FONDAMENTI DI AUTOMATICA - Ingegneria Gestionale **Prof.ssa Mara Tanelli**
Appello del 26 settembre 2014

1. Si consideri il sistema dinamico non lineare e tempo invariante descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = 4x_2(t) + (\alpha - 1)x_2(t)u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -5(x_1(t) - \alpha)^2 - 4x_2^2(t) - 8u^2(t)$$
$$y(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t),$$

con α parametro reale.

1.1 Si determinino stati e uscita di equilibrio associati all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 0$, $t \geq 0$ in funzione di α.

$$\begin{cases} 0 = 4\bar{x}_2 \\ 0 = -5(\bar{x}_1 - \alpha)^2 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases} \quad \bar{y} = 3\alpha}$$

$$\bar{y} = 3\bar{x}_1$$

1.2 Si scrivano le equazioni del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio determinato al punto 1.1.

Linearizzando le eq. di stato si ha

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = [4 + (\alpha-1)\bar{u}]\,\delta x_2 + (\alpha-1)\bar{x}_2\,\delta u \\ \delta\dot{x}_2 = -10(\bar{x}_1 - \alpha)\,\delta x_1 - 8\bar{x}_2\,\delta x_2 - 16\bar{u}\,\delta u \end{cases}$$

$$\delta y = 3\,\delta x_1 + 2\,\delta x_2$$

All'equilibrio si ha

$$\boxed{\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = 4\,\delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad \delta y = 3\,\delta x_1 + 2\,\delta x_2}$$

1.3 Si studi la stabilità del sistema linearizzato e, se possibile, la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

La matrice A è $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, del tipo $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, che ha quindi $\lambda = 0$ autovalore con molteplicità algebrica 2 e molt. geometrica 1.

Il sistema linearizzato è, quindi, instabile

Poiché $Re(\lambda_i) \leq 0 \; \forall i$ e $\exists i : Re(\lambda_i) = 0$

$\Downarrow$

non si può dire nulla sulla stabilità del movimento di equil. del sistema NL

2. Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = 10 \frac{0.01s + 1}{10s + 1}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza autovalori nascosti.

2.1 Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema lineare tempo invariante avente funzione di trasferimento $G(s)$.

