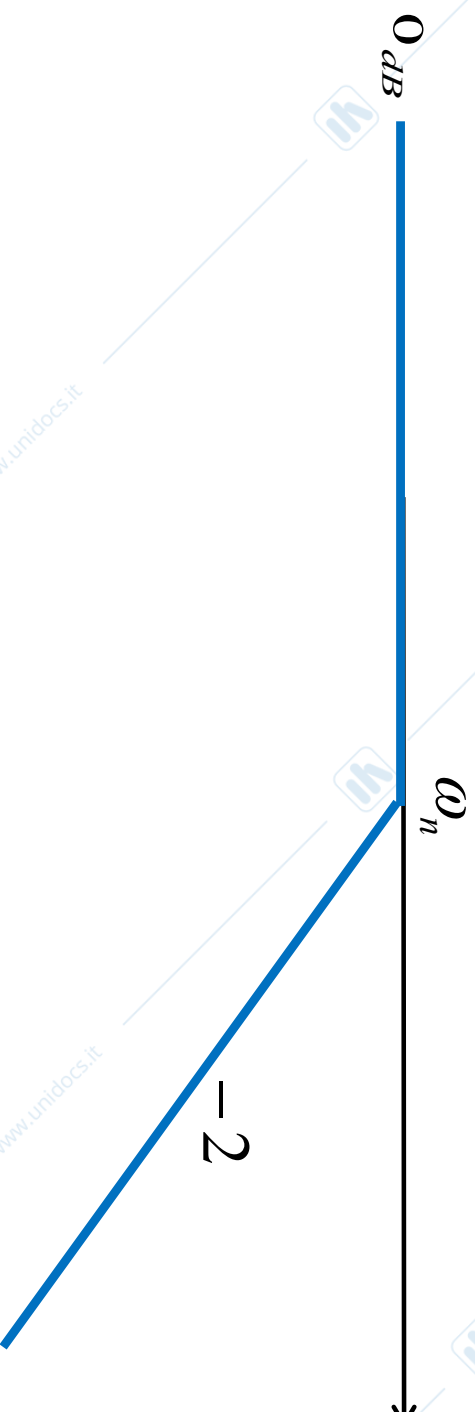
#3.1

$$-20 \log|1 + j\omega T| - 20 \log|1 + j\omega \bar{T}|$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1}$$

Andamento più complicato!!

Per il tracciamento dei diagrammi asintotici si introduce l'approssimazione di sostituire ai due poli c.c. due poli reali coincidenti, aventi parte reale uguale a $\pm\omega_n$

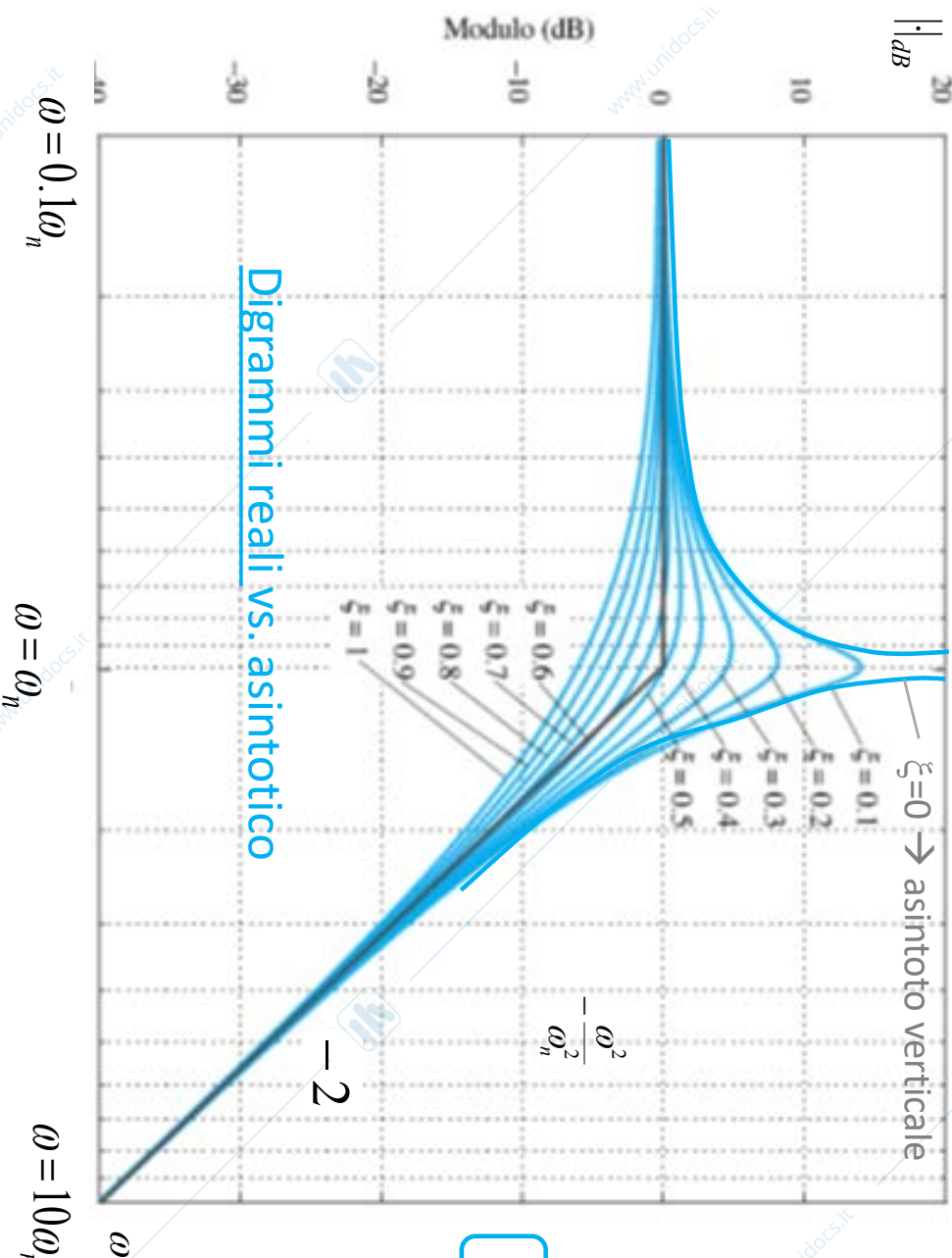


E' un'approssimazione un po' "grossolana"



Diagramma di Bode del modulo di poli complessi coniugati

Il diagramma reale è influenzato pesantemente dallo smorzamento ξ #3.1
L'approssimazione con il diag. asintotico è accettabile solo per valori relativamente grandi dello smorzamento, $0.5 \leq \xi \leq 1$



$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

e tutto rimane identico per $\xi < 0$

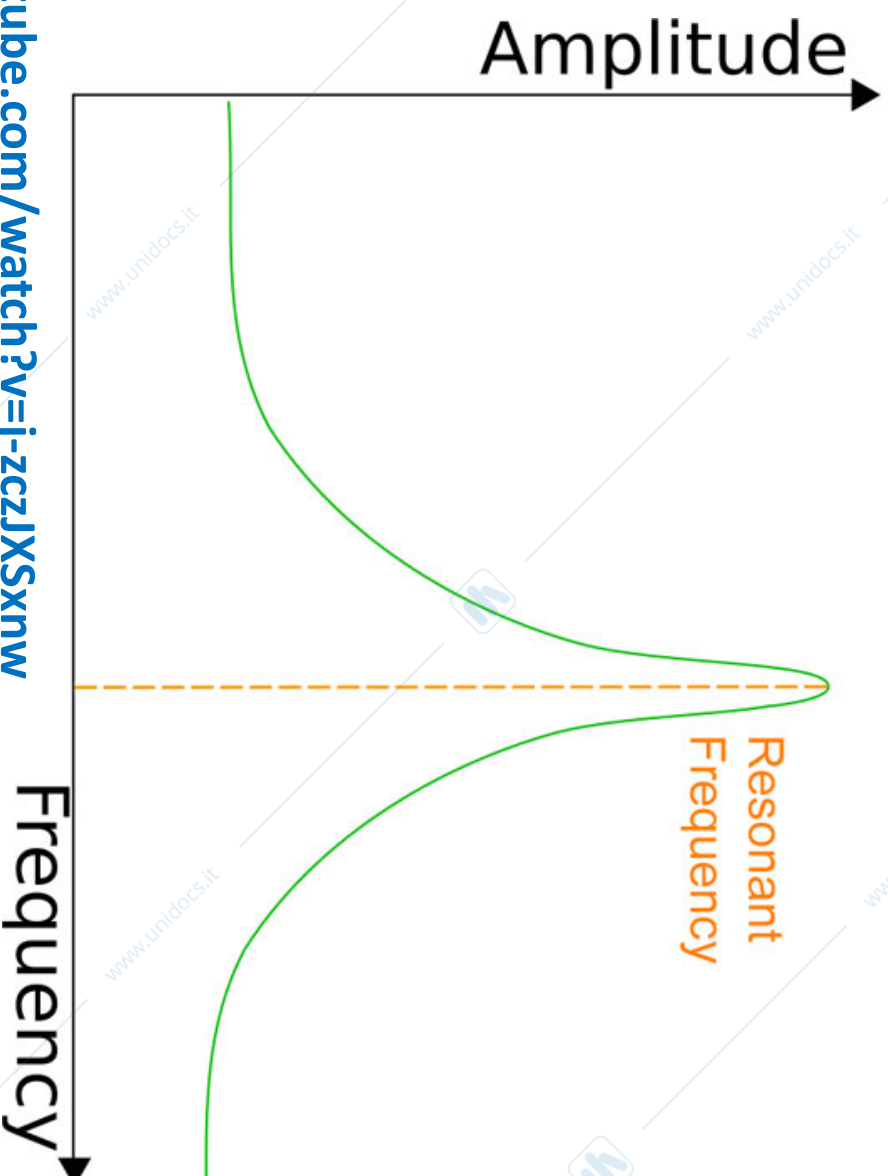
Per $\xi=0$ (poli immaginari) il diag. ha un asintoto verticale per $\omega=\omega_n$.

per $|\xi| \leq 0.7$ c'è un massimo nel diagramma reale del modulo, detto **picco di risonanza** ed è circa in corrispondenza di ω_n



Risonanza

Se un sistema che presenta risonanza viene alimentato da una sinusoidale con pulsazione uguale alla pulsazione di risonanza, produrrà in uscita una sinusoidale di ampiezza molto più elevata dell'ampiezza della sinusoidale in ingresso



<https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw>

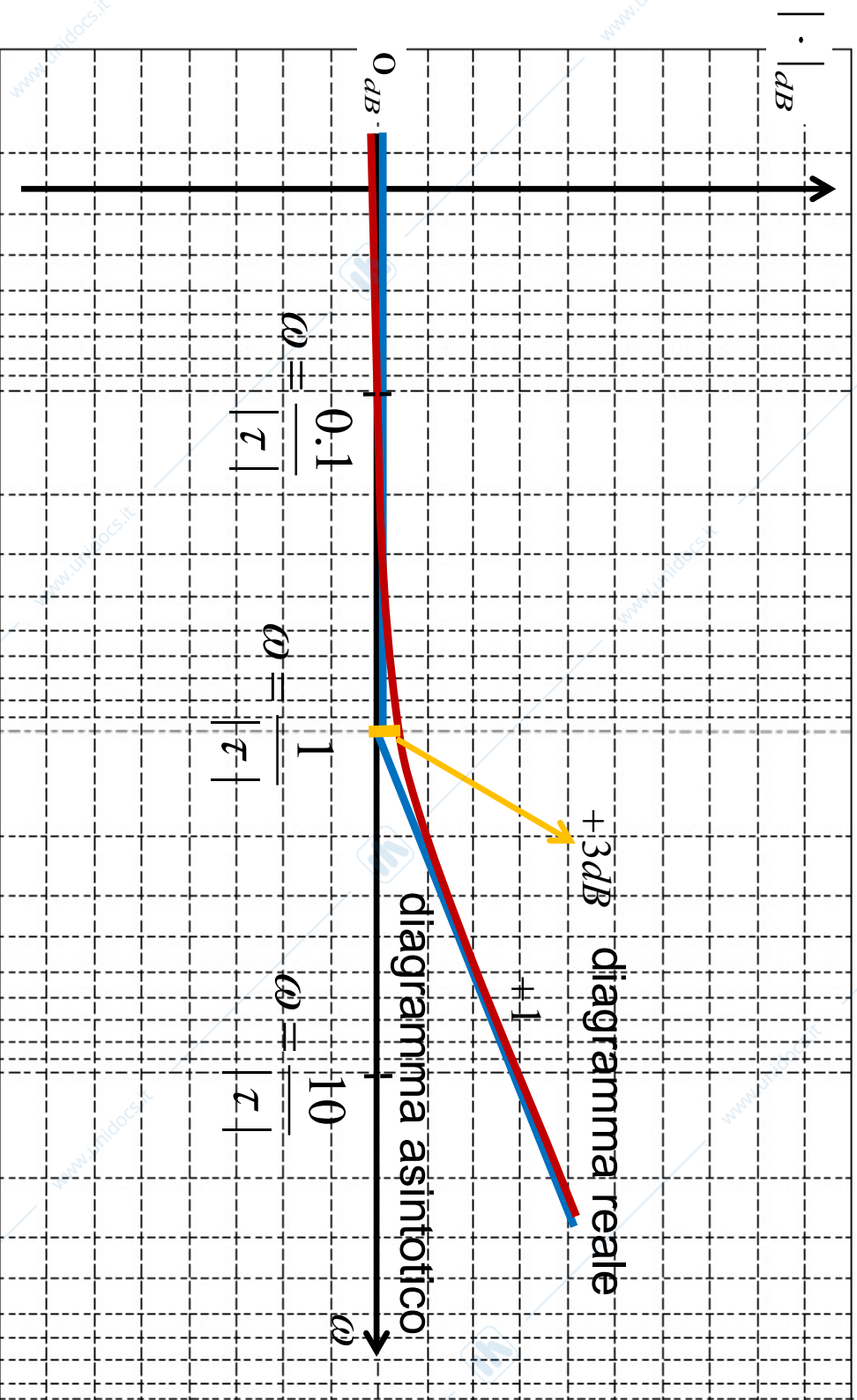


Diagramma di Bode del modulo di uno zero reale

#3.2

$$+20\log|1 + j\omega\tau| \quad T \text{ reale}$$

E' tutto "simmetrico" rispetto all'asse delle pulsazioni ω



Errore massimo
tra diagramma
vero e asintotico
è per

$$\omega = \frac{1}{|\tau|}$$

$$\Downarrow$$

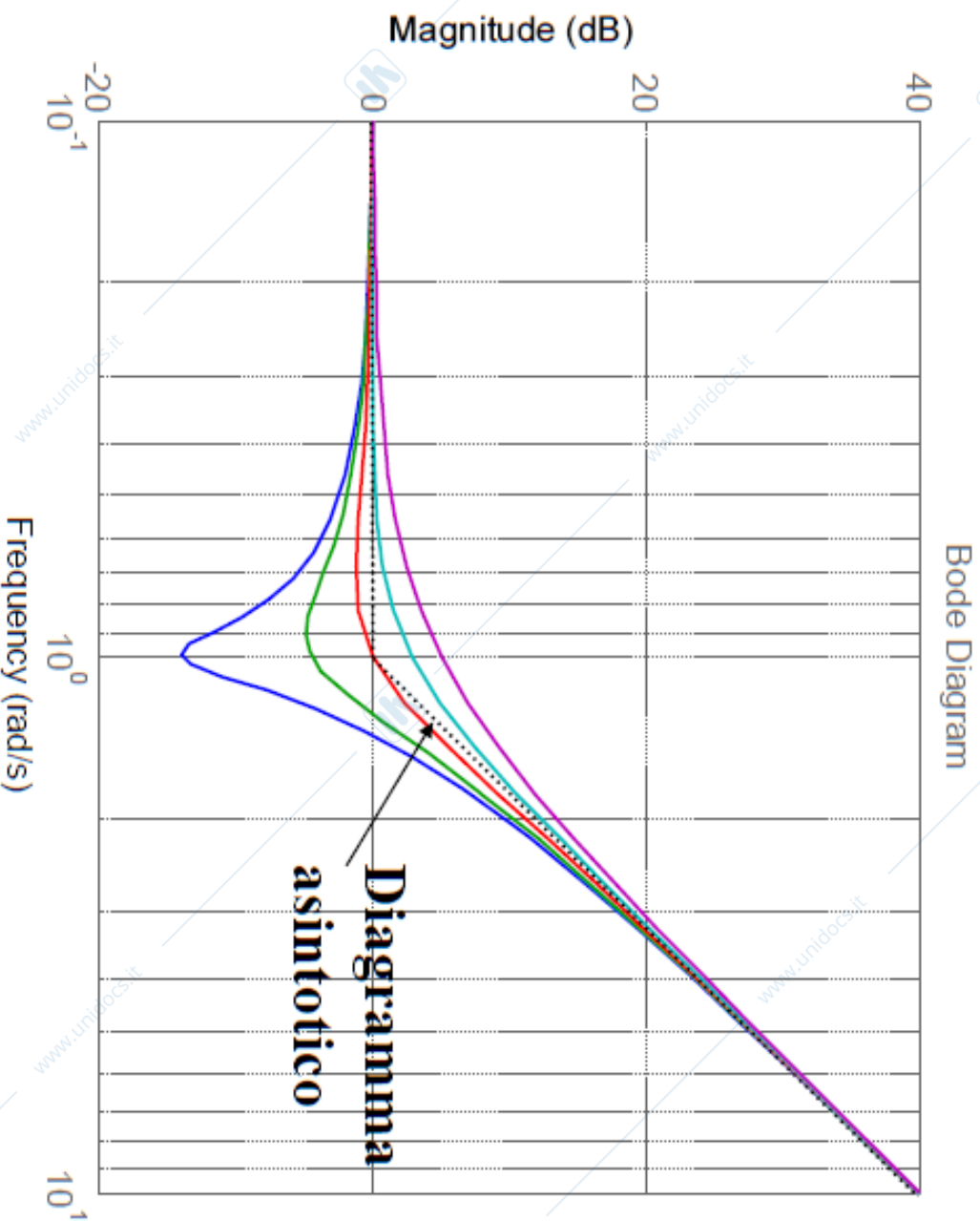
$$+20\log\sqrt{1^2 + 1^2} = +3dB!$$



Diagramma di Bode del modulo di zeri reali coincidenti o complessi coniugati

#3.2

Caso "simmetrico", rispetto all'asse delle pulsazioni ω , dei medesimi casi visti già per i poli



$$|\xi| = 0.1$$

$$|\xi| = 0.3$$

$$|\xi| = 0.5$$

$$|\xi| = 0.7$$

$$|\xi| = 0.9$$



Regole pratiche per il tracciamento del diagramma asintotico di Bode del modulo complessivo

Sommando, a pari pulsazione, i singoli contributi analizzati, si può ricavare il diagramma di Bode del modulo complessivo.