Tipo $g = 0$

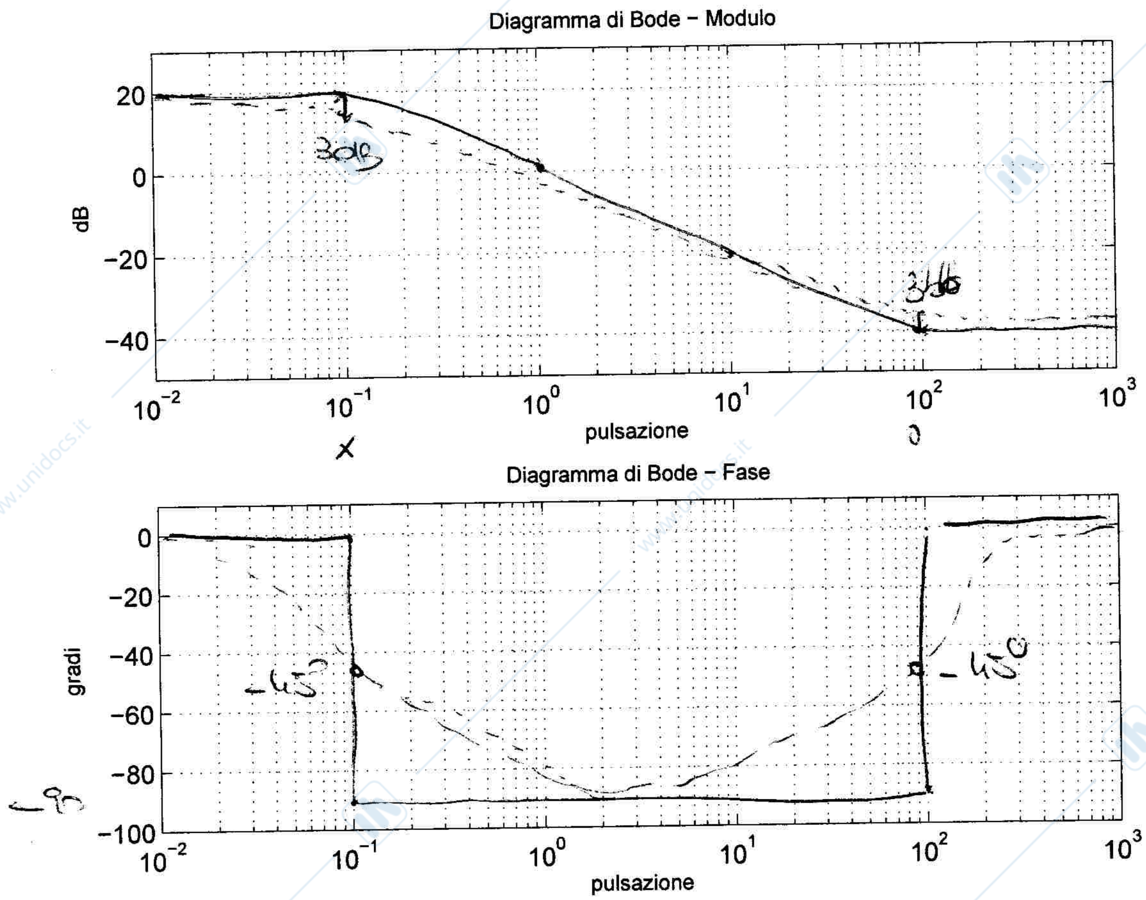
Guadagno $G(0) = 10$

ZERO $z_1 = -100$

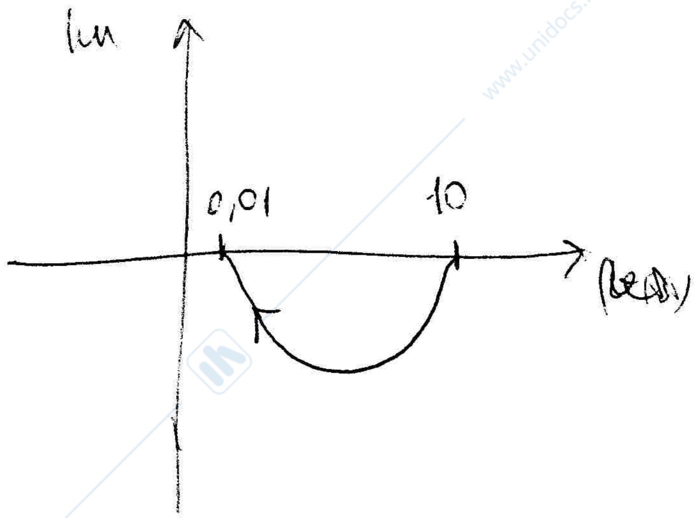
Polo $p_1 = -0,1$

Poiché non vi sono autovalori nascosti e il polo di $G(s)$ è a parte reale < 0, il sistema con FDT $G(s)$ è ASINT. STABILE

2.3 Tracciare i diagrammi di Bode approssimati di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$.



2.4 Tracciare qualitativamente il diagramma polare della risposta in frequenza associata a $G(s)$.



2.5 Dire, giustificando la risposta, quanto vale l'uscita $y(t)$ di regime del sistema lineare tempo invariante con funzione di trasferimento $G(s)$ associata all'ingresso $u(t) = 2+5\sin(0.1\,t)+10\sin(100\,t)$.

$y_{\infty} = y_{1\infty} + y_{2\infty} + y_{3\infty}$

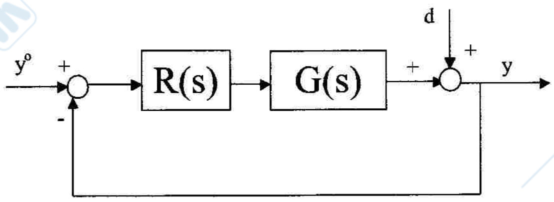
$y_{1\infty} = 2 \cdot G(0) = 20$ perché sist. as. stabile di tipo 0

$y_{2\infty} = 5\underbrace{|G(j0,1)|}_{17dB \to \frac{20}{\sqrt{2}}} \sin(0,1t + \underbrace{\angle G(j0,1)}_{-\pi/4 \text{ (vedi diagr. Bode)}})$

Th. risp. in freq. applic. perché sist. AS. ST.