Esso è peraltro tracciabile fin dall'inizio applicando qualche regola semplice:

- pendenza iniziale **-g**
- il tratto iniziale o il suo prolungamento, passa per $\omega=1$ con valore $|\mu|_{dB}$
- cambi di pendenza in corrispondenza di poli e zeri:

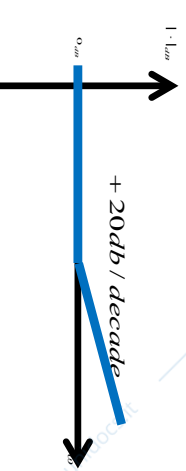
➤ polo \rightarrow **cambio di pendenza di -1**



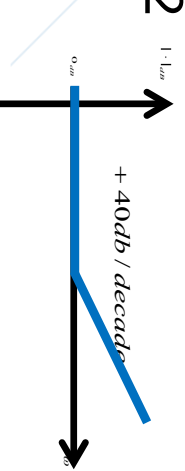
➤ poli cc \rightarrow **cambio di pendenza di -2**



➤ zero \rightarrow **cambio di pendenza di +1**



➤ zeri cc \rightarrow **cambio di pendenza di +2**



Esempio

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)} \rightarrow G(s) = -\frac{10}{25} \frac{(1-s)}{s(1+s)(1+\frac{8}{25}s+\frac{s^2}{25})}$$

Caratteristiche

$$g=1 \quad \mu = -\frac{10}{25}$$

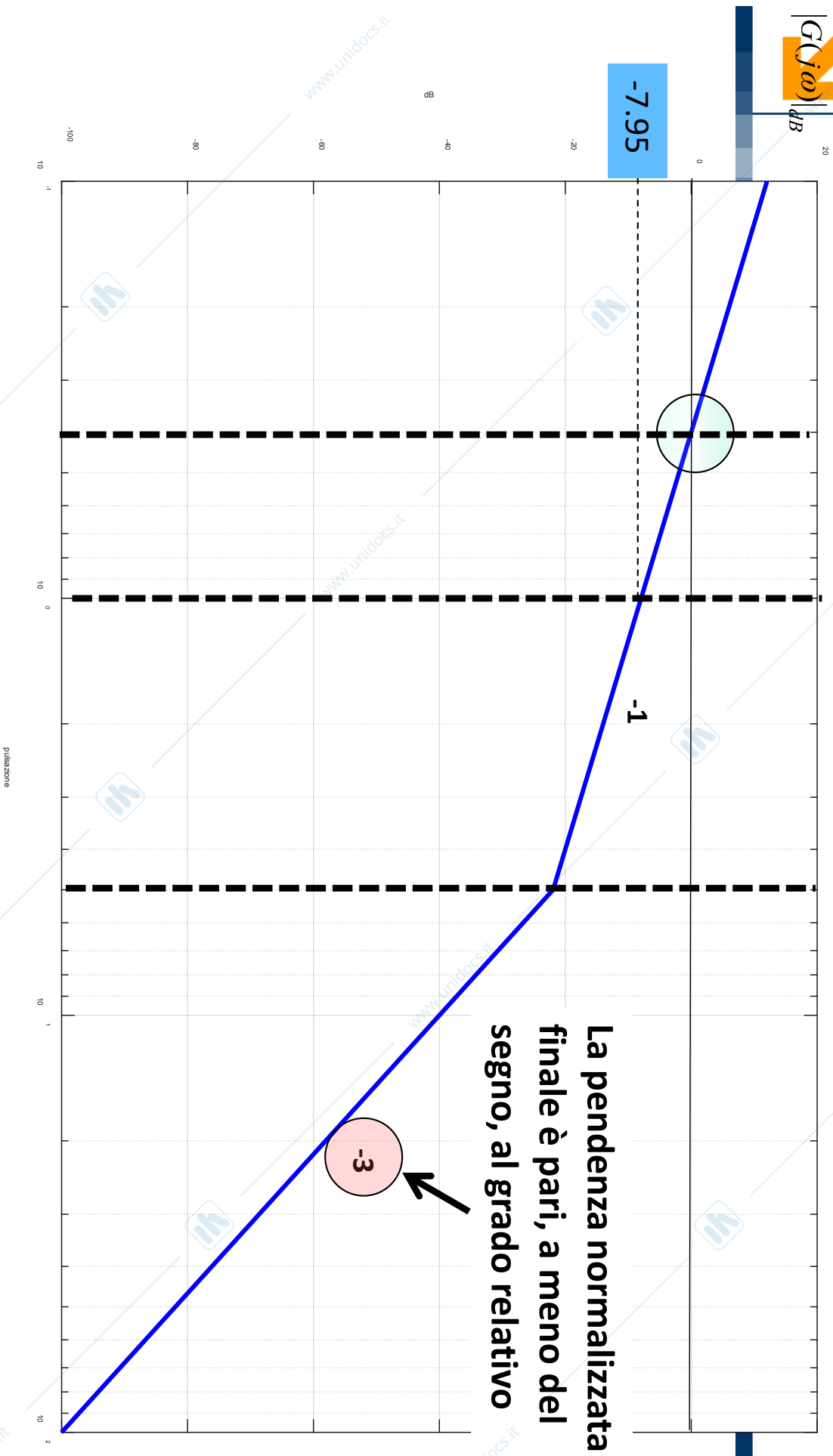
$$T = -1$$

$$\tau = 1$$

$$\omega_n^2 = 25 \Rightarrow \omega_n = 5 \quad \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{8}{25} \Rightarrow \xi = 0.8$$

Singolarità

$$\omega_{zero} = \frac{1}{|-1|} = 1 \text{ rad/s} \quad \omega_{polo} = \frac{1}{|1|} = 1 \text{ rad/s} \quad \omega_n = 5 \text{ rad/s}$$



La pendenza normalizzata finale è pari, a meno del segno, al grado relativo

pendenza iniziale -1 passa per $\omega = 1$ e ordinata $20 \log |\mu| = -7.95$

$\omega = 1 \rightarrow 2$ cambi di pendenza opposti $\pm 1 \rightarrow$ non cambia pendenza!

$\omega = 5 \rightarrow 1$ cambio di pendenza di -2



Il diagramma reale lo traccieremo qualitativamente a partire da quello asintotico considerando anche lo smorzamento (essendo $\xi=0.8>0.5$ non c'è picco di risonanza)

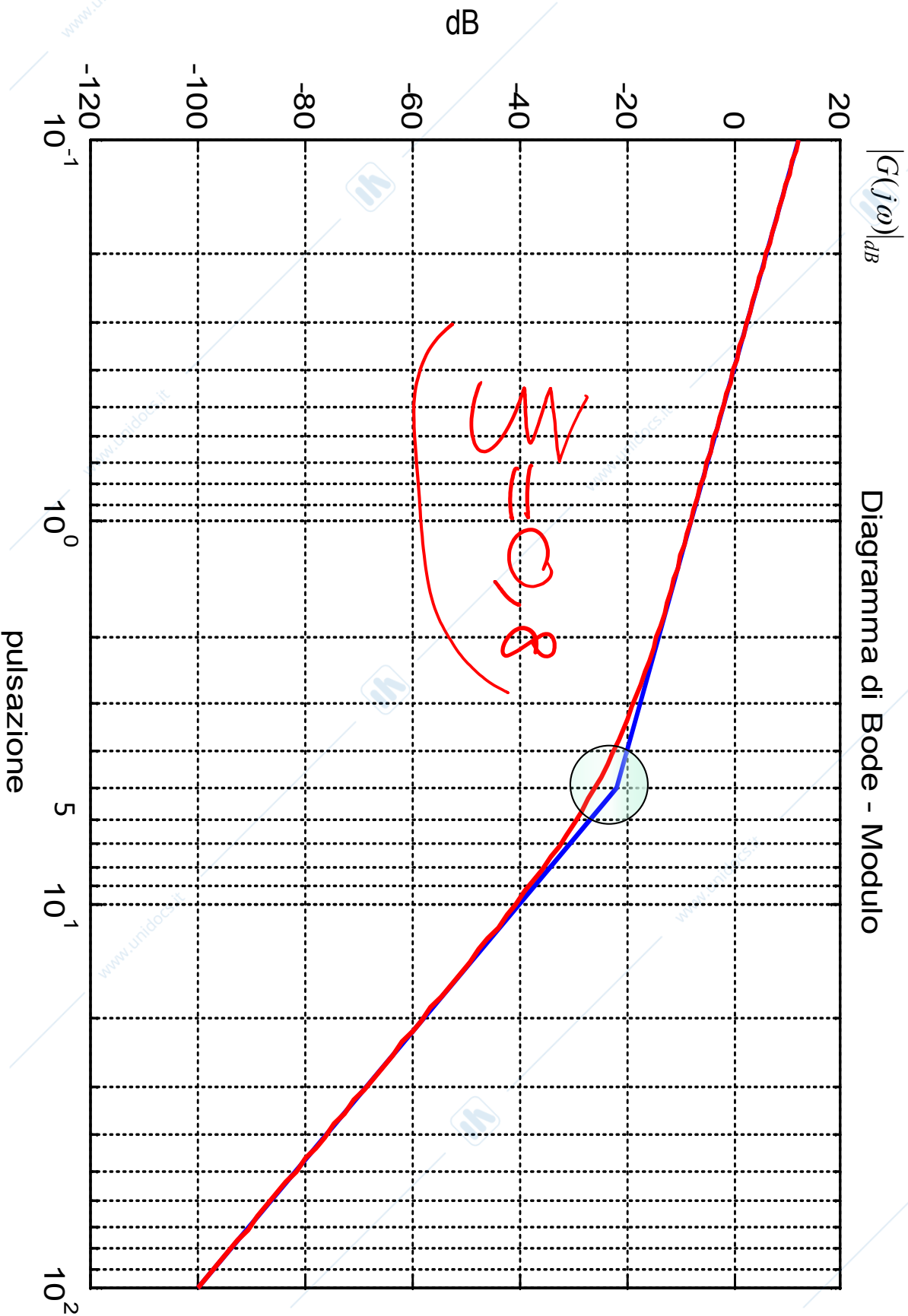




Diagramma di Bode della fase

Mettiamo la FdT nella forma con guadagno, tipo e costanti di tempo:

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \prod_i \frac{1}{(1 + T_i s)}$$

$$s = j\omega \rightarrow$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \left[\frac{\mu}{j\omega^g} \prod_i \frac{1}{(1 + T_i j\omega)} \right]$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \mu \quad \#1 \quad \angle(j\omega)^g \quad \#2 \quad - \sum_i \angle(1 + j\omega T_i) \quad \#3.1 \quad + \sum_i \angle(1 + j\omega \tau_i) \quad \#3.2$$

Di nuovo, sarà sufficiente analizzare il diagramma della fase dei singoli termini e poi sommarli



Diagramma di Bode della fase del guadagno

#1

$$\angle \mu = \begin{cases} 0^\circ & \mu > 0 \\ -180^\circ & \mu < 0 \text{ (oppure } 180^\circ) \end{cases}$$

Rette costanti

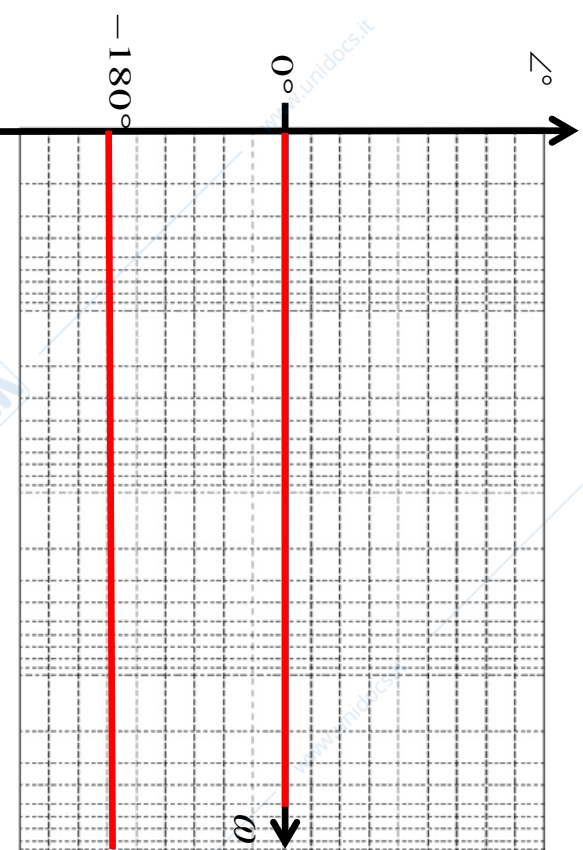




Diagramma di Bode della fase di poli o zeri nell'origine

#2

$$-\angle(j\omega)^g = -g\angle(j\omega) = -g90^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g > 0 \Rightarrow -90^\circ, -180^\circ, \dots \\ g < 0 \Rightarrow +90^\circ, +180^\circ, \dots \end{cases}$$

**Rette
costanti**

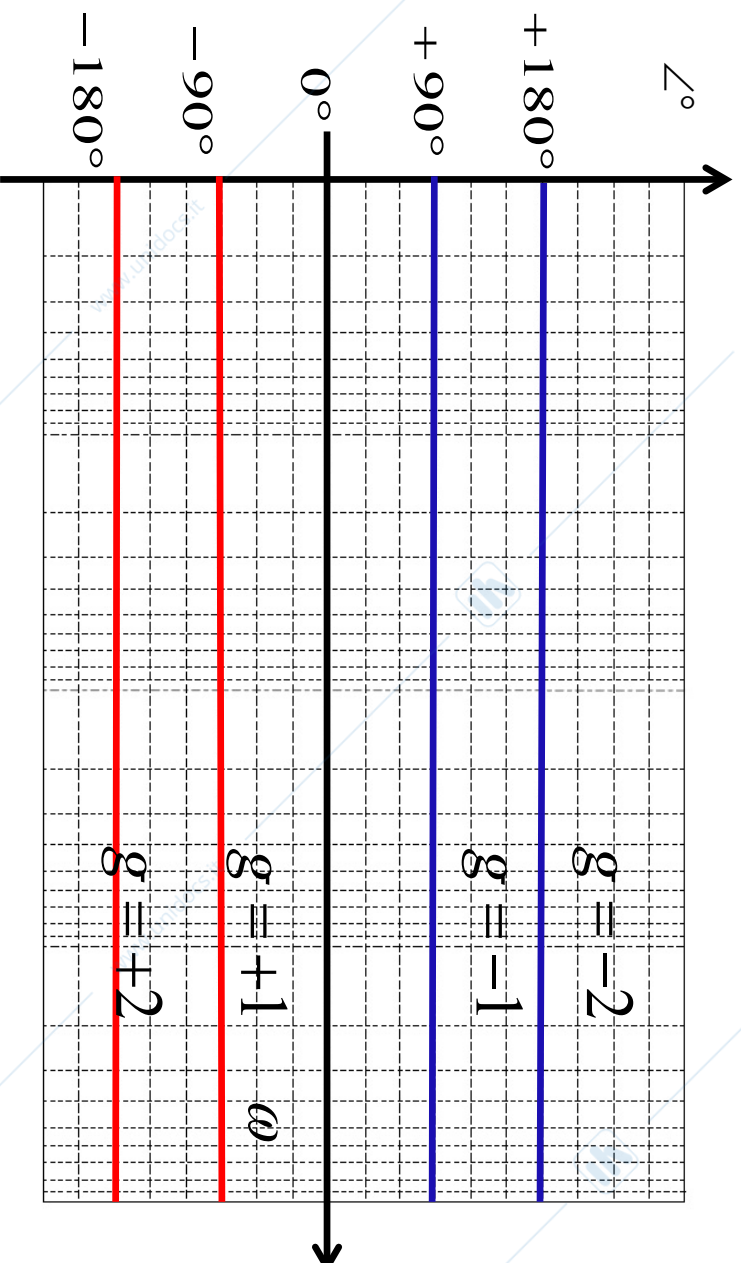




Diagramma di Bode della fase di un polo reale

#3.1

$$-\angle(1 + j\omega T) = -\text{atan}(\omega T)$$

Se $T > 0$

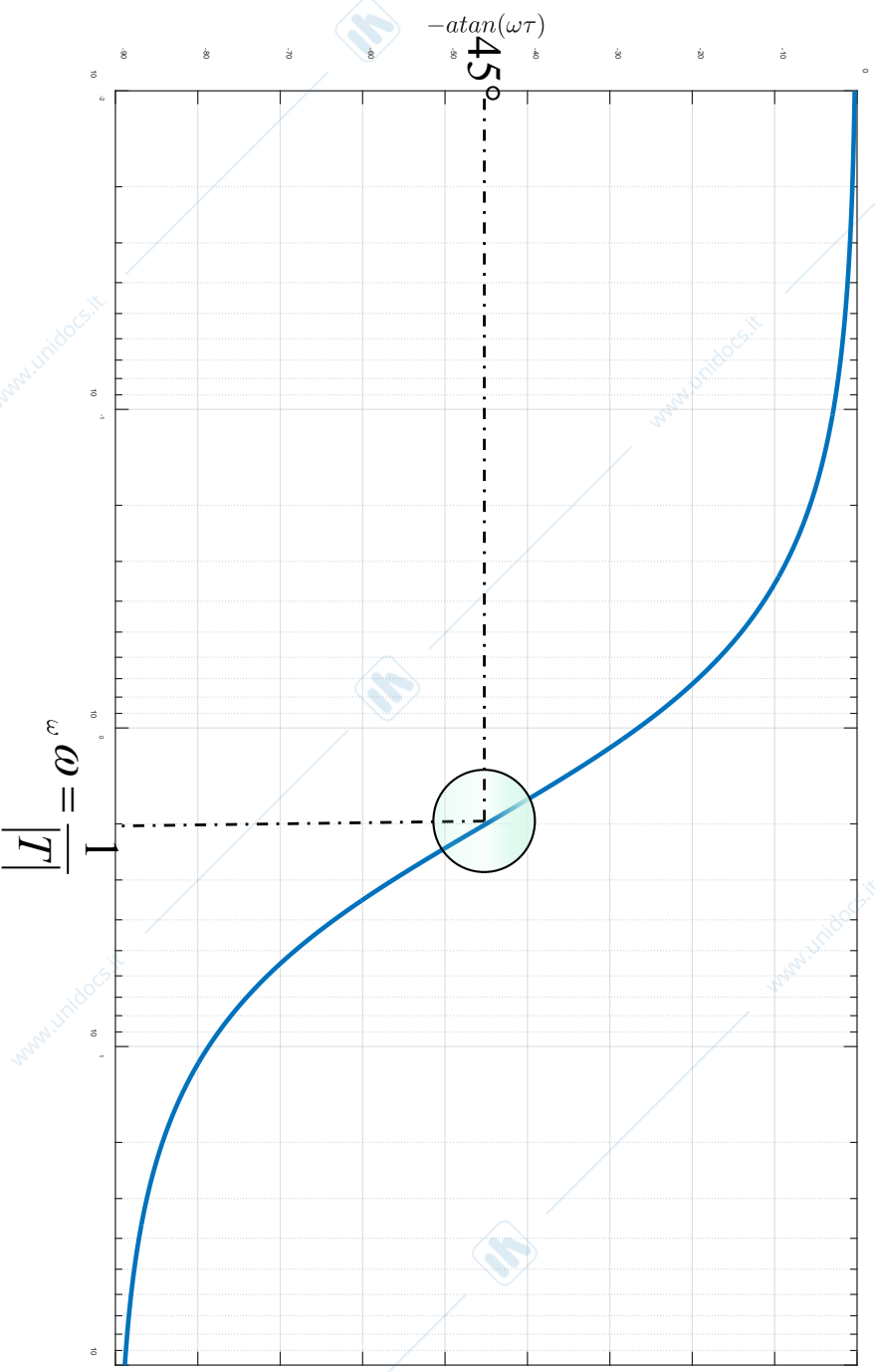


Diagramma di Bode della fase di un polo reale

Si osserva che:

#3.1 (#3.2)

$$-\angle(1 + j\omega T) \cong \begin{cases} -\angle(1) = 0^\circ & \omega \ll \frac{1}{|T|} \\ -90^\circ & \text{per } T > 0 \\ +90^\circ & \text{per } T < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \omega \ll \frac{1}{|T|} \\ \omega \gg \frac{1}{|T|} \end{matrix}$$

Per uno zero reale vale ovviamente tutto identico ma cambiato di segno!

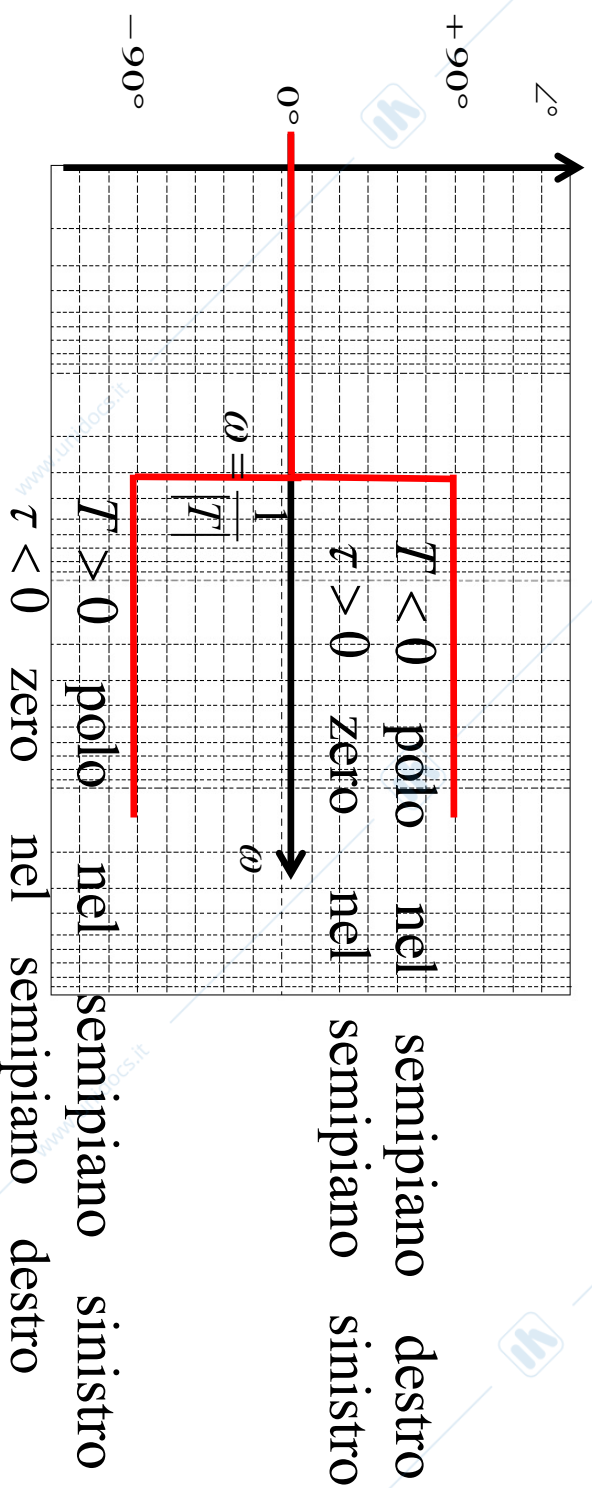




Diagramma di Bode della fase di una coppia di poli complessi coniugati

#3.1

$$G(s) = \mu \frac{1}{s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1}$$

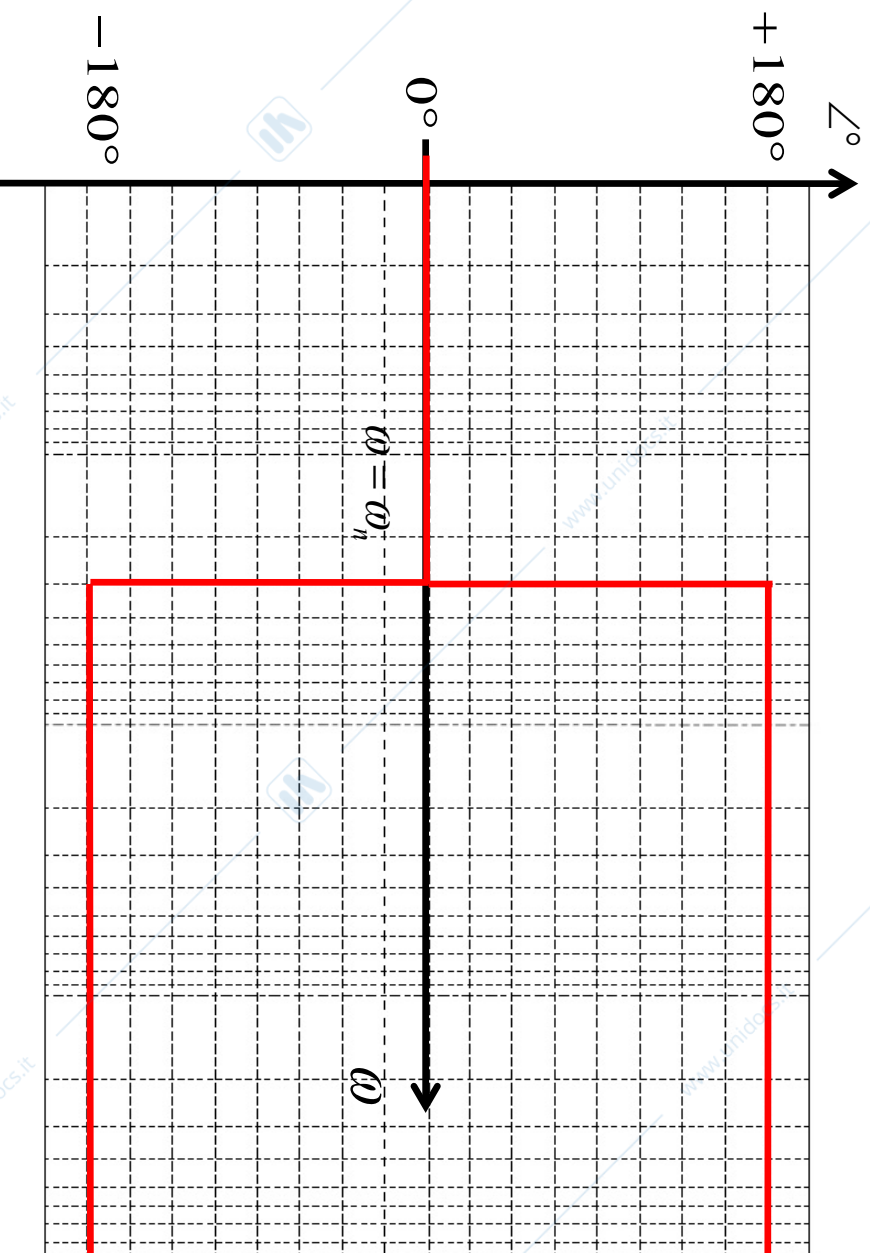
$$-\angle[(1 + j\omega T)(1 + j\omega \bar{T})] = -\text{atan} \left[1 + \frac{2\xi}{\omega_n} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right] = -\text{atan} \left[\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right]$$

Per $\xi > 0$ si ha

$$-\text{atan} \left[\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right] = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \ll \omega_n \\ -\pi/2 & \text{se } \omega \rightarrow \omega_n \\ -(0 + \pi) = -\pi & \text{se } \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

Diagramma di Bode della fase di una coppia di poli/zeri c.c.

#3.1 (#3.2)



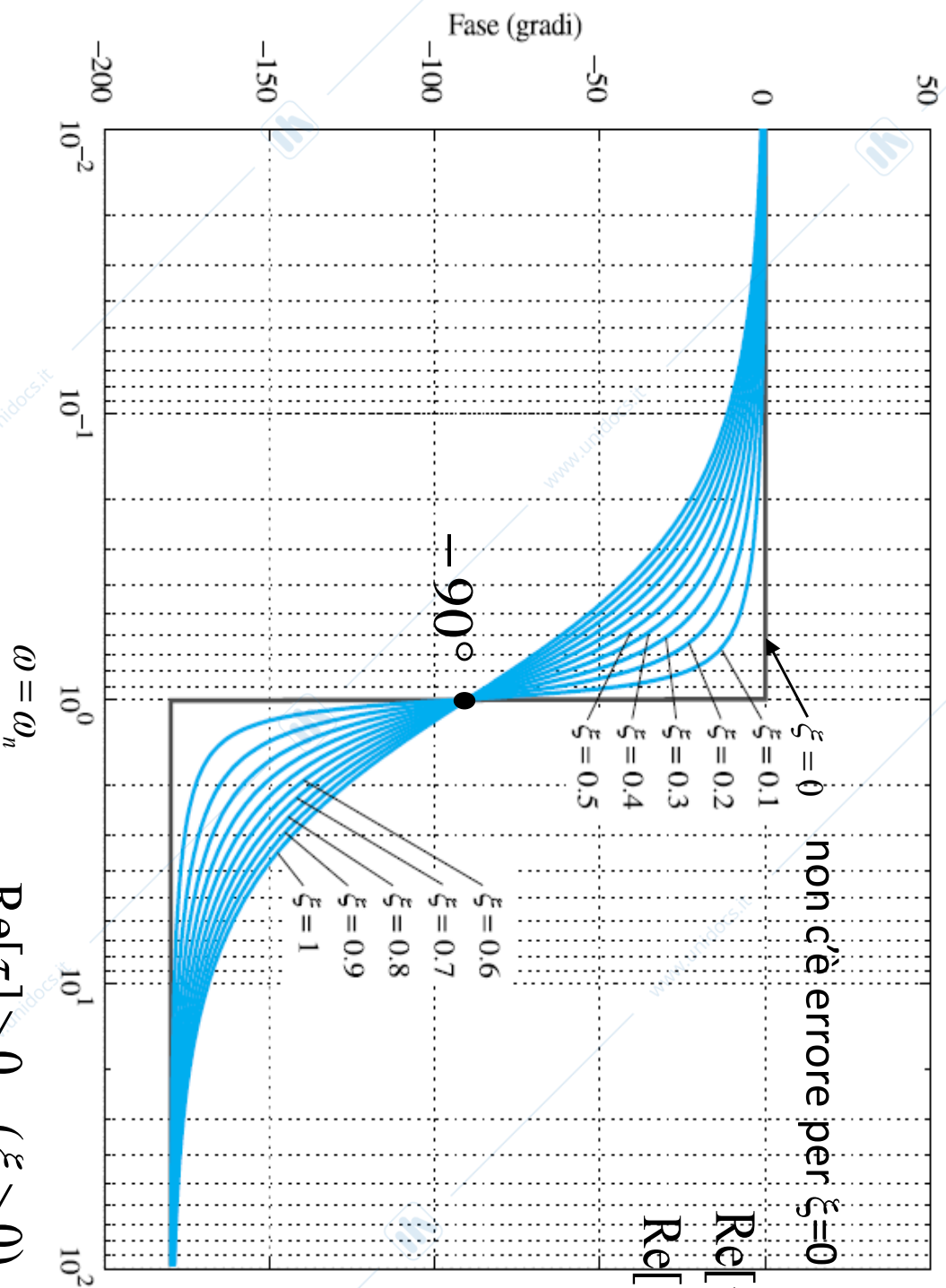
$$\begin{aligned} \text{Re}[T] < 0 & \quad (\xi < 0) \\ \text{Re}[\tau] > 0 & \quad (\xi > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re}[T] > 0 & \quad (\xi > 0) \\ \text{Re}[\tau] < 0 & \quad (\xi < 0) \end{aligned}$$



#3.1 (#3.2)

Il diagramma reale (o effettivo) dipenderà dallo smorzamento ξ :



non c'è errore per $\xi=0$

$\text{Re}[\tau] < 0$ ($\xi < 0$)

$\text{Re}[\tau] > 0$ ($\xi > 0$)

I medesimi grafici ma tra 0 e +180 gradi per $\omega = \omega_n$

$\text{Re}[\tau] > 0$ ($\xi > 0$)

$\text{Re}[\tau] < 0$ ($\xi < 0$)



Regole pratiche per il tracciamento del diagramma asintotico di Bode della fase complessiva

...Sommando, a pari pulsazione, i contributi analizzati, si può ricavare il diagramma di Bode della fase complessiva.

Esso è peraltro tracciabile fin dall'inizio applicando qualche regola semplice:

- fase iniziale (a sinistra delle pulsazioni di tutti gli zeri e poli non nulli) ($\angle \mu - 8 \cdot 90^\circ$)
- "salti" di $\pm 90^\circ$ in corrispondenza delle pulsazioni pari all'inverso del modulo delle costanti di tempo (ossia al modulo di poli e zeri):

$T > 0$ polo reale nel semipiano sinistro

-90°

$\tau < 0$ zero reale nel semipiano destro

$T < 0$ polo reale nel semipiano destro

$+90^\circ$

$\tau > 0$ zero reale nel semipiano sinistro

$\text{Re}[T] > 0$ poli complessi nel semipiano sinistro ($\xi > 0$)

-180°

$\text{Re}[\tau] < 0$ zeri complessi nel semipiano destro ($\xi < 0$)

$\text{Re}[T] < 0$ poli complessi nel semipiano destro ($\xi < 0$)

$+180^\circ$

$\text{Re}[\tau] > 0$ zeri complessi nel semipiano sinistro ($\xi > 0$)

Il diagramma asintotico della fase è costante a tratti

Esempio

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)} \rightarrow G(s) = -\frac{10}{25} \frac{(1-s)}{s(1+s)(1+\frac{8}{25}s+\frac{s^2}{25})}$$

Caratteristiche

$$g = 1 \quad \mu = -\frac{10}{25}$$

$$T = 1$$

$$\tau = -1$$

$$\omega_n^2 = 25 \Rightarrow \omega_n = 5 \quad \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{8}{25} \Rightarrow \xi = 0.8$$

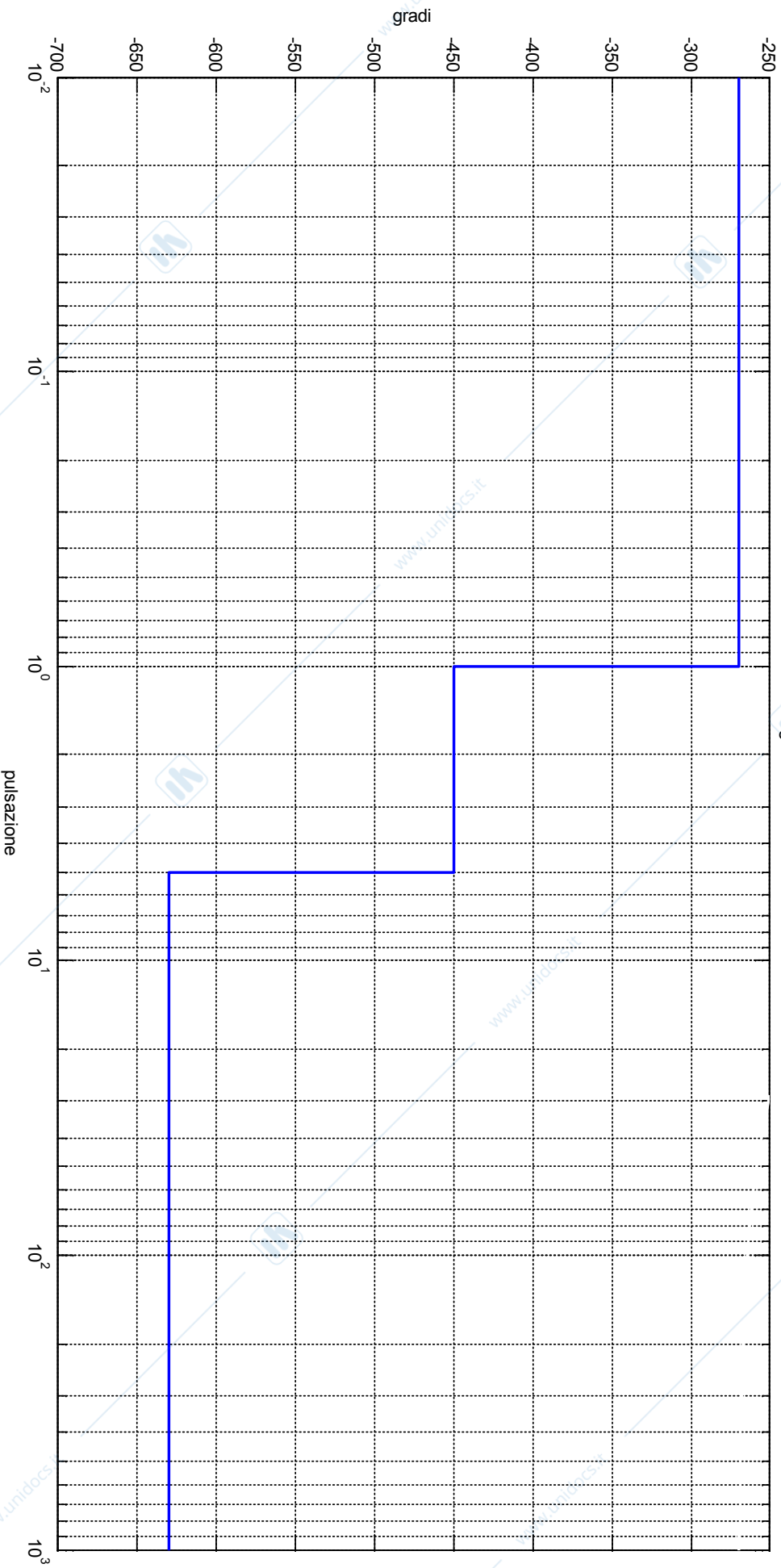
Singolarità

$$\omega_{zero} = \frac{1}{|-1|} = 1 \text{ rad/s} \quad \omega_{polo} = \frac{1}{|1|} = 1 \text{ rad/s} \quad \omega_n = 5 \text{ rad/s}$$