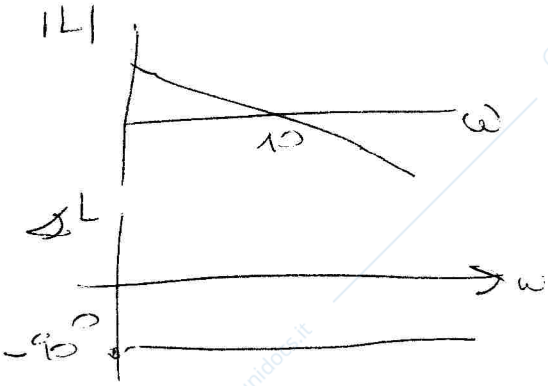
$y_{3\infty} = 10\underbrace{|G(j100)|}_{-37\,dB \to 0,01\cdot\sqrt{2}} \sin(100t + \angle G(j100))$

3. Si consideri il sistema di controllo in figura, dove $G(s)$ è quella introdotta nel precedente esercizio e $R(s) = \frac{10s+1}{s(0.01s+1)}$



3.1 Dire, motivando la risposta, se il sistema in anello chiuso rispetta i seguenti requisiti: 1) il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile; 2) l'errore a transitorio esaurito a fronte di $y^o(t) = \pm\,\text{sca(t)}$ è nullo; 3) il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di $d(t) = \sin(\omega t), \omega \in [0.1, 1]$rad/s è $|e_\infty| \leq 0.1$; 3) la pulsazione critica del sistema in anello chiuso è $\omega_c \geq 5$ rad/s e il margine di fase è $\varphi_m \geq 60°$.

$L(s) = 10/s$



1) P=0 ⇒ corollario delle piccole fasi
Poiché $|\angle L(j\omega)| < 180°$ $\forall\omega$
sist. in an. chiuso AS. STABILE

2) VERO perché L(s) è di tipo 1, come il segnale di riferimento considerato

3) Perché la proprietà sia verificata occorre che

$$|S(j\omega)|_{[0,1,\,1]} \le 0,1 \iff |1+L(j\omega)| \ge 10$$

$$\Uparrow$$

VERO! $|L(j\omega)| \ge 10$ per $\omega \in [0,1,\,1]$

(vedi diagr. Bode)

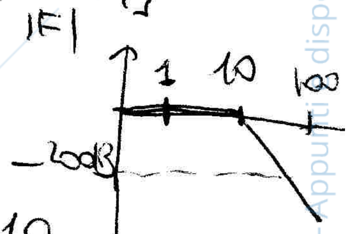
4) Dai diagr. di Bode si vede che

$$\omega_c = 10 \ \frac{rad}{s} > 5$$

$$\varphi_m = 90° > 60°$$

3.2 Con riferimento al sistema di controllo progettato al punto precedente dire, giustificando la risposta, quanto vale l'ampiezza dell'uscita $y(t)$ di regime associata all'ingresso $y^o(t) = \underbrace{1}_{y_1} + \underbrace{5\sin(t)}_{y_2} + \underbrace{10\sin(100\,t)}_{y_3}$ con $d(t) = 0$.

La FdT tra y^o e y è $F(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)}$



Poiché $\varphi_m > 75$ $\quad F(s) \simeq \dfrac{\omega_c}{s+\omega_c} = \dfrac{10}{s+10}$

$$y_{1\infty} = 1 \cdot F(0) = 1 \cdot \frac{10}{10} = 1$$

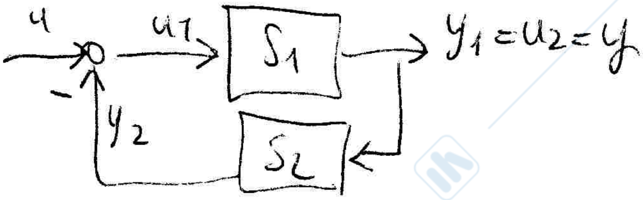
$$y_{2\infty} = 5\,|F(j1)| = 5 \times 1 = 5$$

$$y_{3\infty} = 10\,|F(j100)| = 10 \times 0,1 = 1$$

$$y_\infty = 1 + 5 + 1 = 7$$

4. Si considerino due sistemi lineari e tempo invarianti strettamente propri connessi tra loro in retroazione unitaria negativa. Si ricavi l'espressione in forma di stato del sistema interconnesso, e si mostri che l'asintotica stabilità dei due sistemi di partenza non implica l'asintotica stabilità del sistema complessivo.

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$



$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases}$$

Vincoli connessione $y_1 = u_2 = y$; $u = u_1 - y_2$

$$S: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 (u + C_2 x_2) \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$y = C_1 x_1$$

$\lambda_i(A) \neq \lambda_i(A_1) \cup \lambda_i(A_2)$, che è quello che si voleva mostrare

5. Si introduca la classe dei sistemi dinamici lineari e tempo invarianti a tempo discreto e, per tali sistemi, si enunci il criterio degli autovalori.

Vedi libro / appunti