Esempio

Diagramma di Bode - Fase



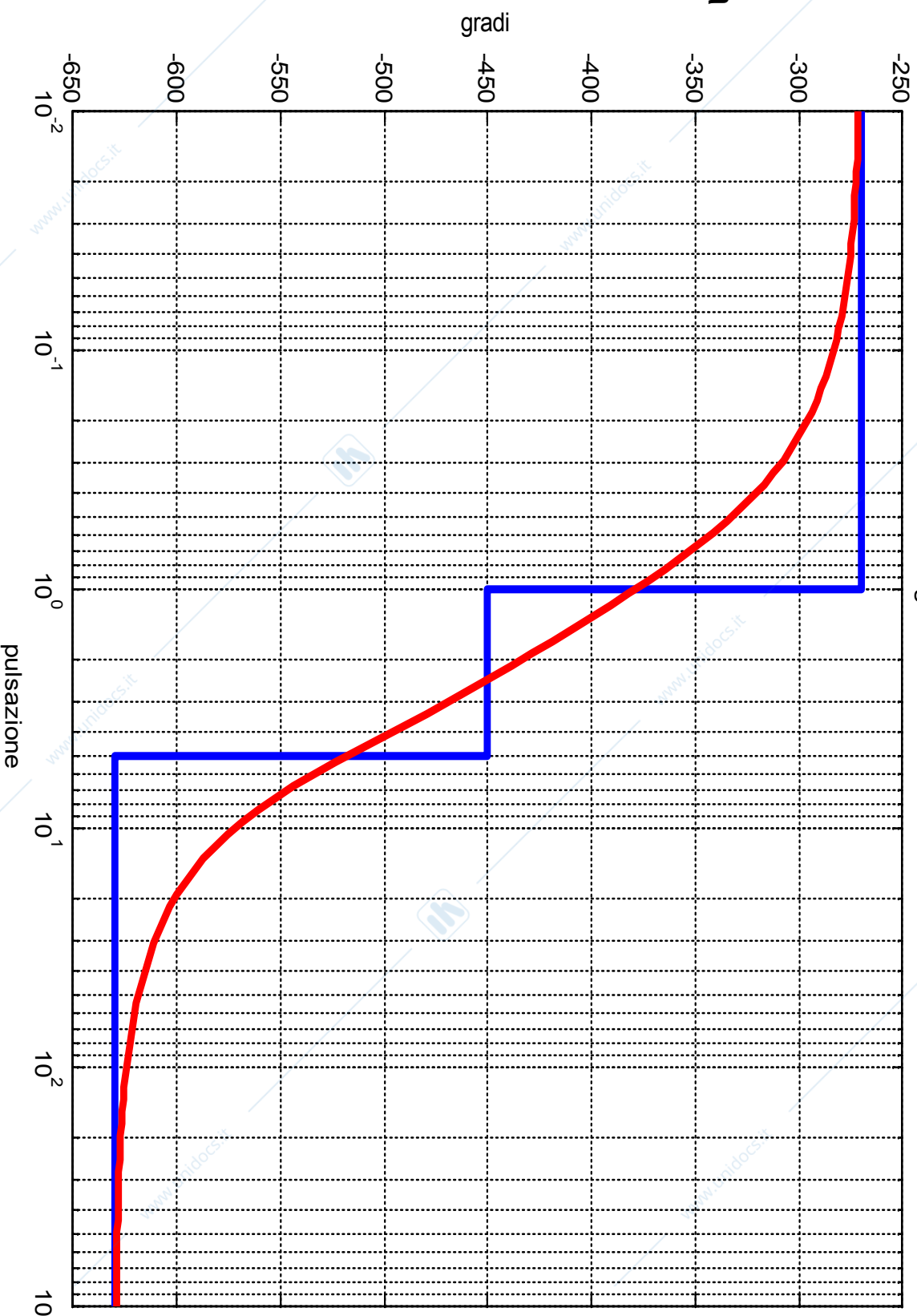
per $\omega < 1$: $\angle \mu - g 90^\circ = -180^\circ - 90^\circ = -270^\circ$

per $\omega = 1$: $2(-90^\circ) = -180^\circ$

per $\omega = 5$: -180°

Il diagramma reale della fase si traccia in modo qualitativo, a partire da quello asintotico, considerando anche lo smorzamento

Diagramma di Bode - Fase

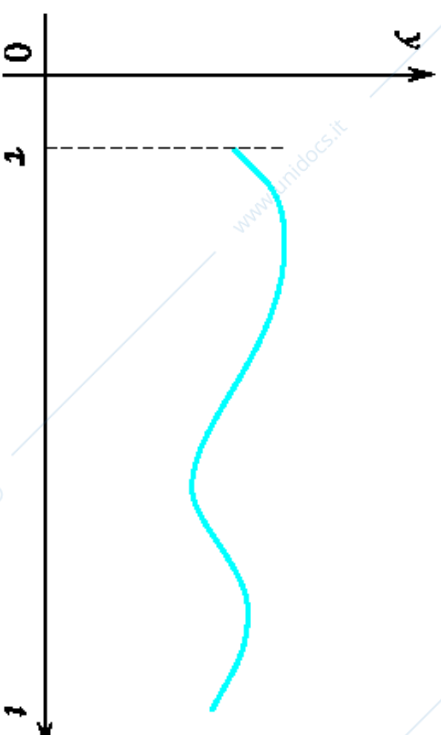
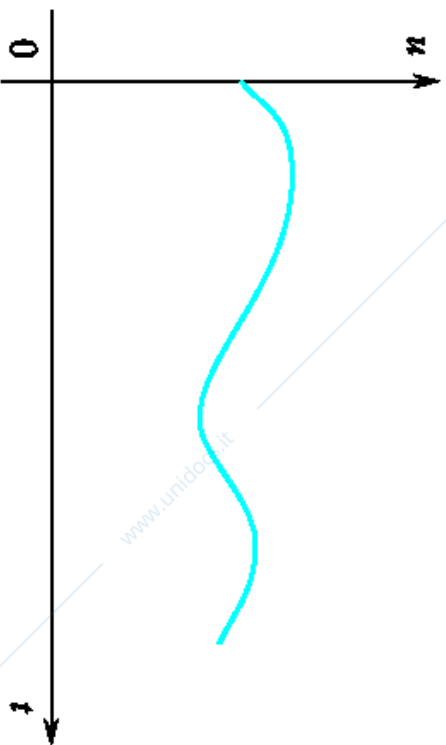




Ritardo di tempo: definizione

Ritardo di tempo

$$y(t) = u(t - \tau) \quad , \quad \tau > 0$$



Relazione ingresso-uscita che descrive il comportamento solo per

$$t \geq \tau$$

Si può avere l'ingresso che agisce con ritardo o l'uscita che viene acquisita con ritardo



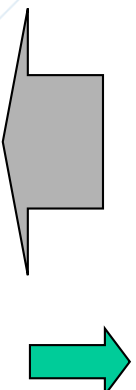
Ritardo di tempo: FdT

Visto che il ritardo di tempo

$$y(t) = u(t - \tau) \quad , \quad \tau > 0$$

è un sistema lineare e stazionario si può provare a definirne una funzione di trasferimento

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[u(t - \tau)] = e^{-\tau s} U(s)$$



Proprietà di traslazione nel dominio del tempo

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-\tau s}$$

Funzione irrazionale per la quale non ha senso parlare di poli o zeri

Valgono le regole di elaborazione degli schemi a blocchi



Ritardo di tempo: Risposta in frequenza

Si può provare a definire una risposta in frequenza come

$$G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}, \quad \omega \geq 0$$

per la quale si ha

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 1 \\ \arg G(j\omega) &= -\omega\tau \end{aligned}$$



Radianti!

Ritardo di tempo: Risposta in frequenza -2

Per il ritardo di tempo

$$y(t) = u(t - \tau) \quad , \quad t \geq \tau$$

con ingresso

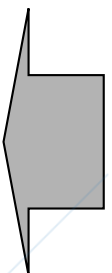
$$u(t) = U \sin(\omega_0 t)$$

risulta

$$y(t) = U \sin(\omega_0 t - \omega_0 \tau) \quad , \quad t \geq \tau$$

Applicando formalmente il teorema fondamentale della rif si avrebbe

$$y(t) = U |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg G(j\omega_0)) = U \sin(\omega_0 t - \omega_0 \tau) \quad , \quad t \rightarrow +\infty$$



Il teorema fondamentale della risposta in frequenza
vale anche per il ritardo di tempo



Valgono anche i
teoremi sui
segnali periodici
e no



Sistemi con ritardo di tempo

$$G(s) = e^{-s\tau} \Rightarrow G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$$
$$\begin{cases} |G(j\omega)| = 1 \\ \angle G(j\omega) = -\omega\tau \end{cases}$$

Diagrammi di Bode:



Diagramma di Bode del modulo

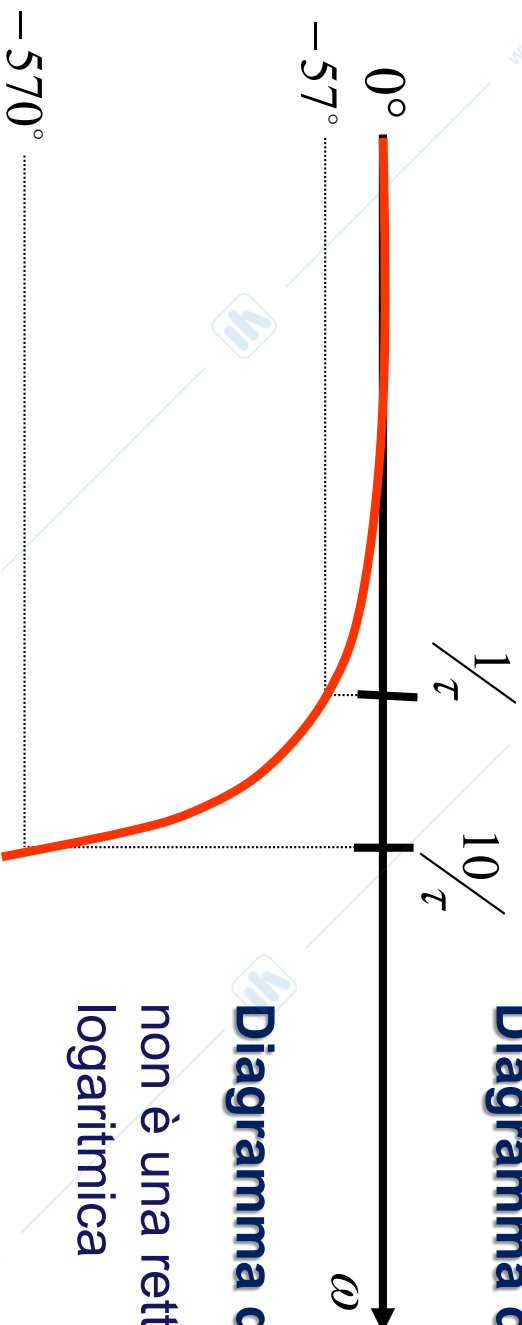


Diagramma di Bode della fase

non è una retta perchè ω è in scala
logaritmica



Sistemi a fase minima

$$G_1(s) = 10 \frac{1+s}{1+10s}$$

$$G_2(s) = 10 \frac{1-s}{1+10s}$$

Le r.i.f. associate a queste FdT hanno diagramma di Bode del modulo identico ma diagramma di fase diverso!

Se però restringiamo l'insieme delle funzioni di trasferimento a quelle di sistemi **asintoticamente stabili** che godono delle seguenti proprietà:

- **il guadagno è positivo**
- **tutti gli zeri hanno parte reale ≤ 0**
- **non ci sono ritardi puri**

allora un diagramma del modulo è associato ad una e una sola funzione di trasferimento.

Ne consegue che, **dato il diagramma del modulo, è possibile ricavare univocamente il diagramma della fase**

I sistemi che godono di queste proprietà si chiamano **sistemi a fase minima. Perché??**



Sistemi a fase (o a sfasamento) minima/o

Si chiamano così perché, dato un diagramma del modulo, tra tutti i sistemi asintoticamente stabili la cui risposta in frequenza ha quel diagramma del modulo, quella a fase minima ha il minimo sfasamento negativo (fase di minimo modulo) ad ogni pulsazione

fase minima

$$G_1(s) = 10 \frac{1+s}{1+10s}$$

Diagramma di Bode - Modulo

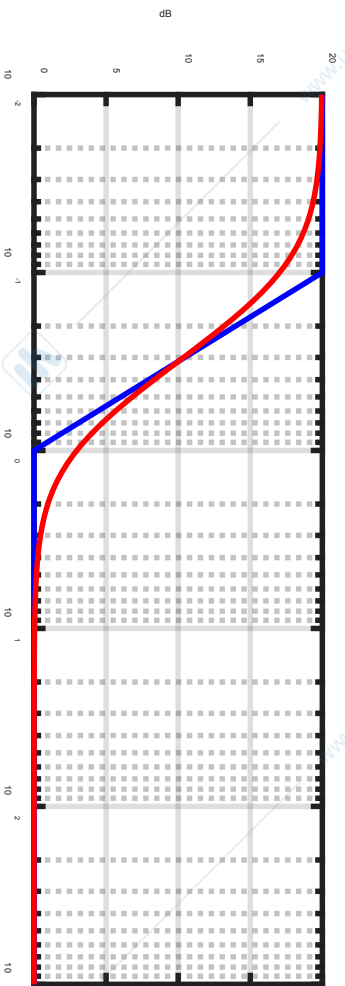
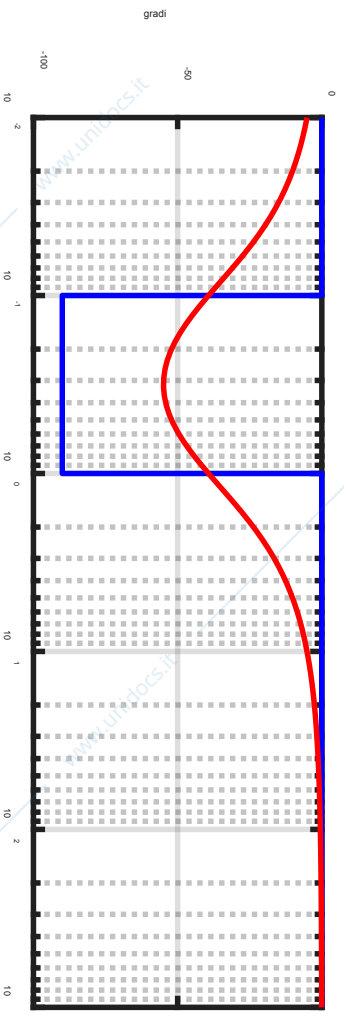


Diagramma di Bode - Fase



fase non minima

$$G_2(s) = 10 \frac{1-s}{1+10s}$$

Diagramma di Bode - Modulo

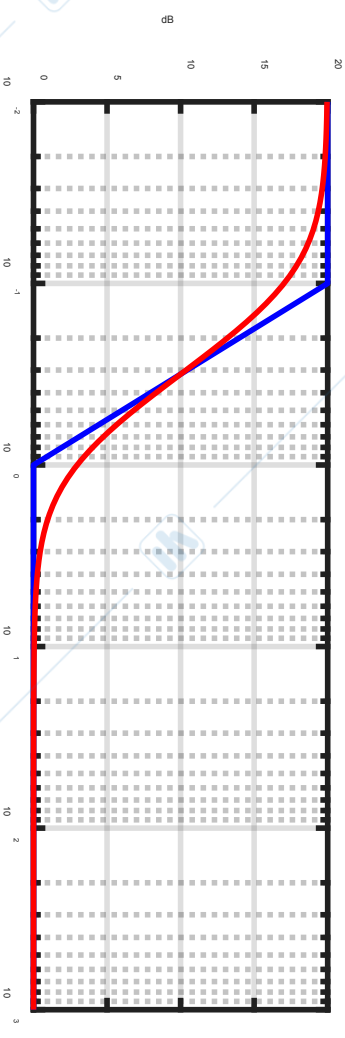
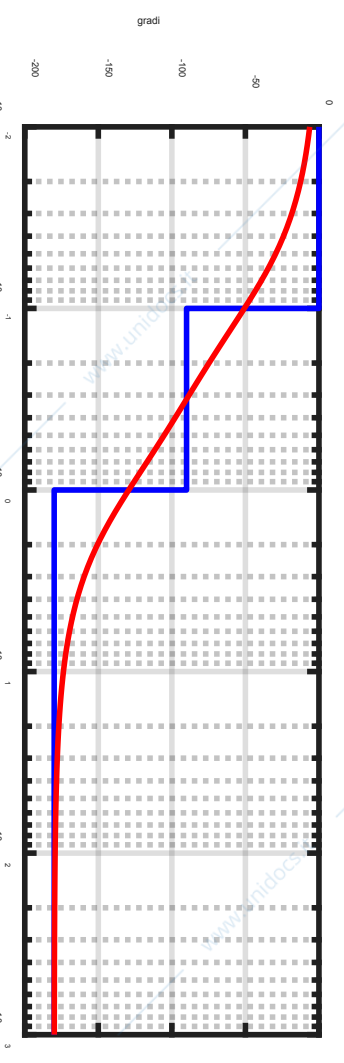


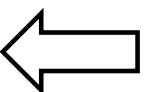
Diagramma di Bode - Fase





Sistemi a fase minima

In termini di diagrammi di Bode asintotici, il diagramma della fase parte da zero (guad. positivo), in corrispondenza di ogni **zero** (che ha parte reale negativa) la pendenza normalizzata del diagramma del modulo aumenta di un'unità, mentre il diagramma della fase aumenta di $+90^\circ$, mentre in corrispondenza di un **polo (con parte reale <0 perché sistema AS)**, la pendenza normalizzata del diagramma del modulo diminuisce di un'unità, mentre il diagramma della fase cambia di -90° .



allora il legame tra il diagramma del modulo e della fase asintotici è immediato, perché in ogni intervallo di pulsazioni compreso tra due singolarità della FdT (polo o zero) risulta:

$$\angle G(j\omega) = (\text{pendenza modulo}) \times 90^\circ$$